Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 4, No. 2, julio-diciembre 1986

Notas de clase: acerca de las curvas

GILDARDO GUZMAN*
BERNARDO MAYORGA**

«Hago constar que el avance más reciente no reside en que el mundo de la Física haya adquirido este carácter de representación de sombras; lo ha tenido siempre desde Demócrito de Abdera e incluso desde antes; no nos dábamos cuenta de ello; creíamos que nos enfrentábamos al mundo mismo; expresiones como modelo o imagen para la construcción conceptual de la ciencia no surgieron, creo, hasta la segunda mitad del siglo XIX».

Erwin Schrödinger [0]

1. En el segundo volumen del conocido texto de cálculo de Apostol [1] aparece en la página 394 la siguiente

«DEFINICION. *Sea* $J = [a, b]$ *un intervalo cerrado finito de* $\mathbb{R}$. *Una función* $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ *continua en* J *se llama camino continuo en el n-espacio. El camino se llama regular si existe la derivada* α' *y es continua en el intervalo abierto* (a,b). *El camino se llama regular a trozos si el intervalo* $[a, b]$ *puede descomponerse en un número finito de subinteralos en cada uno de los cuales el camino es regular*».

* Profesor Asistente, Departamento de Matemáticas UIS.

** Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Y se agrega:

«La figura 10.1 muestra la gráfica de un camino regular a trozos. En este ejemplo la curva tiene recta tangente en todos los puntos

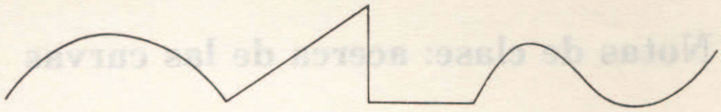

FIGURA 10.1 *Gráfica de un camino regular a trozos en el plano.*

excepto en un número finito de ellos. Esos puntos excepcionales subdividen la curva en arcos, a lo largo de cada uno de los cuales la recta tangente va cambiando de posición con continuidad».

La impresión inmediata que queda del examen del dibujito que se da como ejemplo de un camino regular a trozos, es la de que los picos de la curva señalan precisamente los puntos en que se rompe la regularidad de la misma, mientras que las partes lisas corresponden a los puntos regulares. Veremos que eso no es siempre así, pero antes haremos una digresión concerniente a la terminología.

2. Un examen de los libros de cálculo existentes en el mercado muestra que la mayoría de ellos trabaja por lo general con los conceptos de gráfica y curva sin definirlos explícitamente y confundiéndolos con frecuencia. La situación no mejora mucho al pasar a los textos de análisis, en los cuales aparece además la noción de *camino*, ya que mientras Apóstol ([1], [2]) denomina *camino* la función misma y *curva* la imagen del intervalo por medio de la función, Rudin [3] llama curva a la función y hace énfasis en eso. La misma ambigüedad se presenta en textos de geometría diferencial (ver, por ejemplo, [4], [5] y [6]) y de topología (v.gr. [7], [8] y [9]).

Tratando de unificar criterios por mayoría de preferencias tendríamos las siguientes definiciones:

Definición 1. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y (X, τ) un espacio topológico. Se denomina *camino en el espacio* X cualquier aplicación continua

$$\alpha : [a, b] \to X \qquad \bullet$$

Esta definición coincide con la de [1] si tomamos $X = \mathbb{R}^n$ y en calidad de τ la topología ordinaria en $\mathbb{R}^n$. Así pues, un camino en $\mathbb{R}^n$ será cualquier función continua α: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. En lo que sigue nos referiremos sólo a caminos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2. Se denomina *trayectoria* T del camino α su recorrido, es decir, la imagen del intervalo $[a, b]$ por medio de la función α. De tal suerte, $T(\alpha) = \alpha([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$. El término *curva* se utiliza como sinónimo de trayectoria •

Definición 3. El gráfico (o la gráfica) Γ de un camino α es el conjunto

$$\Gamma(\alpha) = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \mid y = \alpha(x)\} \quad \bullet$$

Por otra parte, en las traducciones castellanas se habla de curvas *suaves* o *lisas* o *regulares** para el caso en que la función (camino) en cuestión tiene derivada continua, pero unas veces se exige que esa derivada sea no nula (como en [4] ó [6]) y otras no (como en [1], [10] y [11]). Los puntos en los cuales se viola la suavidad o regularidad se denominan *singulares*.

Es necesario recalcar aquí que la curva o trayectoria de un camino es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, mientras que su gráfico es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Las definiciones que hemos dado son estrictamente verbales, pero no podemos seguir adelante sin preguntarnos: Y en fin de cuentas, ¿qué es lo que *muestra* la figura 10.1 de Apostol? ¿Una curva? ¿Una gráfica? ¿Un camino? Si nos atenemos rigurosamente a las definiciones formuladas es obvio que no le podemos aplicar ninguno de esos términos. Quizá podríamos decir que se trata de un *modelo físico* o *representación cartesiana* sobre un papel de la curva o trayectoria de un camino en el espacio $\mathbb{R}^2$ («el plano»), en el espíritu de la Definición 2. Pero inspirados en la Definición 3 podríamos pensar que estamos en presencia de un modelo físico de la gráfica de un camino en $\mathbb{R}^1$. En todo caso no se puede hablar de la gráfica de un camino en el plano, como aparece en el título de la figura.

Así pues, el modelo físico de la *trayectoria* de un camino en $\mathbb{R}^1$ deberá ser un *segmento* de recta, mientras que el modelo físico de su *gráfico* será lo que comúnmente se conoce como *curva plana.* Análogamente, la representación cartesiana de la trayectoria de un camino en $\mathbb{R}^2$ será en general una curva plana, pero el modelo de la gráfica en este caso será una *curva alabeada* (en el espacio tridimensional); para caminos en $\mathbb{R}^3$ tendremos curvas alabeadas como modelos físicos de sus trayectorias, pero ya no podremos construir representaciones cómodas de sus gráficos. Para $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 4$ será imposible fabricar modelos prácticos de las trayectorias o de los gráficos de los caminos correspondientes.

---

* Las confusiones en el campo de las traducciones merecerían un artículo aparte, pero no constituyen ellas el tema central de estas notas. Baste comentar que en el original [1'] de [1] se escribe (págs. 323-324) acerca del «smooth path» y del «piecewise smooth path», y no aparece por ninguna parte la expresión «regular path».

4. Y bien, en los modelos o representaciones cartesianas de las curvas o trayectorias generadas por caminos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (de suprema importancia para la física y las ciencias técnicas en general) aparecen «picos» y zonas «lisas». Si como lo hacen Apostol y otros se llama *curva suave* (o lisa, o regular) a la correspondiente a un camino α para el cual existe simplemente la derivada continua α', es fácil dar ejemplos de curvas suaves cuyos modelos físicos tienen picos: considérese, por ejemplo, el camino $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido por $\alpha(t) = ((2t - 1)^3 + 2, (2t - 1)^2 + 1)$, un modelo físico de cuya trayectoria es la figura 1. Es claro que la función α', dada por la fórmula $\alpha'(t) =$

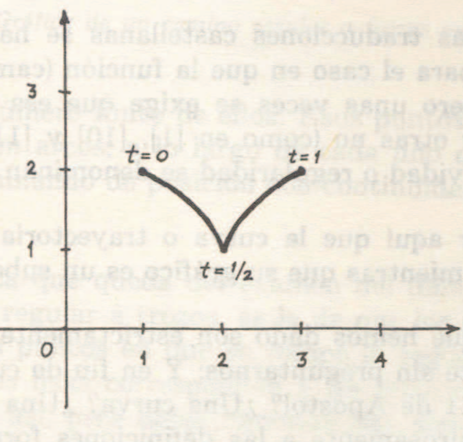

FIGURA 1

$(6(2t - 1)^2, 4(2t - 1))$, es una aplicación continua en el intervalo $[0,1]$, y sin embargo la representación cartesiana de la trayectoria muestra un pico en el punto $(2,1)$ cuando $t = \frac{1}{2}$. En consecuencia, el dibujo que aparece en la figura 10.1 de Apostol *bien podría corresponder a una curva suave en su totalidad,* es decir, sin puntos singulares.

5. Ahora bien, si exigimos que para que una curva o trayectoria se llame suave la función continua α' no puede anularse en ningún punto de su dominio, el pico que aparece en la figura 1 corresponde al punto de la curva en que efectivamente se viola la regularidad, es decir, al punto singular $(2,1)$, ya que $\alpha'(\frac{1}{2}) = (0,0)$. Pero aun en este caso (cuando exigimos la no nulidad de la derivada) tampoco puede pensarse que un modelo físico «liso» de una curva corresponda necesariamente a una trayectoria suave, ya que, por ejemplo, el segmento de recta AC de la figura 2 lo podemos interpretar como el modelo físico de diferentes caminos, v.gr.,

$$\alpha_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha_0(t) = (2t + 1,\ 2t + 1);$$

$$\alpha_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha_1(t) = ((2t - 1)^3 + 2,\ (2t - 1)^3 + 2);$$

$$\alpha_2 : [0,1] \to \mathrm{IR}^2 \ , \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} (2t+1,\ 2t+1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ (4(t-\frac{1}{2})^2+2,\ 4(t-\frac{1}{2})^2+2), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

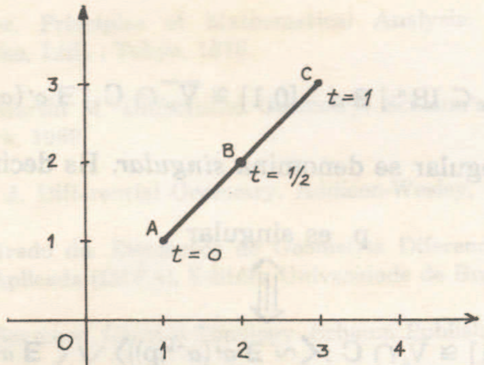

FIGURA 2

En los tres casos tenemos $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = (1,1) = A$; $\alpha_0(\frac{1}{2}) = \alpha_1(\frac{1}{2}) = \alpha_2(\frac{1}{2}) = (2,2) = B$; $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = \alpha_2(1) = (3,3) = C$. Para el punto medio B del segmento AC tenemos:

$$\alpha'_0(\tfrac{1}{2}) = \alpha'_0(t) = (2,2) \ ;$$

$$\alpha'_1(\tfrac{1}{2}) = (0,0) \ ;$$

$$\alpha'_2(\tfrac{1^-}{2}) = (2,2), \quad \alpha'_2(\tfrac{1^+}{2}) = (0,0), \quad \text{de donde } \alpha'_2(\tfrac{1^-}{2}) \neq \alpha'_2(\tfrac{1^+}{2}).$$

En consecuencia:

- Con respecto al camino α_o el punto $B = \alpha_0(\frac{1}{2})$ del segmento AC es regular, ya que existe la derivada α'_o en $t = \frac{1}{2}$ y no es nula.
- Con respecto al camino α_1 el punto $B = \alpha_1(\frac{1}{2})$ del segmento AC es singular, porque -a pesar de existir- la derivada α'_1 en $t = \frac{1}{2}$ se anula.
- Con respecto al camino α_2 el punto $B = a_2(\frac{1}{2})$ del segmento AC es singular, ya que no existe la derivada α'_2 en el punto $t = \frac{1}{2}$.

6. Quisiéramos, pues, caracterizar los puntos de una curva intrínsecamente, con independencia de los caminos de los cuales puede ser imagen. Algo se avanza en este sentido si se adopta, por ejemplo, la siguiente

Definición 4. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ la curva (trayectoria) determinada por un camino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (i.e., $C = \gamma([a, b])$); sea $p \in C$. Se dice que el punto p es un *punto regular* de la curva C si existe una vecindad V_p de p en la cual puede definirse un homeomorfismo* $\alpha : [0,1] \cong \overline{V_p} \cap C$ de tal manera que en el punto $\alpha^{-1}(p) \in [0,1]$ existe la derivada α' y $\alpha'(\alpha^{-1}(p)) \neq \odot$.

En símbolos tenemos:

$$p \text{ es regular} \Longleftrightarrow \exists\, V_p \subset \mathbb{R}^n \mid \exists\, \alpha : [0,1] \cong \overline{V_p} \cap C \mid \exists\, \alpha'(\alpha^{-1}(p)) \neq \odot . \qquad (1)$$

Un punto que no sea regular se denomina *singular*. Es decir,

$$\begin{array}{c} p \text{ es singular} \\ \Updownarrow \\ \forall\, V_p, \forall\, \alpha : [0,1] \cong \overline{V_p} \cap C : \langle \sim \exists\, \alpha'(\alpha^{-1}(p))\rangle \vee \langle \exists\, \alpha'(\alpha^{-1}(p)) = \odot\rangle . \end{array} \qquad (2)$$

Finalmente, llamaremos *curva suave* a aquella cuyos puntos sean todos regulares •

Así pues, según la definicion 4 el punto B de la figura 2 será definitivamente un punto regular, gracias a la existencia del homeomorfismo α_0 exigido por (1), y por consiguiente el segmento AC será -también definitivamente- una curva suave. Pero con respecto a la figura 1, podemos sólo decir que el «intento» α $(\alpha(t) = ((2t - 1)^3 + 2, (2t - 1)^2 + 1),\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ que hicimos para «suavizar» el pico $(2,1) = \alpha(\frac{1}{2})$ funcionó para la definición citada de Apostol, pero falló para la nuestra, ya que $\alpha'(\frac{1}{2}) = (0,0)$. Y sin embargo, ¿quién nos garantiza que nadie sea capaz de encontrar un homeomorfismo que satisfaga (1) y que haga, en consecuencia, que ese pico deje de ser un punto singular?

Y puesto que la definición 4 también es puramente verbal, ¿cómo, en fin, definir lo que para la vista o el tacto es un «pico» en el modelo físico de algo que podamos llamar curva o trayectoria, y cómo caracterizar inequívocamente tal pico?

REFERENCIAS

[0] SCHRÖDINGER Erwin. Mente y Materia. Tusquets Editores, Barcelona, 1985.

[1] APOSTOL Tom M. Calculus. Vol. 2, 2ª Edición. Editorial Reverté, Barcelona, 1980.

* Se recuerda que un homeomorfismo entre dos espacios topológicos X y Y se define como una función biyectiva (o sea unívoca y sobre) $f : X \to Y$ tal que tanto f como f^{-1} son continuas. Generalmente se escribe $f : X \cong Y$. Para mayores detalles se puede ver, por ejemplo, [2], [7], [8] y [9].

[1'] APOSTOL Tom M. Calculus. Vol. II, Second Edition. John Wiley & Sons, New York, 1969.

[2] APOSTOL Tom M. Análisis Matemático. Editorial Reverté, Barcelona, 1976.

[3] RUDIN Walter. Principles of Mathematical Analysis. Third Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. , Tokyo, 1976.

[4] LIPSCHUTZ Martin M. Differential Geometry. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1969.

[5] STRUIK Dirk J. Differential Geometry. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961

[6] CARMO Manfredo do. Elementos de Geometria Diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Editôra Univesidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.

[7] LIPSCHUTZ Seymour. General Topology. Schaum Publishing Co., New York, 1965.

[8] KOWALSKY Hans J. Topological Spaces. Academic Press, New York, 1965.

[9] ALEXANDRIAN Rafael A., MIRZAJAÑAN Eduard A. Topología General. Výschaia Shkola, Moscú, 1979 (en ruso).

[10] DE LILLO Nicholas J. Advanced Calculus with Applications. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1982.

[11] POGORIELOV Alexéi V. Geometría Diferencial. Editorial Mir, Moscú, 1977.

«En el caso de un problema de cierta dificultad primero hay que encontrarle la solución, y sólo después fundamentarla. Análogamente, los teoremas nuevos e interesantes de las matemáticas se inventan al principio «por sospecha», o como dicen más doctamente, por intuición».

ANDREI KOLMOGOROV