

El funtor TQFT y la cohomología de Khovanov

CARLOS WILSON RODRÍGUEZ CÁRDENAS*

Resumen. El funtor TQFT (*Topological Quantum Field Theory*) relaciona la categoría de uno-variedades suaves cerradas con la categoría de módulos sobre un anillo R . Los objetos de la primera categoría son clases de isotopía de curvas suaves cerradas en el plano, y los morfismos son cobordismos entre ellas (superficies suaves con frontera en esas curvas suaves cerradas). En la segunda categoría los morfismos son productos y coproductos definidos sobre un R -módulo A . A través de esta relación se obtienen la cohomología de Khovanov y el polinomio de Kovanov, los cuales son invariantes topológicos de nudos.

Abstract. A Topological Quantum Field Theory (TQFT) is a functor between the category of smooth, closed, one dimensional manifolds and the category of R -modules on a ring R . The objects in the first category are classes of isotopy of closed smooth curves and the morphisms are cobordisms (smooth surfaces whose borders are closed soft curves) among them. In the second category the morphisms are homomorphisms of R -modules. Through this functor it is obtained the Khovanov cohomology and Khovanov polynomial, which are topological invariants of knots.

1. Entrelazados

Un *entrelazado* (en inglés *tangle*) es el encajamiento de 1-variedades suaves compactas en $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, (véase Figura 1).

La frontera de un entrelazado puede ser vacía, o puede ser una colección finita de puntos de la frontera de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. A los puntos que están en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ los llamamos puntos fronterizos (o puntos finales) inferiores y a los puntos que están en $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ los llamamos

Palabras y frases claves: nudos, entrelazados, suavizaciones de cruces, cohomología de nudos, característica de Euler, invariantes de nudos.

MSC2000: Primaria: 57M25. Secundaria: 57M27.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia,
e-mail: cwrdriguez@matematicas.uis.edu.co

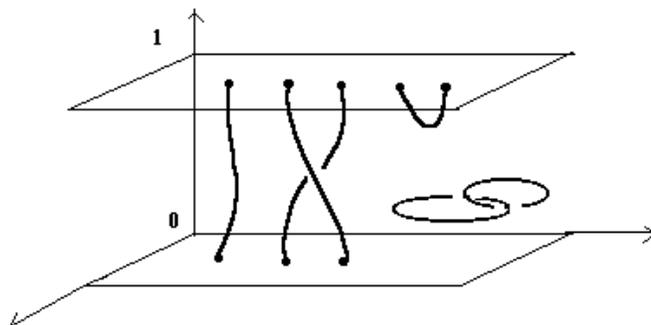


Figura 1. Entrelazado.

puntos fronterizos (o puntos finales) superiores. Si el entrelazado no tiene puntos fronterizos es isomorfo a la unión disyunta de círculos en \mathbb{R}^3 , y lo denominaremos un *enlace* (véase Figura 2).



Figura 2. Enlace.



Figura 3. Nudo.

Si el enlace tiene una única componente conexa lo llamaremos un *nudo*, como en la Figura 3.

Un entrelazado se dice orientado si cada componente conexa es una 1-variedad orientada. Dos entrelazados L y L' se dicen isotópicos si existen homeomorfismos $H_t : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, con t en $[0, 1]$, que preservan orientación, y tales que $H_0 = L$ y $H_1 = L'$, donde $(x, t) \rightarrow (H_t(x), t)$ es un homeomorfismo. En otras palabras una isotopía es una aplicación continua que transforma un entrelazado en otro sin hacer autointersecciones y dejando fijos los puntos fronterizos.

Un *Diagrama plano* de un entrelazado L es la clase de equivalencia bajo isotopía de las proyecciones de L sobre un plano de tal forma que la proyección no tiene triples intersecciones ni dobles tangencias, como en la Figura 4.

1.1. Movimientos de Reidemeister

Proposición 1.1. *Dos entrelazados L y L' son isotópicos si y solo si sus diagramas planos respectivos D y D' se pueden transformar el uno en el otro mediante una sucesión de movimientos, conocidos como movimientos de Reidemeister. Los movimientos de Reidemeister se ilustran en la Figura 5, (ver [15]).*

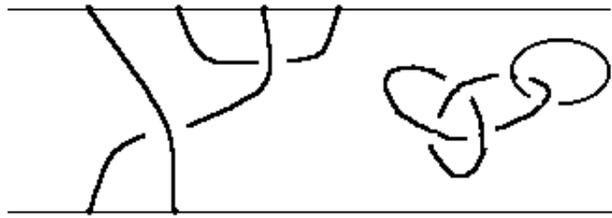


Figura 4. Diagrama plano.

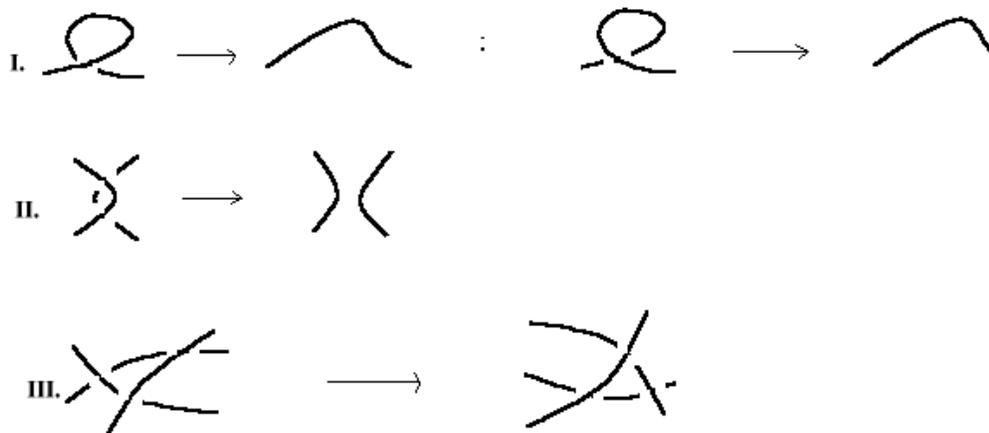


Figura 5. Movimientos de Reidemeister.

Por ejemplo, los dos diagramas en la Figura 6 corresponden a entrelazados isotópicos.

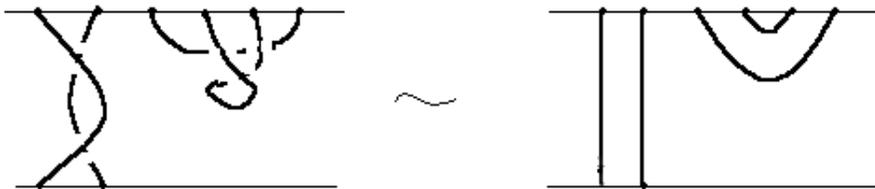


Figura 6. Entrelazados isotópicos.

2. Categorías de entrelazados

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los puntos fronterizos inferiores (y de la misma forma los puntos fronterizos superiores) de un entrelazado L están alineados con coordenadas $\{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (m, 0, 0)\}$ y $\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$, respectivamente. A estos conjuntos los denotaremos simplemente como $1, 2, \dots, m$ y $1, 2, \dots, n$,

respectivamente (ver Figura 7). De lo anterior se deduce que $m + n$ es par.

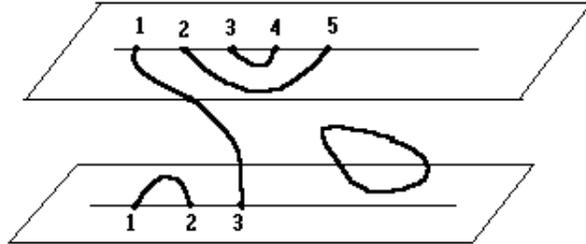


Figura 7. Puntos fronterizos.

2.1. La categoría de entrelazados no orientados

La categoría de los entrelazados no orientados es la categoría donde los objetos son números enteros no negativos, y un morfismo $m \rightarrow n$ entre los objetos m y n ($m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) es una clase de isotopía de entrelazados con $2m$ puntos finales inferiores y $2n$ puntos finales superiores.

La composición entre morfismos está dada simplemente por concatenación de entrelazados. Luego si queremos componer el entrelazado α con el entrelazado β , para obtener el entrelazado compuesto $\beta\alpha$ el número de puntos finales superiores de α debe ser igual al número de puntos finales inferiores de β . Además, para que esta concatenación siga cumpliendo condiciones de suavidad, la intersección de cada componente conexa del entrelazado con los planos superior e inferior debe hacerse en forma ortogonal. Así por ejemplo, si tenemos los siguientes diagramas, mostrados en la Figura 8,



Figura 8. Morfismos en la categoría de entrelazados no orientados.

la composición será como se ve en la Figura 9, que se obtiene aplicando movimientos de Reidemeister y reescalando.

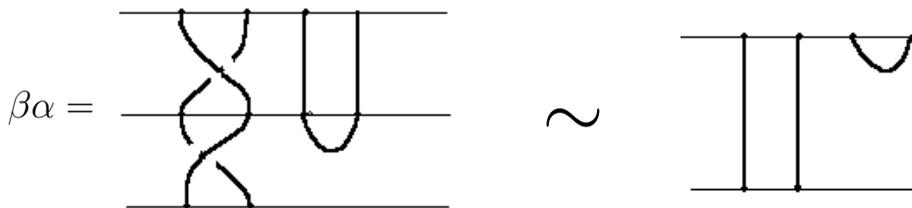


Figura 9. Composición de morfismos.

2.2. La categoría Temperley-Lieb

Supongamos que tomamos entrelazados tales que sus diagramas planos no presentan autointersecciones. A estos los llamaremos *entrelazados planos*. Es decir un (m, n) -entrelazado plano es un encajamiento de $m + n$ arcos disyuntos y un número finito de círculos. Al conjunto de los (m, n) -entrelazados lo denotaremos $\hat{B}(m, n)$. En la Figura 10 se muestra un elemento de $\hat{B}(1, 2)$.

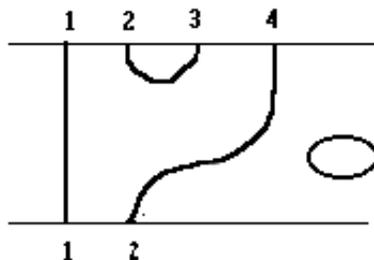


Figura 10. Plano del conjunto $\hat{B}(1, 2)$.

Se define entonces la categoría *Temperley-Lieb* como la categoría cuyos objetos son enteros no negativos y donde un morfismo $m \rightarrow n$, entre los objetos m y n ($m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) es una clase de isotopía de elementos en $\hat{B}(m, n)$. La composición aquí se hace por concatenación, como antes.

Ahora sea $B(m, n)$ el conjunto de las clases de isotopía de $\hat{B}(m, n)$, donde se han removido todos los círculos. La cardinalidad de $B(m, n)$ está dada por el $m + n$ número de *Catalán* que se define como:

$$\#Catalan = \frac{1}{(m+n)+1} \binom{2(m+n)}{m+n}.$$

Por ejemplo, la cardinalidad de $B(1, 2)$ es 5, y sus diagramas se muestran en la Figura 11.

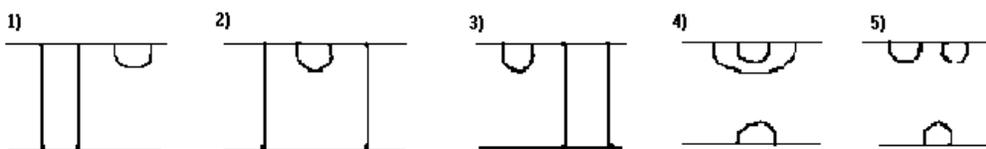


Figura 11. Elementos de $B(1, 2)$.

2.3. La categoría lineal Temperley-Lieb

El módulo $M(m, n)$ es el módulo generado por $B(m, n)$ sobre el anillo $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ (el anillo de los polinomios con coeficientes enteros y variables q y q^{-1}). Con esto se define otra categoría que denominaremos la *categoría lineal Temperley-Lieb*, donde los objetos siguen siendo enteros no negativos y los morfismos son elementos de $M(m, n)$. Para la composición definimos la aplicación $rm : \hat{B}(m, n) \rightarrow B(m, n)$, que a un (m, n) -entrelazado plano a lo envía en la clase de isotopía de a , removiendo los círculos que se formen; luego si $a \in B(m, n)$ y $b \in B(n, k)$, se define su composición como $(q + q^{-1})^i rm(ba)$, donde i es el número de círculos en ba (ver Figura 12).

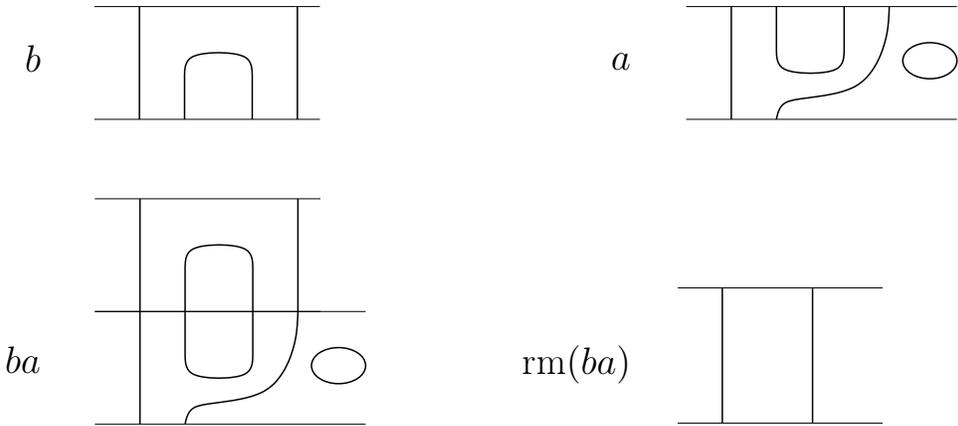


Figura 12. Composición de morfismos en la categoría Temperley-Lieb.

En el ejemplo de la Figura 12 la composición de a y b está dada por $(q + q^{-1})^2 rm(ba)$.

2.4. La 2-categoría Temperley-Lieb

La 2-categoría Temperley-Lieb es una 2-categoría donde los objetos son enteros no negativos, los 1-morfismos entre enteros m y n son elementos de $\hat{B}(m, n)$ y donde los 2-morfismos son clases de isotopía de cobordismos entre a y b , $a, b \in \hat{B}(m, n)$. Un cobordismo entre los entrelazados planos a y b ($a, b \in \hat{B}(m, n)$) es una superficie suave S encajada en $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, donde la frontera inferior es $S \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} = a$ y la frontera superior es $S \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\} = b$. Las fronteras laterales son segmentos de recta que unen los puntos fronterizos de a y b respectivamente. Sobre un círculo la superficie es simplemente una membrana suave con fronterizos el círculo. Por ejemplo, la Figura 13 muestra un cobordismo entre los $(1, 2)$ -entrelazados planos a y b , a se dibuja en el plano inferior de la figura y b está sobre el plano superior.

La composición de 2-morfismos se define del siguiente modo: Si se tiene un cobordismo admisible S_1 entre a y b , y un cobordismo admisible S_2 entre b y c , la concatenación de S_1 y S_2 es un cobordismo entre a y c , como se muestra en la Figura 14.

También podemos hacer otro tipo de composición: Sean $a, b \in \hat{B}(m, n)$ y $c, d \in \hat{B}(m, n)$. Sea S_1 un cobordismo entre a y b y S_2 un cobordismo entre c y d , entonces se puede componer S_1 con S_2 obteniendo un cobordismo admisible de ca a db . En otras palabras, podemos hacer pegamientos laterales si los entrelazados son compatibles para la composición. En la Figura 15 se muestra la composición lateral de los cobordismos S_1 , S_2 y S_3 , donde al componer los entrelazados a , c y e , eca , se obtiene una circunferencia, y al componer los entrelazados b , d y f , fde , se obtienen dos circunferencias, y entonces la composición de S_1 , S_2 y S_3 , $S_3S_2S_1$, se puede ver como el pantalón invertido mostrado en la Figura 15.

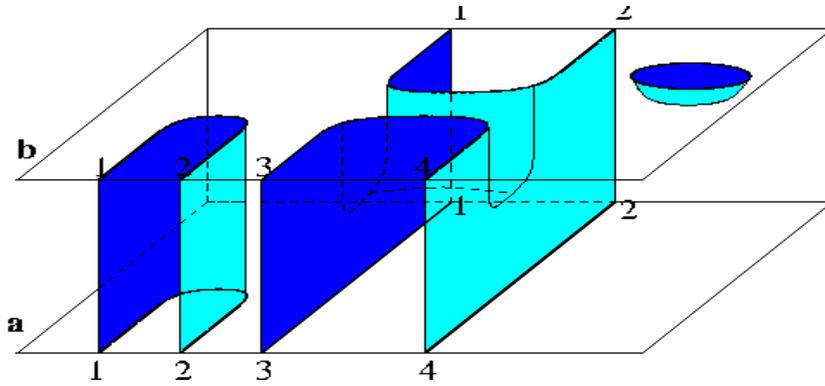


Figura 13. Cobordismo entre $(1, 2)$ -entrelazados planos.

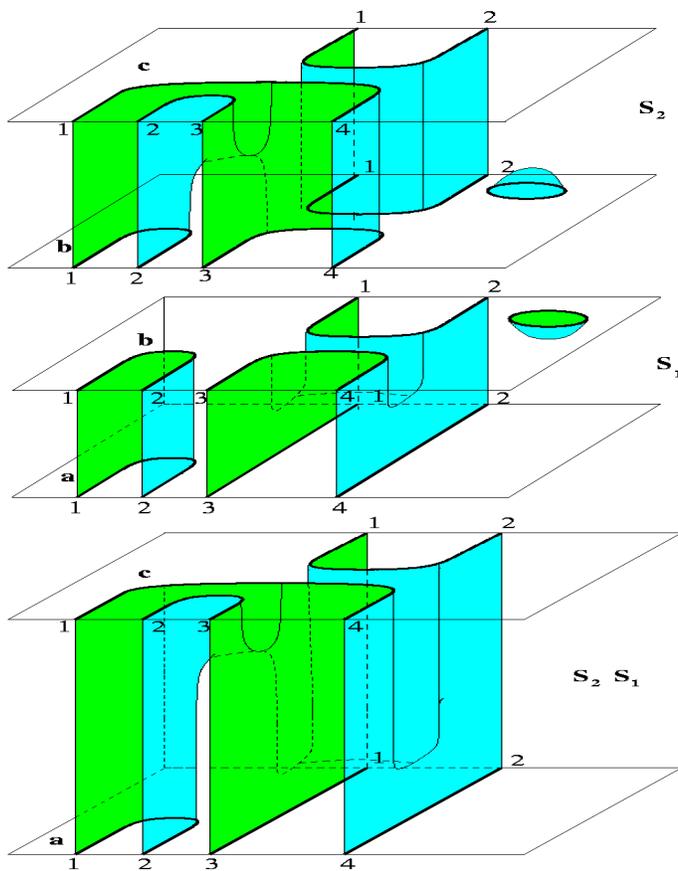


Figura 14. Composición de 2-morfismos en la 2-categoría Temperley-Lieb.

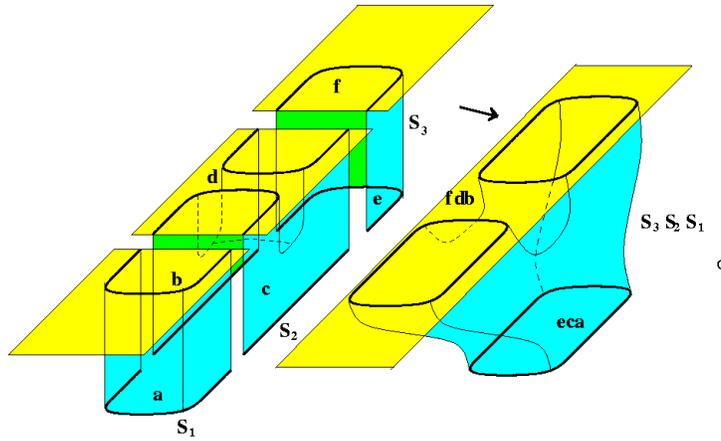


Figura 15. Composición lateral de 2-morfismos en la 2-categoría Temperley-Lieb.

2.5. La 2-categoría Euler-Temperley-Lieb

La 2-categoría Euler-Temperley-Lieb es la 2-categoría donde los objetos son enteros no negativos, los 1-morfismos son pares (a, i) donde a es un 1-morfismo de m en n en la 2-categoría Temperley-Lieb, y donde i es un entero. Un 2-morfismo de (a, i) en (b, j) ; $a, b \in \hat{B}(m, n)$; es la clase de isotopía de los cobordismos S entre a y b , y donde se tiene que la característica de Euler de S es $\chi(S) = n + m + j - i$. Aquí la composición de 1-morfismos (a, i) y (b, j) es simplemente $(ab, i + j)$, si a y b se pueden componer. La composición de 2-morfismos se hace como antes.

3. El funtor TQFT y la cohomología de Khovanov

3.1. Suavizaciones de cruces

Sea L un link orientado y sea D un diagrama plano asociado a L . Denotemos por \aleph el conjunto de cruces de D y sea $n = |\aleph|$ el cardinal de \aleph . Llamaremos a cada cruce q de D positivo o negativo si el cruce luce como en la Figura 16.



Figura 16. Cruces en un diagrama plano.

Entonces, $n = n_p + n_m$, donde n_p es el número de cruces positivos y n_m es el número

de cruces negativos. Por ejemplo, en la Figura 17 tenemos un nudo con seis cruces, en el cual especificamos los cruces positivos y los cruces negativos. Aquí $n_p = 4$ y $n_m = 2$.

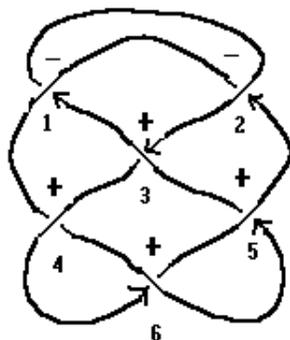


Figura 17. Nudo con seis cruces.

Existen dos posibles suavizaciones de cualquier cruce q de D , que denominaremos 0-suavización y 1-suavización, según como se establece en la Figura 18.



Figura 18. Tipos de suavización de cruces.

Cada una de las figuras anteriores corresponde al mismo diagrama D , asociado al enlace L que varía solo en la forma indicada en una vecindad del punto de cruce q . Por lo tanto tenemos que para el diagrama D el número total de posibles suavizaciones de todos los cruces q es $2^{|\mathbb{N}|}$. Se hacen corresponder estas suavizaciones con los vértices de un cubo n -dimensional, que denotaremos $C_S(D)$, y cada suavización individual es simplemente algún conjunto C_α de curvas homeomorfas a círculos en el plano, donde $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ($\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de las funciones de \mathbb{N} en $\{0, 1\}$, es decir, α se puede ver como una sucesión de ceros y unos). De la misma forma se hace corresponder a cada arista del cubo con una sucesión $\xi \in \{0, 1, *\}^{\mathbb{N}}$, donde ξ tiene exactamente un $*$. El $*$ muestra el lugar donde se reemplaza un cero por un uno.

Cada arista del cubo representa un cobordismo entre los círculos que se forman al realizar una suavización C_α con los círculos que se forman al realizar la suavización C_{α^*} , donde α^* se obtiene al reemplazar un cero por un uno en α precisamente donde lo muestra la sucesión ξ . Denotamos este cobordismo como S_ξ .

S_ξ es un morfismo en la categoría de cobordismos orientados. La categoría de los cobordismos orientados es la categoría cuyos objetos son uniones de círculos disyuntos y los morfismos son cobordismos entre ellos.

La única diferencia entre una suavización C_α y una C_{α^*} es que C_{α^*} tiene un círculo más o bien un círculo menos; por lo tanto, los cobordismos admisibles entre C_α y C_{α^*} solo pueden ser como los que se muestran en la Figura 19. En un cobordismo entre C_α y

C_{α^*} aparecerá solo una figura de pantalón, y en los demás círculos las superficies serán cilindros que representan el morfismo identidad.

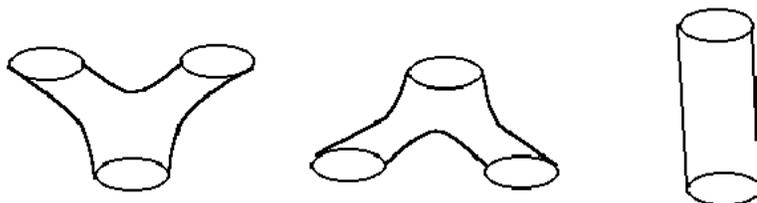


Figura 19. Posibles cobordismos en la categoría de cobordismos orientados.

En la Figura 20 se muestra el diagrama del trébol \mathbf{T} considerado con su orientación positiva, y se muestra el cubo $C_S(\mathbf{T})$ (se muestra también en la figura el cobordismo S_{0^*1}).

3.2. Cubos conmutativos

Un cubo conmutativo generaliza el concepto de cuadrado conmutativo. Dado un cubo n -dimensional, se asigna un objeto de una categoría a cada vértice del cubo y un morfismo a cada arista, de tal modo que cada cara 2-dimensional del cubo sea un diagrama conmutativo.

El siguiente paso en la construcción de la Cohomología de Khovanov de un enlace L con un diagrama asociado D es relacionar el cubo $C_S(D)$ con un cubo conmutativo de R -módulos sobre A , $C_A(D)$, a través de la TQFT $(1+1)$ -dimensional que se define en la sección 3.5.

3.3. Álgebra de Frobenius

Un álgebra de Frobenius A es un álgebra conmutativa, asociativa, con unidad y con una aplicación lineal $\text{tr} : A \rightarrow R$, tal que la forma bilineal $\text{tr}(a \otimes b)$ es no degenerada; en este caso R es un anillo, (ver [3, sección 4.3]).

3.4. El álgebra A

Sea $R = \mathbb{Z}[c]$ el anillo de los polinomios con coeficientes enteros en la variable c , y sea A un módulo graduado sobre R generado por los elementos $\{1, X\}$. Un *módulo graduado* M es un módulo que se puede escribir como la suma directa de una familia de submódulos de M indexados sobre un monoide conmutativo y aditivo, $M = \bigoplus_i M_i$.

A tiene carácter de un álgebra conmutativa con el producto $m : A \otimes A \rightarrow A$ definido por: $m(1 \otimes 1) = 1$, $m(1 \otimes X) = m(X \otimes 1) = X$, $m(X \otimes X) = 0$.

Además, también se puede dotar de una estructura de coálgebra con el coproducto $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ de la forma: $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 + cX \otimes X$, $\Delta(X) = X \otimes X$.

El módulo A definido anteriormente junto con las operaciones m y Δ , y la aplicación $\text{tr}(A) \rightarrow R$ definida como $\text{tr}(1) = 0$ y $\text{tr}(X) = 1$, es un álgebra de Frobenius (ver [15]).

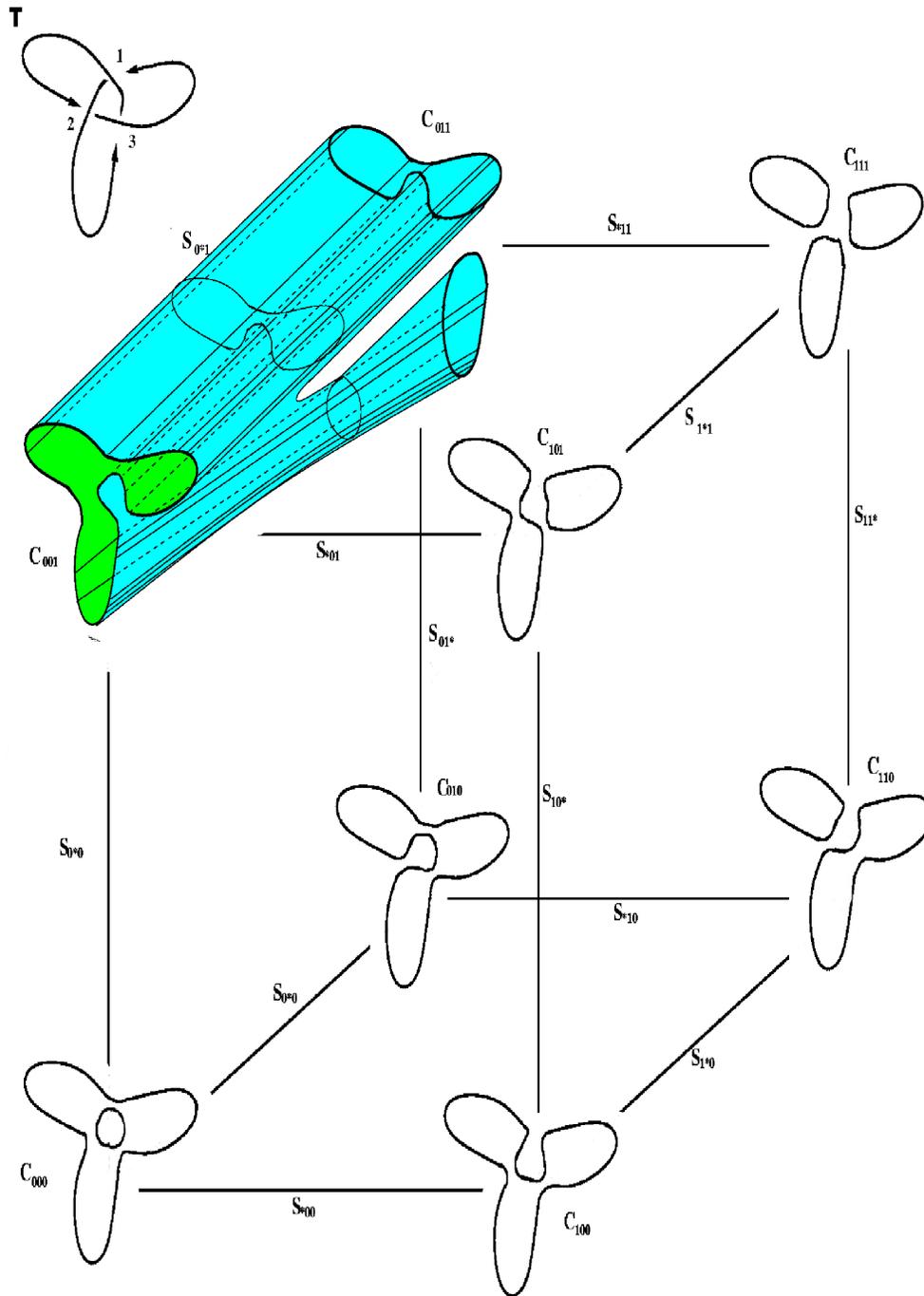


Figura 20. Cubo de suavización del nudo de trébol T .

Se asignan ciertas graduaciones a los elementos de A y R por medio de las funciones $\text{grad} : A \rightarrow \mathbb{Z}$ con $\text{grad}(1) = 1$ y $\text{grad}(X) = -1$, y $\text{grad} : R \rightarrow \mathbb{Z}$ con $\text{grad}(1) = 0$ y $\text{grad}(c) = 2$. Para $a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$, $\text{grad}(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_i^n \text{grad}(a_i)$.

Por lo tanto, se puede ver que el efecto que producen el producto y el coproducto sobre el grado en un elemento es reducirlo en uno, es decir, $\text{grad}(m) = -1$ y $\text{grad}(\Delta) = -1$.

3.5. El funtor TQFT

Una teoría de campo cuanticotopológica $(1 + 1)$ -dimensional (o simplemente TQFT $(1 + 1)$ -dimensional por sus siglas en inglés) asigna a cada 1-variedad compacta orientada N sin frontera (es decir a una unión disyunta de círculos) un espacio vectorial de dimensión finita V_N sobre un campo K , K de característica cero (es decir K contiene un subcampo isomorfo a los racionales). Además una TQFT $(1 + 1)$ -dimensional asigna a cada 2-variedad con fronteras S un vector $v_S \in V_{\partial S}$.

Para una TQFT $(1 + 1)$ -dimensional se usarán las siguientes convenciones: $V_{\emptyset} = K$, $V_{N^*} = (V_N)^*$, donde N^* es la variedad N con la orientación contraria y $(V_N)^*$ es el espacio dual de V_N . También $V_{N \sqcup Y} = V_N \otimes V_Y$. De esta forma, una superficie S , con $\partial S = N^* \sqcup Y$, es enviada bajo el funtor TQFT $(1 + 1)$ -dimensional en una aplicación lineal $v_S = V_N \rightarrow V_Y$, (ver [3] para obtener la axiomática completa).

Teorema 3.1. *Las TQFT $(1 + 1)$ -dimensionales están en correspondencia uno-a-uno con las álgebras de Frobenius de dimensión finita (ver [3, pág. 79]).*

La Figura 21 muestra la correspondencia entre los morfismos de la categoría de cobordismos y morfismos entre la categoría de los R -módulos graduados a través de una TQFT $(1 + 1)$ -dimensional.

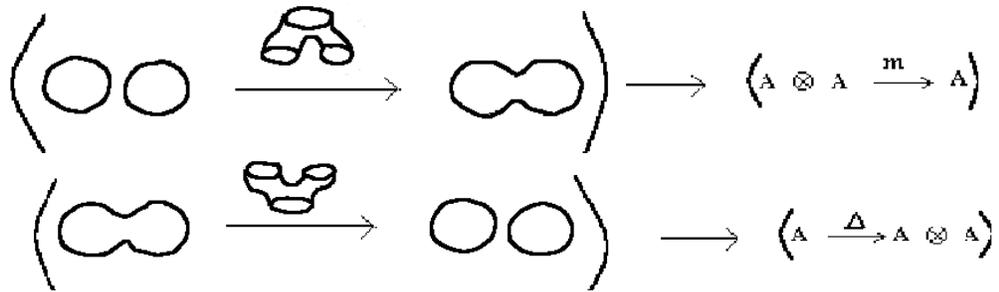


Figura 21. Correspondencia entre los morfismos de la categoría de cobordismos y los morfismos en la categoría de R -módulos graduados.

El cubo $C_A(D)$ se obtiene a partir del cubo $C_S(D)$ reemplazando cada vértice C_α por un R -módulo $A_\alpha(D) = A^{\otimes k} = A \otimes A \otimes \dots \otimes A$, con $A^{\otimes k}$ el producto tensorial de A consigo mismo k veces, donde k es el número de círculos en C_α . Cada arista S_ξ del cubo $C_S(D)$ se reemplaza por un morfismo de R -módulos que denotaremos d_ξ .

Usaremos el símbolo Δ_{ijk} para denotar el morfismo $A^{\otimes k} \rightarrow A^{\otimes(k+1)}$ que aplica Δ al i -ésimo factor en $A^{\otimes k}$ sobre los factores j -ésimo y k -ésimo en $A^{\otimes(k+1)}$, y sobre el resto

de factores aplica la identidad. Dicho de otra forma, si se numeran los círculos en C_α y C_{α^*} y el número de círculos de C_{α^*} es el número de círculos de C_α más uno, se hace corresponder al cobordismo que tiene figura de pantalón invertido el morfismo Δ y a los cilindros se les hace corresponder la identidad.

De la misma manera m_{ijk} es el morfismo $A^{\otimes(k+1)} \rightarrow A^{\otimes k}$ que aplica m a los factores i -ésimo y j -ésimo en $A^{\otimes(k+1)}$ sobre el factor k -ésimo en $A^{\otimes k}$, esto si el número de círculos de C_{α^*} es el número de círculos de C_α menos uno; d_ξ incluirá solamente estos tipos de morfismos.

Para el nudo trébol \mathbf{T} el cubo $C_A(D)$ luce como se muestra en la Figura 22.

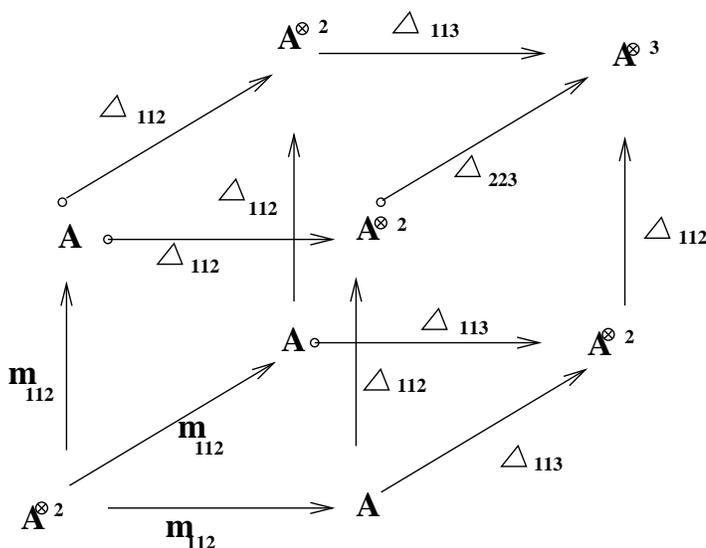


Figura 22. Cubo de morfismos correspondientes al nudo trébol \mathbf{T} en la categoría de R -módulos.

Por lo tanto, es natural que se tenga la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *El cubo n -dimensional $C_A(D)$ es conmutativo (véase [15]).*

3.6. Cadenas complejas

En seguida debemos llevar el cubo $C_A(D)$ a una cadena compleja $C(D)$. Para ello hacemos $C^r(D) := \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\}^n, |\alpha|=r} A_\alpha(D)$, donde $r = |\alpha|$ es el número de unos que tiene la sucesión α , y asociamos la aplicación $d^r : C^r \rightarrow C^{r+1}$, $d^r = \sum_{\xi \in \{0,1,*\}^n} (-1)^\xi d_\xi$, donde $(-1)^\xi = -1$ si la sucesión ξ tiene un número impar de unos antes de la posición en la que aparece $*$, y $(-1)^\xi = 1$ si la sucesión ξ tiene un número par de unos antes de la posición en la que aparece $*$.

Proposición 3.3. *$(C(D), d)$ es un complejo, es decir, $d^2 = 0$ (ver [15]).*

Sea W un espacio vectorial graduado, $W = \bigoplus_m W_m$; se define la *dimensión graduada* de W como la serie de potencias $q\dim(W) = \sum_m q^m \dim(W_m)$.

De manera análoga se define la característica de Euler graduada de un complejo $C(D)$ como $\chi(C(D)) = \sum_r (-1)^r q^r \dim_Q H^r$, donde H^r corresponde al r -ésimo grupo de homología de $C(D)$.

Ahora es necesario hacer cierto cambio en los grados de los elementos de $C(D)$ con el fin de que al calcular la característica de Euler graduada de la cadena de homología, esta coincida con el polinomio de Jones. Para ello, si $W = \bigoplus_m W_m$ es un espacio vectorial graduado con componentes homogéneas $\{W_m\}$, se define $\{l\}$ la operación de cambio de grado en W tal que $W\{l\}_m = W_{m-l}$.

Se define también $[s]$ como la operación de cambio del orden en una cadena compleja. Si C' es una cadena compleja $\dots \rightarrow C^r \rightarrow C^{r+1} \rightarrow \dots$ de espacios vectoriales, entonces la cadena compleja $C = C'[s]$ es tal que $C^r = C'^{r-s}$ con todos los grados de las diferenciales cambiados de la misma forma.

Con todo lo anterior formamos ahora la cadena compleja $CK(D)$, en la cual el r -ésimo grupo de cadena es $CK^r(D) = \bigoplus_{\alpha: r=|\alpha|} A_\alpha(D)[r]$. Finalmente, el complejo que nos interesa es

$$CKH(D) := CK^r[-n_m]\{n_p - 2n_m\},$$

donde n_p y n_m se definieron en la sección 3.1.

La *Cohomología de Khovanov* asociada al diagrama D del enlace L es la homología $H(D) := H^r(D)$ del complejo $CKH(D)$.

4. Teoremas principales

Los siguientes teoremas muestran cómo la Cohomología de Khovanov es un invariante isotópico de nudos que permite hacer una mejor clasificación de ellos. Esta clasificación generaliza al polinomio de Jones (ver [6]). Las demostraciones de los siguientes teoremas se pueden ver en [15].

Teorema principal (Khovanov). *Las clases de isomorfía de los grupos de homología $H^r(D)$ son invariantes del enlace L , donde D es un diagrama cualquiera asociado a L .*

El *paréntesis de Kauffman* de la proyección de un enlace L se define mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= \langle \text{---} \rangle - q \langle \text{)} \langle \text{(} \rangle \\ \langle \bigcirc L \rangle &= (q + q^{-1}) \langle L \rangle \end{aligned}$$

A partir del paréntesis de Kauffman definimos el *polinomio de Jones* de L como

$$J(L) = (-1)^{n_m} q^{n_p - 2n_m} \langle L \rangle.$$

Teorema 4.1 (Khovanov). *El polinomio de Jones de un enlace L es la característica de*

Euler graduada del complejo $CK(D)$, es decir,

$$\begin{aligned} J(L) &= \sum_r (-1)^r q^r \dim_{\mathbb{Q}}(CK^r(D)[-n_m]\{n_p - 2n_m\}) \\ &= \sum_r (-1)^r q^r \dim_{\mathbb{Q}} H^r. \end{aligned}$$

Para el nudo trébol el esquema de la Figura 23 ejemplifica la construcción.

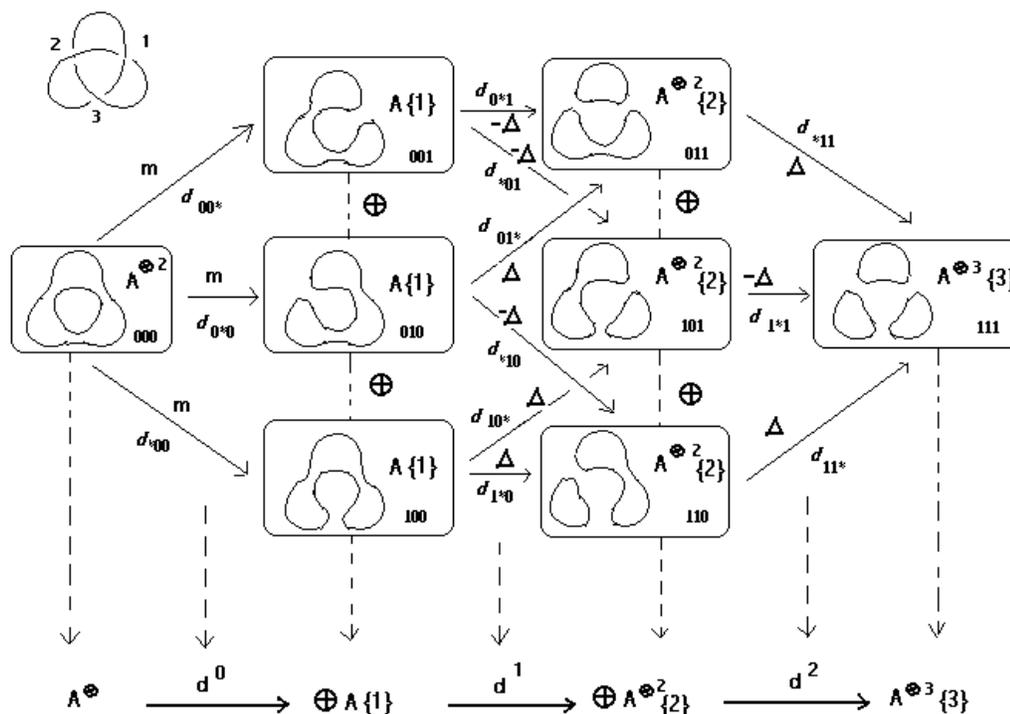


Figura 23. Cadena de homología de Khovanov para el nudo trébol \mathbf{T} .

La cadena compleja en este caso está dada por

$$\begin{aligned} CK^0 &\xrightarrow{d^0 = \sum_{|\xi|=0} (-1)^\xi d_\xi} CK^1 \xrightarrow{d^1 = \sum_{|\xi|=1} (-1)^\xi d_\xi} CK^2 \xrightarrow{d^2 = \sum_{|\xi|=2} (-1)^\xi d_\xi} CK^3 \\ &= A^{\otimes 2} \xrightarrow{m_{12} + m_{12} + m_{12}} \bigoplus_1^3 A \xrightarrow{-\Delta^{12} - \Delta^{12} + \Delta^{12} - \Delta^{13} + \Delta^{12} + \Delta^{13}} \bigoplus_1^3 A^{\otimes 2} \xrightarrow{\Delta^{13} - \Delta^{23} + \Delta^{12}} A^{\otimes 3} \\ &= CK \xrightarrow{[-n_m]\{n_p - 2n_m\}} CKH(\mathbf{T}). \end{aligned}$$

(donde $(n_p, n_m) = (3, 0)$)

Se puede ver que el grado del diferencial d^r es cero para todo r ; por lo tanto, la suma alternada de las dimensiones graduadas de estos grupos de cadena y la suma alternada de los rangos graduados de los grupos de homología son iguales.

Para el nudo trébol \mathbf{T} la suma alternada de las dimensiones graduadas de los grupos de cadena es

$$(q + q^{-1})^2 - 3q(q + q^{-1}) + 3q^2(q + q^{-1})^2 - q^3(q + q^{-1})^3 = q^{-2} + 1 + q^2 - q^6.$$

Multiplicando esta última expresión por el factor $(-1)^{n_m} q^{n_p - 2n_m} \frac{1}{(q + q^{-1})}$, se obtiene el polinomio de Jones para el trébol: $J(D) = q^2 + q^6 - q^8$. En este caso $n_p = 3$ y $n_m = 0$.

De esa forma se completa la construcción de la cohomología de Khovanov y se obtiene una herramienta fuerte para la clasificación de nudos, un problema que adquiere cada vez más trascendencia en el ámbito de las ciencias naturales que se aplican a situaciones reales, como la física y la biología. También, como se muestra en este artículo, se establecen relaciones entre diferentes áreas de la matemática, como la teoría de nudos, la topología algebraica, las variedades diferenciables, la combinatoria y otras más.

Referencias

- [1] M.F. ATIYAH. *Topological Quantum Field Theories*. I.H.I.S. Publ., 68:175-186, 1998.
- [2] C. BLANCHET. "Introduction to Quantum Invariants of 3-Manifolds, Topological Quantum Field Theories and Modular Categories". *Summer School on Geometric and Topological Methods for The Quantum Field Theory*. Villa de Leyva, julio de 2001.
- [3] B. BAKALOV & A. KIRILLOV JR. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*. The American Mathematical Society. USA, 2001.
- [4] J. BERNSTEIN, I.B. FRENKEL & M. KHOVANOV. "A Categorification of The Temperley-Lieb Algebra and Schur Quotients of $U(\mathfrak{sl}_2)$ Via Projective and Zuckerman Functors". *Selecta Math., New Ser.*, 5:199-241, 1999. [ArXiv:math.QA/0002087](https://arxiv.org/abs/math/0002087).
- [5] DROR BAR-NATAN, DAVID KAZHDAN & DILAN THURSTON. *Categorification for the Busy Mathematician*. <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn/paper/Categorification/> (07/09/2001).
- [6] DROR BAR-NATAN. *On Khovanov's Categorification of the Jones Polynomial*. <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn/paper/Categorification/> (28/02/2002).
- [7] I.B. FRENKEL, N. JING & W. WANG. "Vertex Representations Via Finite Groups and the McKay Correspondence." 1999, [ArXiv:math.QA/9907166](https://arxiv.org/abs/math/9907166).
- [8] I.B. FRENKEL & M. KHOVANOV. "Canonical Basis in Tensor Products and Graphical Calculus for $U(\mathfrak{sl}_2)$." *Duke Math J.*, 87(3):409-480, 1997.
- [9] R.S. HUERFANO & M. KHOVANOV. "A Category for the Adjoint Representation." *Journal of Algebra*, 246, 514-542 (2002). Elsevier Science, 2001.
- [10] V. JONES. "A Polynomial Invariant of Knots Via Von Neumann Algebra." *Bull. AMS* 12, 103-111, 1987.
- [11] V. JONES. "Commuting Transfer Matrices and Link Polynomials." *International Journal of Mathematics*, Vol.3, no.2, 205-212, 1992.

- [12] L.H. KAUFFMAN. "State Models and the Jones Polynomial." *Topology*, 26(3):395-407, 1987.
- [13] L.H. KAUFFMAN. *On Knots*. Princeton Univ. Press. Princeton, 1987.
- [14] L.H. KAUFFMAN. "Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds." *Annals of Mathematics Studies*, no.134. Princeton Univ. Press. Princeton, 1987.
- [15] M. KHOVANOV. "A Categorification of The Jones Polynomial." *Duke Math Journal*, vol.3, no.101, 359-426, 2000, [arXiv:math.QA/9908171](https://arxiv.org/abs/math/9908171), 1999.
- [16] M. KHOVANOV. "A Functor-Valued Invariant of Tangles." *Algebraica and Geometric Topology*. vol. 2, 665-741, 2002.
- [17] M. KHOVANOV & SEDIEL. "Quivers, Floer Homology and Braid Group Action." *Journal of the American Mathematical Society*. vol. 15, no. 1, 203-271.
- [18] D. ROLFSEN. "Knots and Links." *Mathematics Lecture Serie*. Publish or Perish, 1976.
- [19] V. TURAEV. "Quantum Invariants on Knots and 3-Manifolds." *De Gruiter Studies in Mathematics*. 18. 1994.
- [20] E. WITTEN. "Quantum Field Theory and The Jones Polynomial." *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351-399, 1989.

CARLOS WILSON RODRÍGUEZ C.
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
e-mail: cwrodriguez@matematicas.uis.edu.co