Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 4, No. 2, julio-diciembre 1986

¿Quién le dio a usted el épsilon? Cauchy y los orígenes del cálculo riguroso*

JUDITH V. GRABINER**

Estudiante: El carro va a una velocidad de 50 millas por hora. ¿Qué significa esto?

Profesor: Dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que si $|t_2 - t_1| < \delta$ entonces $\left|\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50\right| < \varepsilon$.

Estudiante: ¿Cómo se le ocurrió a alguien en el mundo tal respuesta?

Tal vez este diálogo nos recordará que los fundamentos rigurosos del cálculo no son de ninguna manera intuitivos. El cálculo trata con velocidades y distancias, con tangentes y áreas, no con desigualdades. Cuando Newton*** y Leibniz**** inventarion el cálculo en el siglo XVII no usaron pruebas delta-épsilon. Se necesitaron 150 años para desarrollarlas. Esto muestra que este desarrollo fue probablemente muy difícil, y no es de extrañar que los estudiantes encuentren difíciles las bases rigurosas del cálculo. ¿Cómo entonces alcanzó el cálculo su rigurosidad en términos del álgebra de desigualdades?

* El presente artículo es la versión castellana de *Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigurous calculus*, publicado originalmente en THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, Vol. 90, No. 3, March 1983, 185-194. La traducción fue realizada por GABRIEL YAÑEZ, Profesor Asistente UIS, a quien corresponde la datación de los autores mencionados en el texto.

** Professor of History of Science, California State University.

*** Isaac Newton, inglés (1643-1727).

**** Gottfried Wilhelm Leibniz, alemán (1646-1716).

Las pruebas delta-épsilon se encuentran por primera vez en los trabajos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Esto no es siempre reconocido dado que Cauchy dio una definición puramente verbal de límite, la cual a primera vista no se parece a las definiciones modernas: «Cuando los valores sucesivamente atribuidos a la misma variable se acercan indefinidamente a un valor fijo, tal que finalmente difieren de él tan poco como se desee, a este valor fijo se lo llama el *límite* de todos los otros» [1]. Cauchy dio también una definición poco rigurosa de la derivada de $f(x)$ como el límite, cuando existe, del cociente de diferencias $(f(x+h) - f(x))/h$ cuando h tiende a cero, una afirmación bien parecida a las que ya habían dado Newton, Leibniz, D'Alembert, Maclaurin y Euler. Pero lo que es importante es que Cauchy tradujo tales afirmaciones poco rigurosas al lenguaje exacto de las desigualdades cuando las necesitó en sus pruebas. Por ejemplo para la derivada [2]:

(1) Sean δ, ε dos números muy pequeños; el primero se escoge de tal forma que para todos los valores numéricos [es decir, absolutos] de h menores que δ, y para todo valor de x incluído [en el intervalo de definición], el cociente $(f(x+h) - f(x))/h$ siempre será más grande que $f(x) - \varepsilon$ y menor que $f(x)+\varepsilon$.

Este solo ejemplo basta para indicar la forma como Cauchy trabajaba el cálculo, ya que el objetivo de este artículo no es analizar «¿cómo está construida una prueba rigurosa delta-épsilon?» Como herederos intelectuales de Cauchy todos conocemos esto. La pregunta central es ¿cómo y por qué estaba Cauchy preparado para poner el cálculo en un contexto riguroso, y sus predecesores no? Las respuestas a esta pregunta histórica no pueden encontrarse reflexionando sobre las relaciones lógicas entre los conceptos, sino buscando minuciosamente en el pasado y observando cómo el estado actual de cosas se desarrolló a partir de ese pasado. Así pues, examinaremos la situación matemática en los siglos XVII y XVIII, fondo sobre el cual podremos apreciar las innovaciones de Cauchy. Describiremos el poder de las técnicas del cálculo en este temprano período y los enfoques relativamente sin importancia dados para justificarlas. Discutiremos entonces cómo gradualmente en el siglo XVIII se desarrolló una especie de sentimiento de urgencia de hacer riguroso el estudio del análisis. Más importante aún, explicaremos el desarrollo de las técnicas matemáticas necesarias para el nuevo rigor a partir de los trabajos de hombres como Euler, D'Alembert, Poisson, y especialmente Lagrange. Finalmente, mostraremos cómo estos resultados matemáticos, a menudo desarrollados para propósitos distintos de los de establecer los fundamentos para el cálculo, fueron usados por Cauchy para construir su nuevo análisis riguroso.

La práctica del análisis: de Newton a Euler

A finales del siglo XVII Newton y Leibniz, casi al mismo tiempo pero indedependientemente, inventaron el cálculo. Este invento comprendía tres cosas:

Primero, crearon los conceptos generales de cociente diferencial e integral (estos son términos de Leibniz; Newton los llamaba «fluxión» y «fluente»). Segundo, idearon una notación para estos conceptos que hizo del cálculo un algoritmo: los métodos no solamente trabajaban, sino que eran fáciles de usar. Sus notaciones tenían gran poder heurístico, y aún hoy se usan las notaciones dy/dx e $\int y\, dx$ de Leibniz, y $\dot{x}$ de Newton. Tercero, ambos hombres encontraron que los procesos básicos de encontrar tangentes y áreas, es decir, la diferenciación y la integración, son mutuamente inversos -lo que hoy conocemos como el Teorema Fundamental del Cálculo-.

Una vez inventado el cálculo, los matemáticos poseyeron un conjunto sumamente poderoso de métodos para resolver problemas en geometría, en física y en análisis puro. Pero, ¿cuál era la naturaleza de los conceptos básicos? Para Leibniz, el cociente diferencial era un cociente de diferencias infinitesimales. Para Newton, la derivada, era descrita como una razón de cambio; la integral era su inversa. En realidad, en el siglo XVIII la integral se concebía como la inversa de la diferencial. Uno puede imaginarse preguntándole a Leibniz qué era exactamente un infinitesimal, o a Newton qué era una razón de cambio. La respuesta de Newton, la mejor del siglo XVIII, es instructiva. Considérese un cociente de cantidades finitas (en notación moderna, $(f(x+h) - f(x))/h$) cuando h va a cero). El cociente eventualmente llega a ser lo que Newton llamaba un «cociente último». Los cocientes últimos son «límites a los cuales los cocientes de cantidades que decrecen sin límites siempre convergen, y a los cuales ellos se aproximan más cerca que cualquier diferencia dada, pero nunca van más allá, ni los alcanzan jamás hasta que las cantidades desaparezcan» [3]. Excepto por el «alcanzar» el límite cuando las cantidades desaparecen, podemos traducir las palabras de Newton a nuestro lenguaje algebraico. Newton, sin embargo, no lo hizo, ni tampoco la mayoría de sus seguidores en el siglo XVIII. Más aún, el «nunca van más allá» no permite a una variable oscilar alrededor de su límite. Así, aunque la definición de Newton es intuitivamente agradable, tal y como está establecida no fue usada ni podía usarse para pruebas acerca de límites. La definición parece buena, pero no fue entendida ni aplicada en términos algebraicos.

Pero la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII objetarían: «¿Por qué preocuparse acerca de los fundamentos?» En el siglo XVIII el cálculo, intuitivamente entendido y algorítmicamente ejecutado, fue aplicado a gran cantidad de problemas. Por ejemplo, fue resuelta la ecuación diferencial parcial para las vibraciones de una cuerda; fueron resueltas las ecuaciones del movimiento del sistema solar; la transformada de Laplace, el cálculo de variaciones y la función gamma fueron inventados y aplicados; toda la mecánica fue resuelta en el lenguaje del cálculo. Estas constituyeron grandes realizaciones de los matemáticos del siglo XVIII. ¿Quién podría estar realmente interesado por los fundamentos cuando tan importantes problemas eran éxitosamente tratados por el cálculo? Lo que importaba eran los resultados.

Este punto será mejor apreciado mirando un ejemplo que ilustra tanto la «falta de sentido crítico» en los conceptos del siglo XVIII como el inmenso poder de las técnicas del mismo, tomado del trabajo del gran maestro de tales técnicas: Leonhard Euler*.

El problema es encontrar la suma de la serie

$$1/1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/k^2 + \dots$$

Claramente tiene una suma finita ya que es acotada superiormente por la serie

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(k\text{-}1)\ k} + \dots,$$

cuya suma se sabe es 2; Johann Bernoulli había encontrado esta suma tratando $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$ como la diferencia entre las series $1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ y la serie $1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ y observando que la diferencia es telescópica [4].

La suma de Euler de $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ hace uso de un lema de la teoría de ecuaciones: dada una ecuación polinómica cuyo término constante es uno, el coeficiente del término lineal es la suma de los recíprocos de las raíces con los signos cambiados. Este resultado había sido descubierto y demostrado considerando la ecuación $(x\text{-}a)\,(x\text{-}b) = 0$, de raíces a y b. Multiplicando y luego dividiendo por ab, obtenemos

$$(1/ab)x^2 - (1/a + 1/b)x + 1 = 0;$$

el resultado es ahora obvio, así como la extensión a ecuaciones de mayor grado.

La solución de Euler considera entonces la ecuación $\operatorname{sen}x = 0$.

Expandiendo ésta como una serie infinita, Euler obtuvo:

$$x - x^3/3! + x^5/5! - \dots = 0.$$

Dividiendo por x,

$$1 - x^2/3! + x^4/5! - \dots = 0.$$

* Suizo (1707-1783).

Finalmente, la sustitución $x^2 = u$ produce

$$1 - u/3! + u^2/5! - ... = 0.$$

Pero Euler pensaba que las series de potencias podían ser manipuladas como polinomios. Así, tenemos una ecuación polinómica en u, cuyo término constante es uno. Aplicando el lema, el coeficiente del término lineal con el signo cambiado es $1/3! = 1/6$. Las raíces de la ecuación en u son las raíces de sen x con la sustitución $u = x^2$, concretamente $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, ...$. Luego el lema implica

$$1/6 = 1/\pi^2 + 1/4\pi^2 + 1/9\pi^2 + ...$$

Multiplicando por π^2 se obtiene la suma de la serie original [5]:

$$1/1 + 1/4 + 1/9 + ... + 1/k^2 + ... = \pi^2/6.$$

Aunque es fácil criticar los argumentos del siglo XVIII como éste por su falta de rigor, es también injusto. Los fundamentos, las especificaciones precisas de las condiciones bajo las cuales las manipulaciones con infinitos o infinitesimales eran admisibles, no eran muy importantes para hombres como Euler, ya que sin tales especificaciones hicieron importantes nuevos descubrimientos, cuyos resultados en casos como éste podrían ser verificados sin mayor esfuerzo. Cuando en el siglo XVIII se discutían los fundamentos del cálculo, se pensaba que se trataba de cosas secundarias. Esas discusiones sobre fundamentos aparecían en las introducciones de libros, en popularizaciones y en escritos filosóficos, pero no eran -como son ahora desde los tiempos de Cauchy- el objeto de artículos de revistas orientadas a la investigación.

Así, donde teníamos una pregunta para responder, ahora tenemos dos. La primera sigue siendo: ¿De dónde provienen las técnicas rigurosas de Cauchy? Como segunda deberíamos interrogarnos: ¿Por qué es importante dar rigor al cálculo? Si pocos matemáticos en el siglo XVIII estaban realmente interesados en los fundamentos [6], entonces, ¿cuándo, y por qué, cambiaron las actitudes?

Naturalmente, para exigir rigor es necesario -aunque no suficiente- pensar que el rigor es significativo. Pero más importante, para establecer rigor es necesario (aunque tampoco suficiente) la existencia de un conjunto de técnicas apropiadas para tal propósito. En particular, si se quiere dar rigor al cálculo reduciéndolo al álgebra de desigualdades, se debe contar tanto con el álgebra de desigualdades, como con conceptos del cálculo expresables en términos del álgebra de desigualdades.

A principios del siglo XIX por primera vez se contaba con las siguientes tres condiciones: el rigor era considerado importante; había un buen desarrollo del álgebra de desigualdades; y se conocían ciertas propiedades acerca de los conceptos básicos del análisis -límites, convergencia, continuidad, derivadas, integrales- expresables en el lenguaje de las desigualdades si se deseaba. Cauchy, seguido por Riemann* y Weierstrass**, dieron una base rigurosa al cálculo usando la ya existente álgebra de desigualdades, y construyeron una estructura lógicamente encadenada de teoremas acerca de los conceptos del cálculo. Es nuestra tarea explicar cómo estas tres condiciones -la desarrollada álgebra de desigualdades, la importancia del rigor, las adecuadas propiedades acerca de los conceptos del cálculo- llegaron a existir.

El Algebra de Desigualdades:

Hoy día el álgebra de desigualdades se estudia en los cursos de cálculo porque se usa en su fundamentación; pero, ¿para qué estudiarla en el siglo XVIII, cuando esta aplicación era desconocida? En el siglo XVIII las desigualdades eran de interés en el estudio de una clase importante de resultados: las aproximaciones. Por ejemplo, considérese una ecuación tal como $(x + 1)^{\mu} = a$, para μ no entero. Normalmente a no puede ser encontrada exactamente, pero puede ser aproximada por una serie infinita. En general, dados n términos de una serie de aproximación, los matemáticos del siglo XVIII buscaban calcular una cota superior del error en la aproximación -es decir, la diferencia entre la suma de la serie y la suma parcial n-ésima. Este cálculo era un problema de álgebra de desigualdades. Jean d'Alembert lo resolvió para la serie binomial; dados n términos de la serie y asumiendo implícitamente que la serie converge, encontrada las cotas del error -es decir, el resto de la serie después del n-ésimo término- acotando la serie arriba y abajo con progresiones geométricas convergentes [7]. Asimismo Joseph-Louis Lagrange inventó un nuevo método de aproximación usando fracciones continuas y, por cálculos de desigualdades extremadamente complicados, estableció condiciones necesarias y suficientes para que una iteración dé una mejor aproximación que la iteración previa [8]. Lagrange*** también dedujo el residuo de Lagrange de las series de Taylor [9], usando una desigualdad que acotaba el residuo por encima y por debajo con los valores máximo y mínimo de la n-ésima derivada respectivamente y luego aplicando el teorema del valor intermedio para funciones continuas. De esta manera, gracias al trabajo realizado en el transcurso del siglo XVIII [10] se contaba a finales del mismo con un álgebra desarrollada y de uso corriente. Dado un n, era normal encontrar un error -es decir, un épsilon-.

* GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN, alemán (1826-1866).

** KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS, aleman (1815-1897).

*** JOSEPH LOUIS LAGRANGE, italo-francés (1736-1813).

Cambios de posición respecto al rigor:

Los matemáticos estaban mucho más interesados en encontrar fundamentos rigurosos para el cálculo en 1800 que lo que habían estado cien años antes.

Hay muchas razones para esto: ninguna suficiente por sí misma, pero fácilmente aceptables en conjunto. Naturalmente podría pensarse que los matemáticos del siglo XVIII estaban siempre cometiendo errores por la ausencia de fundamentos rigurosos explícitamente formulados. Pero esto no ocurrió. Estaban generalmente en lo correcto, y por dos razones. Una es que cuando se trabaja con variables reales, funciones de una variable, series de potencias y funciones que se originan de problemas físicos, los errores no ocurren muy frecuentemente. La otra es que los matemáticos como Euler y Laplace tenían un profundo conocimiento de la estructura interna de las propiedades básicas de los conceptos del cálculo, y eran capaces de escoger métodos fructíferos y evadir los peligrosos. El único «error» que cometieron fue el usar métodos que desagradaban a los matemáticos de épocas posteriores, quienes fueron educados bajo las pautas de rigor del siglo XIX.

¿Cuáles fueron entonces las razones para ese obsesivo interés en el rigor? Un conjunto de razones era filosófico. En 1734, el filósofo y obispo británico Berkeley* había atacado el cálculo con el argumento de que no era riguroso. En *The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician,*** decía que los matemáticos no tenían derecho de atacar la irracionalidad de la religión, dada la forma como ellos mismos razonaban. Ridiculizó las fluxiones -«velocidades de incrementos evanescentes»- llamando esos incrementos evanescentes «fantasmas de cantidades difuntas» [11]. Aún más, criticaba en forma correcta algunos de los argumentos usados en los escritos de sus contemporáneos matemáticos. Por ejemplo, atacó el proceso de encontrar la fluxión (nuestra derivada) repasando los pasos del proceso: si consideramos $y=x^2$, haciendo el cociente de diferencias $((x+h)^2 - x^2)/h$, luego simplificando a $2x+h$, luego anulando h, obtenemos $2x$. Pero, ¿es h cero?. Si lo es, no tiene sentido dividir por él; si no es cero, no tenemos derecho a despreciarlo. Como Berkeley decía, la cantidad que nosotros llamamos h «debe significar bien un incremento o nada. Ahora bien, sin importar cuál de los dos significados se le dé, se debe argumentar consistentemente con dicho significado» [2].

Como una respuesta a las objeciones de Berkeley habría supuesto el reconocer que una ecuación con límites es una abreviatura para una sucesión de desigualdades -una sutil y difícil idea-, ningún analista del siglo XVIII

---

* GEORGE BERKELEY (1685-1753).

** Existe traducción castellana: véase *El analista*, en el primer volumen de EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS, de James R. Newman, pág. 214-219. Ediciones Grijalbo S.A., Barcelona, 1983 (N. del E.).

dio una respuesta enteramente adecuada a Berkeley. Sin embargo, muchos intentaron. Maclaurin*, d'Alembert**, Lagrange, Lazare Carnot***, y posiblemente Euler, todos conocieron acerca del trabajo de Berkeley, y todos escribieron algo sobre los fundamentos. Lo que muestra que el llamado de atención de Berkeley fue oído. Sin embargo, excepto Maclaurin, ningún matemático de primera línea gastó mucho tiempo en las preguntas planteadas a raíz de los trabajos de Berkeley, e incluso la influencia de Maclaurin está en otros campos.

Otro factor contribuyente al nuevo interés en el rigor era que había un límite al número de resultados que podían ser obtenidos con los métodos del siglo XVIII. Cerca del final del siglo, algunos matemáticos destacados habían empezado a sentir que este límite estaba bien próximo. D'Alembert y Lagrange lo indicaron en su correspondencia, hablando Lagrange de matemáticas superiores «en decadencia» [13]. El filósofo Diderot fue más lejos al afirmar que los matemáticos del siglo XVIII habían «erigido las columnas de Hércules», más allá de las cuales era imposible ir [14]. Había pues, una sentida necesidad de consolidar las ganancias del siglo pasado.

Otro «factor» fue Lagrange, quien llegó a interesarse enormemente en los fundamentos y, a través de sus actividades, interesó a otros matemáticos. En el siglo XVIII, academias científicas ofrecían premios por resolver problemas importantes. En 1784, Lagrange y sus colegas propusieron el problema de los fundamentos del cálculo como el problema de concurso de la Academia de Berlín. Nadie lo resolvió a satisfacción de Lagrange, pero dos de los trabajos en competencia fueron posteriormente ampliados a libros, los primeros en el Continente, sobre fundamentos: el de Simón LHuilier****, *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Berlín, 1787, y el de Lazare Carnot, *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, París, 1797. De esta manera, Lagrange claramente ayudó a revivir interés en el problema.

El interés de Lagrange se derivaba en parte de su respeto por el poder y la generalidad del álgebra; él quería ganar para el cálculo la certeza que creía que poseía el álgebra. Pero había otro factor que aumentaba el interés en los fundamentos, no solamente en Lagrange, sino en muchos otros matemáticos a finales del siglo XVIII: la necesidad de enseñar. La enseñanza obliga a poner atención a las preguntas básicas. Antes de mediados del siglo dieciocho, los matemáticos con frecuencia habían vivido vinculados a las cortes reales. Pero las cortes reales declinaban; el número de matemáticos aumentaba; y

* COLIN MACLAURIN, escocés (1698-1746).

** JEAN-LE-ROND d'ALEMBERT, francés (1717-1783).

*** LAZARE NICOLAS MARGUERITE CARNOT, francés (1753-1823).

**** Francés (1750-1840).

las matemáticas empezaban a ser consideradas útiles. Inicialmente en las escuelas militares y más tarde en la Ecole Polytechnique en París, otra línea de trabajo se hizo posible: la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de ciencias e ingeniería. La Ecole Polytechnique fue fundada por el gobierno revolucionario francés para preparar científicos, los cuales -el gobierno pensaba- debían ser útiles en un estado moderno. Siendo precisamente catedrático de análisis en la Ecole Polytechnique escribió Lagrange sus dos más importantes trabajos de cálculo que trataban de fundamentos; es de anotar que 40 años antes, enseñando el cálculo en la Academia Militar de Turín, Lagrange había iniciado sus trabajos sobre el problema de los fundamentos. Puesto que el enseñar lo lleva a uno a formular preguntas básicas sobre la naturaleza de los conceptos más importantes, el cambio en las circunstancias económicas de los matemáticos -la necesidad de enseñar- proporcionó un catalizador para la cristalización de los fundamentos del cálculo, además de los antecedentes históricos y matemáticos. En efecto, inclusive ya adentrado el siglo XIX, muchos de los fundamentos nacieron de las enseñanza; los fundamentos de Weierstrass provienen de sus clases en Berlín; Dedekind* inició sus trabajos sobre la continuidad mientras enseñaba en Zurich; Dini** y Landau*** se interesaron en los fundamentos siendo profesores de análisis; y lo más importante para nuestros propósitos, es ése también el caso de Cauchy. Los fundamentos de Cauchy para el análisis aparecen en los libros basados en sus clases en la Ecole Polytechnique; su libro de 1821 fue el primer ejemplo de la gran tradición francesa de los *Cours d'analyse.*

Los conceptos del cálculo

Surgida del álgebra, el álgebra de desigualdades estaba lista para reducir el cálculo a ella; el deseo de hacer el cálculo riguroso se había desarrollado gracias a su consolidación, gracias a la filosofía, gracias a la enseñanza, gracias a Lagrange. Ahora dirijámonos a la esencia matemática del análisis del siglo XVIII, para ver qué era conocido de los conceptos del cálculo antes de Cauchy, y lo que él tuvo que trabajar por sí mismo para definir y probar teoremas acerca de límites, convergencia, continuidad, derivadas e integrales.

Primero consideraremos el concepto de límite. Como ya lo hemos señalado, desde Newton el límite había sido concebido como una cota a la cual era posible acercarse cada vez más, pero sin sobrepasarla. Hacia 1800, con los trabajos de L'Huilier y Lacroix sobre series alternadas, la restricción del límite por un solo lado había sido abandonada. Cauchy tradujo sistemáticamente este refinado concepto del límite al álgebra de desigualdades, y lo usó en pruebas una vez había sido así traducido; de esta manera hizo realidad

---

* RICHARD DEDEKIND, alemán (1831-1916).

** ULISE DINI, italiano (1845-1918).

*** EDMUND LANDAU, alemán (1877-1938).

la muy repetida conjetura del siglo XVIII de que el cálculo podría estar basado en los límites.

Por ejemplo, considérese el concepto de convergencia. Maclaurin ya había dicho que la suma de una serie era el límite de las sumas parciales. Para Cauchy, esto significaba algo preciso. Significaba que, dado un ε, se podía encontrar n tal que, para más de n términos, la suma de la serie infinita está a menos de ε de la n-ésima suma parcial. Esto es el recíproco del procedimiento de estimación del error que d'Alembert había utilizado. De su definición de series que tienen suma, Cauchy probaría que una progresión geométrica con razón menor que 1 en valor absoluto convergía a su suma usual. Como ya lo dijimos, d'Alembert había demostrado que la serie binomial para, digamos $(1 + x)^{p/q}$, estaba acotada por encima y por debajo por progresiones geométricas convergentes. Cauchy asumió que si una serie de términos positivos está acotada superiormente, término a término; por una progresión geométrica convergente, entonces también converge; usó entonces tales comparaciones para probar ciertos criterios de convergencia: el criterio de la raíz, el criterio del cociente, el criterio del logaritmo. El tratamiento es muy elegante [15]. Trasladando una técnica usada algunas veces por personas como d'Alembert y Lagrange a un procedimiento ad hoc cimentado en aproximaciones, y usando la definición de la suma de una serie basada en el concepto de límite, Cauchy creó la primera teoría rigurosa de convergencia.

Vamos ahora al concepto de continuidad. Cauchy dio esencialmente la definición moderna de función continua, diciendo que la función $f(x)$ es continua en un intervalo dado si para cada x en ese intervalo «el valor numérico [es decir, el valor absoluto] de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con α» [16]. Usó esta definición para probar el teorema del valor intermedio para funciones continuas [17]. La prueba se desarrollaba examinando una función $f(x)$ en un intervalo, digamos $[b, c]$, donde $f(b)$ es negativo y $f(c)$ positivo, y dividiendo el intervalo $[b, c]$ en m partes de longitud $h = (c - b)/m$. Cauchy consideraba el signo de la función en los puntos $f(b)$, $f(b + h)$,... $f(b + (m - 1)h)$, $f(c)$; a menos que uno de los valores de f sea cero, hay dos valores de x que difieren en h tal que f es negativo en uno, y positivo en el otro. Repitiendo este proceso para nuevos intervalos de longitud $(c - b)/m$, $(c - b)/m^2$,..., da una sucesión creciente de valores de x: b, b_1 , b_2 , ... para los cuales f es negativo, y una sucesión decreciente de valores de x : c, c_1, c_2,... para los cuales f es positivo, y tal que la diferencia entre b_k y c_k va a cero. Cauchy afirmaba que estas dos sucesiones deben tener un límite común a. Entonces argumentaba que como $f(x)$ es continua, las sucesiones de valores negativos $f(b_k)$ y de valores positivo $f(c_k)$ convergen ambas hacia el límite común $f(a)$, el cual debe ser por lo tanto cero.

La prueba de Cauchy utiliza una técnica ya existente, que Lagrange había aplicado para aproximar raíces reales de ecuaciones polinómicas. Si un polinomio era negativo para un valor de la variable, positivo para otro, había una raíz entre los dos, y la diferencia entre esos dos valores de la variable acotaba el error cometido tomando cualquiera como una aproximación a la raíz [18]. Así otra vez el algebra de desigualdades suministra una técnica que Cauchy transformó de una herramienta de aproximación en una herramienta de rigor.

Vale la pena señalar en este punto que Cauchy, tanto en su tratamiento de la convergencia como de la continuidad, asumía implícitamente varias formas de la propiedad de completez de los números reales. Por ejemplo, consideraba como obvio que una serie de términos positivos, acotada superiormente por una progresión geométrica convergente, converge; igualmente, su prueba del teorema del valor intermedio asume que una sucesión monótona acotada tiene un límite. A pesar de que Cauchy fue el primero en explotar sistemá ticamente las desigualdades para probar teoremas en análisis,no identificó todas las suposiciones implícitas acerca de los números reales que las técnicas con desigualdades incluían. Similarmente, como ya el lector podría haber notado, la definición de Cauchy de funciones continuas no distingue entre lo que ahora llamamos continuidad puntual y continuidad uniforme; tampoco en el tratamiento de series de funciones Cauchy distinguía entre convergencia puntual y uniforme. Las formulaciones verbales como «para todo» no diferenciaban entre «para cualquier épsilon y para todo x» y «para cualquier x, dado cualquier épsilon» [19]. No era muy claro en los años de 1820 cuánto dependía de esta distinción, dado que las pruebas acerca de continuidad y convergencia eran de por sí muy nuevas. Veremos la misma confusión entre convergencia puntual y uniforme al analizar la teoría de Cauchy sobre la derivada.

Empezamos de nuevo con una aproximación. Lagrange dio la siguiente desigualdad para la derivada:

(2) $$f(x + h) = f(x) + hf(x) + hV,$$

donde V va a cero cuando h va a cero. El interpretaba (2) diciendo que, dado cualquier D, se puede encontrar h suficientemente pequeño tal que V esté entre -D y +D [·:·]. Claramente esto es equivalente a (1), la caracterización de delta-épsilon de Cauchy para la derivada. Pero, ¿cómo obtuvo Lagrange este resultado? La respuesta es sorprendente; para Lagrange, la fórmula (2) era una consecuencia del teorema de Tylor*. Lagrange creía que cualquier función (es decir, cualquier expresión analítica, sea finita o infinita en una sola variable) tenía una única expansión en serie de potencias (excepto posiblemente en un número finito de puntos aislados). Esto, porque el creía que había «álgebra de series infinitas», un álgebra ejemplificada por los trabajos de Euler tales como el ejemplo que dimos antes. Y Lagrange decía que el camino para hacer el cálculo riguroso era reduciéndolo al álgebra. Aunque

* BROOK TAYLOR, inglés (1685-1731)

no hay un «álgebra» de series infinitas que dé expansiones en series de potencias sin ninguna consideración de convergencia y de límites, esta hipótesis condujo a Lagrange a definir $f'(x)$ sin refrencia a límites, como el coeficiente del término lineal en h en la serie de Taylor de $f(x + h)$. Siguiendo a Euler, Lagrange entonces decía que, para cualquier serie de potencias en h, se podía tomar h suficientemente pequeño para que cualquier término de la serie excediera la suma de todo el resto de términos que lo seguían; esta aproximación, decía Lagrange, es asumida en aplicaciones del cálculo a la geometría y la mecánica [21]. Aplicando esta aproximación al término lineal en la serie de Taylor se obtiene (2), que yo llamo la propiedad de Lagrange de la derivada. (Como en (1) de Cauchy, la interpretación que Lagrange da para (2) asume que, dado cualquier D, se encuentra h suficientemente pequeño tal que $|V| \leqslant D$ sin ninguna mención de x).

Lagrange no solamente estableció la propiedad (2) y las desigualdades asociadas, sino que las usó como base para probar algunos resultados acerca de derivadas: por ejemplo, para probar que una función con derivada positiva es creciente, para probar el teorema del valor medio para derivadas y para obtener el residuo de Lagrange en las series de Taylor. (Los detalles pueden ser encontrados en los trabajos citados en [22]). Lagrange también aplicó sus resultados para caracterizar las propiedades de máximos y mínimos y los órdenes de contacto entre curvas.

Con unas pocas modificaciones, las pruebas de Lagrange son válidas, siempre y cuando la propiedad (2) pueda ser justificada. Cauchy retomó y simplificó las pruebas de Lagrange con desigualdades, mejorándolas y basándolas en su propia ecuación (1). Pero Cauchy legitimó estas pruebas puesto que definió la derivada con la precisión requerida para satisfacer las desigualdades pertinentes. Una vez más, las propiedades claves provienen de una aproximación. Para Lagrange, la derivada era *exactamente* -sin necesidad de épsilones- el coeficiente del término lineal en las series de Taylor; la fórmula (2) y la desigualdad correspondiente de que $f(x + h) - f(x)$ está en $h(f'(x) \pm D)$, eran aproximaciones. Cauchy reúne las propiedades de las desigualdades de Lagrange y sus demostraciones junto con una definición de derivada diseñada para hacer de esas técnicas algo rigurosamente fundamentado [22].

El último de los conceptos que consideraremos, la integral, siguió un desarrollo análogo. En el siglo XVIII, la integral era usualmente concebida como la inversa de la diferencial. Pero algunas veces el inverso no podía ser calculado exactamente, por lo cual autores como Euler puntualizaron que la integral podía aproximarse tanto como se quisiera por una suma. Es claro que la figura geométrica de un área siendo aproximada por rectángulos, o la definición de Leibniz de la integral como una suma, sugieren esto inmediatamente. Pero lo que es importante para nuestros propósitos es que en el siglo XVIII la mayoría del trabajo fue hecho aproximando los valores de integrales definidas, incluyendo consideraciones sobre qué tan pequeños debían ser los subintervalos usados en las sumas dependiendo de la mayor o menor oscilación de las funciones. Por ejemplo, Euler utilizó sumas de la forma $\sum_{k=0}^{n} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ como aproximaciones a la integral $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ [23].

En 1820, S.D. Poisson*, quien estaba interesado en integración compleja y por consiguiente más preocupado que muchos otros acerca de la existencia y comportamiento de las integrales, planteó el siguiente problema. Si la integral F es definida como la antederivada de f, y si $b - a = nh$, ¿puede ser demostrado que $F(b) - F(a) =$

$$S = hf(a) + hf(a + h) + \dots + hf(a + (n - 1)h)$$

cuando h se hace pequeño? (S es una suma aproximada al estilo del siglo XVIII). Poisson llamó este resultado «la proposición fundamental de la teoría de las integrales definidas». El lo probó utilizando otro resultado de desigualdades: las series de taylor con resto. Inicialmente expresó F(b) - F(a) como la suma telescópica

$$F(a+h) - F(a) + F(a+2h) - F(a+h) + \dots + F(b) - F(a+(n-1)h). \quad (3)$$

Luego, basándose en la serie de Taylor con resto da, puesto que por definición $F = f$,

$$F(a+kh) - F(a+(k-1)h) = hf(a+(k-1)h) + R_k h^{1+w},$$

donde $w > 0$, para algún R_k. Entonces la suma telescópica (3) se convierte en:

$$hf(a) + hf(a+h) + \dots + hf(a+(n-1)h) + (R_1 + \dots + R_n) h^{1+w}.$$

Así, F(b) - F(a) y la suma S difieren por $(R_1 + \dots + R_n) h^{1+w}$. Sea R el maximo valor de los R_k.

$$(R_1 + \dots + R_n) h^{1+w} \leqslant nR(h^{1+w}) = R.nh.h^w = R(b-a) h^w.$$

Por lo tanto, si h se toma suficientemente pequeño, F(b) - F(a) difiere de S tan poco como se quiera [24].

Poisson fue el primero que intentó probar la equivalencia antre la antiderivada y la concepción de la integral como un límite de sumas. Sin embargo,

* SIMEON DENIS POISSON, francés (1781-1840).

Junto a las hipótesis implícitas de la existencia de antiderivadas y primeras derivadas acotadas para f en el intervalo dado, la prueba supone que los subintervalos en los cuales se toma la suma son todos iguales. ¿Se dará el resultado para divisiones desiguales? Poisson así lo pensaba, y lo justificaba diciendo: «Si la integral es representada por el área de una curva, esta área debe ser la misma si dividimos la diferencia... en un número infinito de partes desiguales siguiendo cualquier ley» [25]. Esto, sin embargo, es una afirmación, no una demostración. Y Cauchy vislumbró que una prueba era necesaria.

A Cauchy no le gustaban los argumentos formalísticos en cuestiones que se suponen rigurosas, diciendo que la mayoría de las fórmulas algebraicas cumplen «solamente bajo ciertas condiciones, y para ciertos valores de las cantidades que ellas contienen» [26]. En particular, no se puede pensar que lo que es válido para expresiones finitas automáticamente sea válido paa las infinitas. Así, Cauchy demostró que la suma de la serie $1/1 + 1/4 + 1/9 + \ldots$ era $\pi^2/6$ calculando la diferencia entre la n-ésima suma parcial y $\pi^2/6$ y demostrando que era arbitrariamente pequeña [27]. Similarmente, el hecho de que hubiera una operación llamada derivada, no significa que la inversa de esa operación siempre producía un resultado. La existencia de la integral definida tenía que ser probada. ¿Y cómo se prueba existencia en los años 1820? Se construye el objeto matemático en cuestión usando una aproximación tipo siglo XVIII que converja a él. Cauchy definió la integral como el límite de sumas estilo Euler $\Sigma\ f(x_k)\ (x_{k+1} - x_k)$ para $x_{k+1} - x_k$ suficientemente pequeño. Asumiendo explícitamente que $f(x)$ era continua en el intervalo dado (e implícitamente que era uniformemente continua) Cauchy pudo demostrar que todas las sumas de esa forma se aproximan a un valor fijo, llamado por definición la integral de la función en ese intervalo. Esta es una demostración extremadamente complicada [28]. Finalmente, tomando de Lagrange el teorema del valor medio para integrales, Cauchy demostró el Teorema Fundamental del Cálculo [29].

Conclusión

Aquí están todas las piezas del rompecabezas que originalmente nos propusimos resolver. Las aproximaciones algebraicas produjeron el álgebra de desigualdades; las aproximaciones estilo siglo XVIII en el cálculo produjeron las útiles propiedades de los conceptos del análisis: las cotas de error de dAlembert para las series, las desigualdades de Lagrange respecto a las derivadas, las aproximaciones de Euler a las integrales. Había un nuevo interés en los fundamentos. Todo lo que se necesitaba era un genio suficientemente grande para construir los nuevos fundamentos.

Dos hombres casi lo logran. En 1816, Carl Friedrich Gauss* dio un tratamiento ri uroso de la convergencia de la serie hipergeométrica, usando la técnica de comparar una serie con progresiones geométricas convergentes; sin embargo, Gauss no dio un fundamento general para todo el análisis. Bernhard Bolzano**, cuyo trabajo era poco conocido hasta los años de 1860, respondiendo al llamado de Lagrange para reducir el cálculo al álgebra, dio en 1817 una definición de función continua como la de Cauchy y luego probó -por una técnica diferente de la de Cauchy- el teorema del valor intermedio [30]. Pero fue Cauchy quien dio las definiciones rigurosas y las demostraciones para todos los conceptos básicos; fue él quien entendió el poderoso alcance del concepto de límite basado en desigualdades; y fue él quien nos dio -excetpo por unas pocas hipótesis implícitas acerca de la uniformidad y de la completez- el planteamiento riguroso moderno del cálculo.

Los matemáticos están acostumbrados a tomar los fundamentos rigurosos del cálculo como un todo completo. Lo que he tratado de hacer como historiadora es revelar qué fue lo que sucedió mientras se configuraba ese gran logro. Y esto hay que hacerlo porque -por su misma naturaleza- un todo enteramente terminado no puede revelar los hilos separados que lo tejen, especialmente cuando esos hilos han sido considerablemente transformados. Es verdad sí que en el trabajo de Cauchy quedó, no obstante, una huella de las aproximacines como origen del cálculo riguroso: la letra épsilon. El ε corresponde a la letra inicial de la palabra «erreur» (o «error», y, en efecto, Cauchy utilizaba ε para «error» en algunos de sus trabajos acerca de probabilidades [31]. Es tan divertido como históricamente cierto que el «ε», usado antiguamente para designar el «error» en las aproximaciones, se convirtió en el símbolo característico de la precisión y el rigor en el cálculo. Así como Cauchy transformó el álgebra de desigualdades de un instrumento de aproximación en uno de rigor, así mismo hizo del cálculo como método poderoso de generar resultados la severa disciplina que hoy conocemos.

REFERENCIAS

[1] CAUCHY, A.L. Cours d'analyse, Paris, 1821; en Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, series 2, vol. 3, París, Gauthier-Villars, 1899, p. 19.

[2] CAUCHY, A.L. Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitesimal. Paris, 1823: in Oeuvres, series 2, vol. 4, p. 44.

[3] NEWTON, I. Mathematical Principles of Natural Philosophy, 3rd ed. 1726, tr. A. Motte, revised by Florian Cajori. University of California Press, Berkely, 1934. Scholium to Lema XI, p. 39.

* Alemán (1777-1855).

** Checo (1781-1848).

[4] BERNOULLI, J. Opera Omnia, IV. 8.

[5] BOYER. History of Mathematics. p. 487.

[6] GRABINER, J.V. The Origins of Cauchy' s Rigourus Calculus, M. I. T. Press, Cambridge and London, 1981, chapter 2.

[7] D'ALEMBERT, J. Réflexions sus les suites et sur les racines imaginaires, in Opuscules mathématiques, Vol. 5, Briasson, París, 1768, pp. 171-215.

[8] LAGRANGE, J.L. Traité de la résolution des equations numériques de tous le degrés, 2nd ed., Courcier, París, 1808.

[9] LAGRANGE. Théorie des fonctions analytiques, 2nd ed., París, 1813.

[10] GRABINER. Origins of Cauchy's Rigorous Calculus, pp. 56-68.

[11] BERKELEY, G. The Analyst, section 35.

[12] Analyst, section 15.

[13] Carta de Lagrange a d'Alembert, 24 febrero 1772.

[14] DIDEROT, D. De l'interprétation de la nature, in Oeuvres philosophiques, ed., P. Vernière, Garnier, Paris, 1961, pp. 180-181.

[15] CAUCHY. Cours d'analyse, Oeuvres, series 2, Vol. 3.

[17] CAUCHY, op. cit. pp. 378-380.

[18] LAGRANGE. Equations numériques, sections 2 and 6, in Oeuvres, Vol. 8.

[19] I. GRATTAN-GUINNESS. Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann, M.I.T. Press, Cambridge and London, 1970.

[20] LAGRANGE. Leçons sur le calcul des fonc tions, Oeuvres 10, p. 87.

[21] LAGRANGE. Théorie des fonctions analytiques, Oeuvres 9, p. 29.

[22] GRABINER. Origins of Cauchy's Rigorous Calculus, chapter 5.

[23] EULER. Institutiones calculi integralis. St. Peterburg, 1768-1770, 3 vols.

[24] POISSON, S.D. Suite du memoire sur les integrales définies, Journ.de l'Ecole polytechnique, Cah. 18, 11, 1820, pp. 295-341, 319-323.

[25] POISSON, op. cit., pp. 329-330.

[26] CAUCHY. Cours d'analyse. Introduction, Oeuvres, Series 2, Vol. 3, p. iii.

[27] CAUCHY. Cours d'analyse, Note VIII, Oeuvres, series 2, Vol. 3, pp. 456-457.

[28] CAUCHY. Calcul infinitésimal, Oeuvres, series 2, Vol. 4, 122-25.

[29] CAUCHY, op. cit. pp. 151-152.

[30] BOLZANO, B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwev Werthen, die ein entgengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege, Prague, 1817.

[31] CAUCHY. Sur la plus grande erreur à craindre dans un resultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimun. Comptes rendus 37, 1853; in Oeuvres, series I, Vol. 12, pp. 114-124.

«Durante mi estadía en Cambridge Russell no sólo me mostró el verdadero significado de la matemática, sino que me convenció de la necesidad de enlazar la matemática con la física».

NORBERT WIENER