Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 2, 2011, pág. 143–150

Recursión, inducción y órdenes bien fundados

Carlos Parra-Londoño[a]*, Diego Mejía-Guzmán[b]

[a] Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Matemáticas, A.A. 568, Medellín, Colombia.
[b] Kobe University, Graduate School of System Informatics, Kobe, Japan.

Resumen. Con base en la caracterización de los números naturales a partir de la propiedad de recursión (ver [2]), probamos en forma general que para un conjunto dado las propiedades de recursión, inducción y buena fundación son equivalentes entre sí. El resultado lo extendemos a clases y lo utilizamos para dar otra prueba de la caracterización del conjunto de los naturales mediante recursión.
Keywords: recursión, inducción, orden bien fundado.
MSC2000: 03E99, 06A06.

Recursion, induction and well-founded orders

Abstract. Based on the characterization of the set of natural numbers by the recursion property, developed in [2], we prove in a general setting that the properties of recursion, induction and well-foundedness are equivalent for a given set. This result is extended to classes and is used to give another proof of the characterization of the set of natural numbers by recursion.
Keywords: recursion, induction, well-founded order.

1. Introducción

Dados un conjunto N, con un elemento $e \in N$, y una función $\sigma : N \to N$, el sistema $\langle N, e, \sigma \rangle$ satisface los axiomas de Peano si y solo si N es isomorfo al conjunto de números naturales, donde e representa el neutro y σ la operación sucesor. En [2, Teorema 2] se logra reducir estos axiomas a una sola propiedad, a saber, *la propiedad de recursión* y se muestra lo siguiente:

Si dados un conjunto X y un $c \in X$, y para toda función $F : X \to X$ existe una única función $g : N \to X$ tal que

$$g(e) = c$$

y

$$g(\sigma(n)) = F(g(n)) \quad \text{para } n \in N,$$

* Autor para correspondencia: *E-mail*: `cmparra@unal.edu.co`.
Recibido: 4 de noviembre de 2011, Aceptado: 13 de diciembre de 2011.

entonces $\langle N, e, \sigma\rangle$ *satisface los axiomas de Peano.*

De lo anterior se sigue que el principio de recursión equivale de hecho al principio de buen orden y a la propiedad de inducción. Al probar la equivalencia entre las tres propiedades nos damos cuenta de que el orden lineal no interviene, pues basta considerar una relación binaria en el conjunto. El único cambio en esta generalización consiste en reemplazar el principio del buen orden por el de buena fundación.

En la sección 2 probamos la equivalencia entre recursión, inducción y buena fundación para conjuntos dotados de una relación binaria. Al final de esta sección mencionamos la equivalencia de estos principios para clases. Por último, en la sección 3 damos una demostración alternativa de la caracterización de los números naturales.

Para fijar la notación, el conjunto de los números naturales se denota por ω, las letras en negrilla denotan clases, mientras que las letras sin resaltar representan conjuntos. Dada una función $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y una clase $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$, $\mathbf{F}{\restriction}\mathbf{X}$ denota la restricción de $\mathbf{F}$ al dominio $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{F}$ es una función, en ocasiones escribimos $\mathbf{F}_x$ en vez de $\mathbf{F}(x)$. Dado un conjunto A, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

2. Principios para conjuntos

En esta sección fijamos un conjunto A y una relación $R \subseteq A \times A$. Para $a \in A$ denotamos por $S_a = \{x \in A \mid xRa\}$ el segmento inicial de a, y dado un conjunto X hacemos $X^{<A} = \{f : S_a \to X \mid a \in A\}$. Consideremos los siguientes principios para $\langle A, R\rangle$.

Principio de Recursión. Dado un conjunto X y una función $F : X^{<A} \to X$, existe una única función $h : A \to X$ tal que, para todo $a \in A$, $h(a) = F(h{\restriction}S_a)$.

Principio de Inducción. Si $T \subseteq A$ es tal que

$$(\forall a \in A)(S_a \subseteq T \Rightarrow a \in T),$$

entonces $A = T$.

Principio de Buena Fundación. R es una relación bien fundada. Es decir, todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento R-minimal.

Veamos que los principios anteriores son equivalentes.

Lema 2.1. *El Principio de Recursión implica que si* $A \neq \varnothing$*, entonces* $(\exists a \in A)(S_a = \varnothing)$.

Demostración. Supongamos que $S_a \neq \varnothing$ para todo $a \in A$. Entonces $\varnothing^{<A} = \varnothing$, por lo cual existe una función $F : \varnothing^{<A} \to \varnothing$ (la función vacía). Al aplicar el Principio de Recursión a $X = \varnothing$ y a F, existe una función $h : A \to \varnothing$, de donde se concluye que $A = \varnothing$. ☑

Lema 2.2. *Supongamos el Principio de Recursión. Entonces, dada una función* $F : A \times X^{<A} \to X$*, existe una única función* $h : A \to X$ *tal que* $h(a) = F(a, h{\restriction}S_a)$*, para todo* $a \in A$.

Demostración. Definamos $G : [X^{<A}]^{<A} \to X^{<A}$ de modo que, para $\alpha \in [X^{<A}]^{<A}$,

$$\begin{array}{rccl} G_\alpha : & \mathrm{dom}\alpha & \longrightarrow & X \\ & a & \longmapsto & G_\alpha(a) = F(a, \alpha(a)). \end{array}$$

Al aplicar el Principio de Recursión, existe una única función $H : A \to X^{<A}$ tal que, para todo $a \in A$, $H_a = G_{H\restriction S_a} : S_a \to X$ satisface $H_a(c) = F(c, H_c)$ para $c \in S_a$. Ahora, si definimos

$$\begin{array}{rccl} h : & A & \longrightarrow & X \\ & a & \longmapsto & h(a) = F(a, H_a), \end{array}$$

se tiene que $H_a = h\restriction S_a$ y, por lo tanto, $h(a) = F(a, h\restriction S_a)$.

Para probar la unicidad de h, supongamos que $h' : A \to X$ cumple la recursión con F. Sea $H' : A \to X^{<A}$ tal que $H'_a = h'\restriction S_a$ para $a \in A$. Luego $G_{H'\restriction S_a} = H'_a$. En efecto, si $c \in S_a$,

$$G_{H'\restriction S_a}(c) = F(c, H'_c) = F(c, h'\restriction S_c) = h'(c) = H'_a(c).$$

Luego, por la unicidad de H respecto a la recursión con G, obtenemos $H' = H$ y, por lo tanto, $h'(a) = F(a, H'_a) = F(a, H_a) = h(a)$. ☑

Teorema 2.3. *El Principio de Recursión implica el Principio de Inducción.*

Demostración. Supongamos que $T \subseteq A$ satisface

$$(\forall a \in A)(S_a \subseteq T \Rightarrow a \in T). \tag{1}$$

Basta considerar $A \neq \varnothing$, pues $\varnothing$ cumple inducción al estar bien ordenado. Por el Lema 2.1 existe $a_0 \in A$ tal que $S_{a_0} = \varnothing$. Luego, por (1), $a_0 \in T$. Ahora definamos $F : A \times T^{<A} \to T$ como sigue:

$$F(a, g) = \begin{cases} a & \text{si } \mathrm{rang} = S_a, \\ a_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, por Lema 2.2, existe una única función $h : A \to T \subseteq A$ tal que, para todo $a \in A$, satisface la recursión

$$h(a) = F(a, h\restriction S_a). \tag{2}$$

Sea $\widehat{F} : A \times A^{<A} \to A$ definida por

$$\widehat{F}(a, g) = \begin{cases} a & \text{si } \mathrm{rang} = S_a, \\ a_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\widehat{F}$ es una extensión de F, así que h, vista como función de A en A, satisface (2), con F reemplazado por $\widehat{F}$. Para concluir entonces que $T = A$, basta ver que id_A satisface la misma recursión (2), con F reemplazado por $\widehat{F}$. En efecto, para todo $a \in A$, $id(a) = a = \widehat{F}(a, id\restriction S_a)$. Concluimos entonces, por la unicidad de la recursión para $\widehat{F}$, que $h = id_A$. Así $A = \mathrm{ran}h \subseteq T$. ☑

Notemos que, en la prueba anterior, hacemos recursión sobre cierta función F y utilizamos la unicidad sobre una extensión $\widehat{F}$. Esta idea se utiliza posteriormente en el Teorema 3.1 y en el Corolario 3.6.

Teorema 2.4. *El Principio de Inducción implica el Principio de Buena Fundación.*

Demostración. Sea $B \subseteq A$ tal que $(\forall x \in B)(\exists y \in B)(yRx)$, y veamos que $B = \varnothing$. Basta aplicar inducción a $T = A \smallsetminus B$ y concluir que $T = A$. En efecto, sea $a \in A$ tal que $S_a \subseteq T$. Si $a \notin T$, entonces $a \in B$, por lo cual existe $y \in B$ tal que yRa, i.e., $y \in S_a \subseteq T$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $a \in T$ y concluimos por inducción que $T = A$. ☑

Teorema 2.5. *El Principio de Buena Fundación implica el Principio de Recursión.*

Demostración. Este es un caso particular del Teorema de la Recursión para clases dotadas de una relación bien fundada. Para una demostración, ver por ejemplo [1, p. 103]. ☑

Observación 2.6. Las equivalencias anteriores tienen versiones correspondientes para clases, cuyas pruebas implican una transcripción directa de los resultados probados anteriormente. Específicamente, y a modo de ilustración, daremos otra demostración del Teorema 2.3 generalizada a clases. Para tal fin, enunciamos el siguiente resultado, cuya demostración aparece en [3, p. 67].

Lema 2.7. *Suponiendo el Principio de Recursión, existe una función $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{ON}$ tal que, para cualesquiera $a, b \in \mathbf{A}$, si $a\mathbf{R}b$ entonces $\rho(a) < \rho(b)$.*

La función ρ definida en el enunciado anterior se conoce como *función de rango* de $\mathbf{A}$. En [3, p. 67] se afirma que toda clase dotada de una función de rango es bien fundada, lo cual es la base para la demostración del siguiente resultado.

Teorema 2.8. *El Principio de Recursión implica el Principio de Inducción.*

Demostración. Supongamos $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{A}$ tal que

$$(\forall a \in \mathbf{A})(S_a \subseteq \mathbf{T} \Rightarrow a \in \mathbf{T}). \tag{3}$$

Si $\mathbf{A} \smallsetminus \mathbf{T} \neq \varnothing$ consideremos $\alpha = \text{mín}_{z \in \mathbf{A} \smallsetminus \mathbf{T}}\{\rho(z)\}$, y sea $a_0 \in \mathbf{A} \smallsetminus \mathbf{T}$ tal que $\rho(a_0) = \alpha$. Si $a \in S_{a_0}$, entonces, por el Lema 2.7, $\rho(a) < \rho(a_0) = \alpha$. Luego, por la minimalidad de α, $a \in \mathbf{T}$. Por lo tanto, $S_{a_0} \subseteq \mathbf{T}$ y, de (3), se sigue que $a_0 \in \mathbf{T}$, lo cual es una contradicción. ☑

3. Recursión y los axiomas de Peano

En esta sección damos una prueba alternativa de la caracterización de los números naturales a partir del Principio de Recursión, diferente del tratamiento que aparece en [2].

Fijemos un conjunto N, un elemento distinguido $0_N \in N$ y $\sigma : N \to N$ (que representa la operación sucesor). Para abreviar, escribimos $0 = 0_N$.

Principio de Recursión. Dados un conjunto X, $c \in X$ y $F : X \to X$, existe una única función $g : N \to X$ tal que $g(0_N) = c$ y $g(\sigma(n)) = F(g(n))$ para todo $n \in N$.

La estrategia en [2, Teorema 2] es probar primero la recursión con parámetros, la inyectividad de σ y luego inducción. En lo que sigue mostramos dicha inducción sin necesidad de pasar por los otros preliminares.

Teorema 3.1 (Principio de Inducción). *Dado $T \subseteq N$, si $0 \in T$ y $n \in T \Rightarrow \sigma(n) \in T$ para todo $n \in N$, entonces $T = N$.*

Demostración. Las hipótesis sobre T implican que $\sigma\restriction T : T \to T$ y $0 \in T$. Al aplicar el Principio de Recursión obtenemos que existe una función $g : N \to T \subseteq N$ tal que $g(0) = 0$ y $g(\sigma(n)) = \sigma(g(n))$ para $n \in N$. Por otra parte, tenemos que $id : N \to N$ satisface $id(0) = 0$ y $id(\sigma(n)) = \sigma(id(n))$ para $n \in N$. Notemos que σ es una extensión de $\sigma\restriction T$, por lo cual g, vista como función de N en N, satisface la recursión con respecto a σ. Ahora, como g e id satisfacen la misma recursión, entonces, por la unicidad, obtenemos $g = id$. Concluimos así que $N = \operatorname{ran}(id) = \operatorname{ran}(g) \subseteq T$. ☑

Del resultado anterior y del Principio de Recursión se pueden demostrar fácilmente los axiomas de Peano. Ahora, con el propósito de deducir las propiedades básicas de los naturales de una manera alternativa, procedemos a demostrar el Principio de Recursión propuesto en la sección 2, sin utilizar el Teorema 3.1.

Consideremos $\mathfrak{F} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(N)$ tal que $\mathfrak{F}(X) = \{0\} \cup \sigma[X]$ para todo $X \subseteq N$. Luego, por el Principio de Recursión, existe una única función $S : N \to \mathcal{P}(N)$ tal que $S_0 = \varnothing$ y $S_{\sigma(n)} = \{0\} \cup \sigma[S_n]$ para todo $n \in N$. Definimos $m < n \Leftrightarrow m \in S_n$ para $m, n \in N$, de modo que $S_n = \{k \in N \mid k < n\}$. Además, $k \leq n$ representa $k < n$ ó $k = n$.

Lema 3.2. *Para todo $n \in N$, $S_{\sigma(n)} = S_n \cup \{n\}$.*

Demostración. Sea $\widehat{S} : N \to \mathcal{P}(N)$ tal que $\widehat{S}_n = S_n \cup \{n\}$. Es claro que $\widehat{S}_0 = \{0\}$ y $\widehat{S}_{\sigma(n)} = \{0\} \cup \sigma[S_n] \cup \{\sigma(n)\} = \{0\} \cup \sigma[\widehat{S}_n] = \mathfrak{F}(\widehat{S}_n)$. Como también $(S \circ \sigma)(0) = \{0\}$ y $(S \circ \sigma)(\sigma(n)) = \mathfrak{F}((S \circ \sigma)(n))$, entonces $\widehat{S}$ y $S \circ \sigma$ satisfacen la misma recursión sobre $\mathfrak{F}$. Por la unicidad de la Recursión, $\widehat{S} = S \circ \sigma$. De donde $\widehat{S}_n = S_{\sigma(n)}$, para todo $n \in N$. ☑

Lema 3.3. *Sean $k, n \in N$.*

(a) $n \not< 0$.

(b) $0 \neq \sigma(n)$.

(c) $n < \sigma(n)$.

(d) $k < \sigma(n) \Leftrightarrow k \leq n$.

(e) $k \leq n \Leftrightarrow S_k \subseteq S_n$.

(f) Las relaciones $<$ y $\leq$ son transitivas.

(g) $k < n \Leftrightarrow \sigma(k) \leq n$.

(h) $k < n \Leftrightarrow S_{\sigma(k)} \subseteq S_n$.

(i) $0 \leq n$.

Demostración. Estas propiedades se siguen fácilmente de la notación y del Lema 3.2. La única demostración que no es directa es la siguiente.

(e) Sea $S' : N \to \mathcal{P}(N)$ tal que $S'_n = \bigcup_{k\leq n} S_k$. Luego $S'_0 = \bigcup_{k\leq 0} S_0 = S_0 = \varnothing$, y para todo $n \in N$,

$$\begin{aligned} S'_{\sigma(n)} &= \left(\bigcup_{k<\sigma(n)} S_k\right) \cup S_{\sigma(n)} = \left(\bigcup_{k\in\sigma[S_n]} S_k\right) \cup \{0\} \cup \sigma[S_n] \\ &= \left(\bigcup_{t\in S_n} S_{\sigma(t)}\right) \cup \{0\} \cup \sigma[S_n] = \left(\bigcup_{t<n} (\{0\} \cup \sigma[S_t])\right) \cup \{0\} \cup \sigma[S_n] \\ &= \{0\} \cup \left(\bigcup_{t\leq n} \sigma[S_t]\right) = \{0\} \cup \sigma[S'_n]. \end{aligned}$$

Luego S y S' satisfacen la misma recursión sobre $\mathfrak{F}$. Por lo tanto, $S = S'$ y, si $k \leq n$, entonces $S_k \subseteq S'_n = S_n$. Para el recíproco, si $S_k \subseteq S_n$, entonces $S_{\sigma(k)} = \{0\} \cup \sigma[S_k] \subseteq \{0\} \cup \sigma[S_n] = S_{\sigma(n)}$. Como $k \in S_{\sigma(k)}$, se tiene que $k \in S_{\sigma(n)}$. Por (d), $k \leq n$. ☑

Teorema 3.4 (Principio de Recursión Generalizado). *Dada $F : X^{<N} \to X$, existe una única función $h : N \to X$ tal que $h(n) = F(h\restriction S_n)$ para todo $n \in N$.*

Demostración. Sea $\widehat{F} : X^{<N} \to X^{<N}$ tal que, si $\overline{x} \in X^{<N}$, entonces

$$\begin{array}{rccl} \widehat{F}_{\overline{x}}: & \{0\} \cup \sigma[\operatorname{dom}(\overline{x})] & \longrightarrow & X \\ & k & \longmapsto & \widehat{F}_{\overline{x}}(k) = F(\overline{x}\restriction S_k) \end{array}$$

(esta función está bien definida por el item (e) del Lema 3.3). Por el Principio de Recursión, existe una única función $H : N \to X^{<N}$ tal que $H_0 = \varnothing$ y $H_{\sigma(n)} = \widehat{F}_{H_n}$. Es claro que $\operatorname{dom}(H_0) = \varnothing$ y $\operatorname{dom}(H_{\sigma(n)}) = \{0\} \cup \sigma[\operatorname{dom}(H_n)]$; es decir, $\langle \operatorname{dom}(H_n)\rangle_{n\in N}$ satisface la misma recursión que S sobre $\mathfrak{F}$. Por lo tanto, $\operatorname{dom}(H_n) = S_n$, para todo $n \in N$, y

$$\begin{array}{rccl} H_{\sigma(n)}: & S_{\sigma(n)} & \longrightarrow & X \\ & k & \longmapsto & H_{\sigma(n)}(k) = F(H_n\restriction S_k). \end{array}$$

Por otra parte, sea $H' : N \to X^{<N}$ tal que

$$\begin{array}{rccl} H'_n: & S_n & \longrightarrow & X \\ & k & \longmapsto & H'_n(k) = F(H_n\restriction S_k). \end{array}$$

Es claro que $H'_0 = \varnothing$ y, dados $n \in N$ y $k \in S_n$, $H'_n(k) = H_{\sigma(n)}(k)$. Por lo tanto, $H'_n = H_{\sigma(n)}\restriction S_n$. Luego para $k < \sigma(n)$,

$$\widehat{F}_{H'_n}(k) = F(H'_n\restriction S_k) = F(H_{\sigma(n)}\restriction S_k) = H'_{\sigma(n)}(k),$$

por lo cual $\widehat{F}_{H'_n} = H'_{\sigma(n)}$. Así, H y H' satisfacen la misma recursión sobre $\widehat{F}$, de modo que $H = H'$; lo cual permite concluir que $H_{\sigma(n)} = H_n \cup \{(n, F(H_n))\}$.

Definamos $h : N \to X$ tal que $h(n) = F(H_n)$, y $G : N \times X^{<N} \to N \times X^{<N}$ tal que

$$G(n, \overline{x}) = \begin{cases} (\sigma(n), \overline{x} \cup \{(n, F(H_n))\}) & \text{si } \operatorname{dom}\overline{x} = S_n, \\ (0, \varnothing) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $L_1 : N \to N \times X^{<N}$ tal que $L_1(n) = (n, H_n)$, y definamos $L_2 : N \to N \times X^{<N}$ como $L_2(n) = (n, h\restriction S_n)$. Nótese que $L_1(0) = L_2(0) = (0, \varnothing)$ y, para $n \in N$,

$$L_1(\sigma(n)) = (\sigma(n), H_{\sigma(n)}) = (\sigma(n), H_n \cup \{(n, F(H_n))\}) = G(n, H_n) = G(L_1(n))$$

y

$$\begin{aligned} L_2(\sigma(n)) &= (\sigma(n), h\restriction S_{\sigma(n)}) = (\sigma(n), h\restriction S_n \cup \{(n, h(n))\}) \\ &= (\sigma(n), h\restriction S_n \cup \{(n, F(H_n))\}) = G(n, h\restriction S_n) = G(L_2(n)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, L_1 y L_2 satisfacen la misma recursión sobre G, con término inicial $(0, \varnothing)$, de donde se concluye que $L_1 = L_2$. Luego para todo $n \in N$ se sigue que $H_n = h\restriction S_n$. Por lo tanto, $h(n) = F(h\restriction S_n)$.

Para verificar la unicidad, sea $h' : N \to X$ tal que $h'(n) = F(h'\restriction S_n)$ para $n \in N$, y veamos que $h' = h$. Consideremos $\widehat{H} : N \to X^{<N}$ tal que $\widehat{H}_n = h'\restriction S_n$. Luego $\widehat{H}_0 = \varnothing$ y, para $k < \sigma(n)$,

$$\widehat{F}_{\widehat{H}_n}(k) = F(\widehat{H}_n\restriction S_k) = F(\widehat{H}_k) = h'(k).$$

Entonces $\widehat{F}_{\widehat{H}_n} = h'\restriction S_{\sigma(n)} = \widehat{H}_{\sigma(n)}$. Así, H y $\widehat{H}$ cumplen la misma recursión sobre $\widehat{F}$, por lo cual $\widehat{H} = H$. Por tanto, $h\restriction S_{\sigma(n)} = H_{\sigma(n)} = h'\restriction S_{\sigma(n)}$, para cada $n \in N$. Como $n \in S_{\sigma(n)}$, concluimos que $h(n) = h'(n)$. ☑

Corolario 3.5. *(a) Si $T \subseteq N$ satisface que*

$$(\forall n \in N)(S_n \subseteq T \Rightarrow n \in T),$$

entonces $N = T$.

(b) $\langle N, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Demostración. (a) Se sigue de la sección 2 y del Teorema 3.4. Probemos (b). El Teorema 3.4 implica que la relación $<$ es bien fundada, por lo cual es irreflexiva y, como es transitiva, entonces $\langle N, < \rangle$ es un orden parcial tal que todos sus subconjuntos no vacíos tienen un elemento minimal. Para probar que $<$ es un buen orden, basta ver que los elementos de N son comparables. Procedamos por inducción según (a). Sea $n \in N$ tal que todo $k < n$ es comparable con todos los elementos de N y veamos, de nuevo por inducción, que n es comparable con todos los elementos de N. Supongamos $k \in N$ tal que todo $i < k$ es comparable con n, y veamos que k es comparable con n. Si existe algún $i < k$ tal que $n \leq i$, o si existe algún $j < n$ tal que $k \leq j$, entonces n y k son comparables directamente. Supongamos entonces que $n \nleq i$ para todo $i < k$, y que $k \nleq j$ para todo $j < n$. Como todo $i < k$ es comparable con n, entonces $i < n$, y como todo $j < n$ es comparable con todos los elementos de N, entonces $j < k$. Por lo tanto, $S_n = S_k$, lo cual implica, por el Lema 3.3, que $n \leq k$ y $k \leq n$. Luego, $n = k$. ☑

Corolario 3.6. *(a) σ es inyectiva.*

(b) Si $n \in N$, entonces $n = 0$ ó $n = \sigma(k)$ para algún $k \in N$.

Demostración. (a) Es directo del Lema 3.3. Para probar (b), sea $n \in N$ tal que $n \neq 0$ y $n \neq \sigma(k)$, para todo $k \in N$. Luego, $\sigma{\restriction}S_n : S_n \to S_n$ (si $k < n$, entonces $\sigma(k) < n$, ya que no pueden ser iguales). Como $n \neq 0$, entonces $0 < n$ y, por Recursión, existe una función $g : N \to S_n$ tal que $g(0) = 0$ y $g(\sigma(n)) = \sigma(g(n))$ para todo $n \in N$. También tenemos que $id : N \to N$ cumple que $id(0) = 0$ y $id(\sigma(n)) = \sigma(id(n))$ para todo $n \in N$. Es decir, id y g (vista como función de N en N) satisfacen la misma recursión sobre $\sigma : N \to N$. Por lo tanto, $g = id$. Luego, $N = \mathrm{ran}(id) = \mathrm{ran}(g) \subseteq S_n$, lo cual implica que $n \notin N$. ☑

Finalmente, deducimos el Principio de Inducción de los otros resultados de esta sección.

Corolario 3.7. *Dado $T \subseteq N$, si $0 \in T$ y $n \in T \Rightarrow \sigma(n) \in T$ para todo $n \in N$, entonces $T = N$.*

Demostración. Sea $n \in N$ tal que $S_n \subseteq T$. Por el Corolario 3.6 se tiene que $n = 0$ ó existe $k \in N$ tal que $n = \sigma(k)$. En el primer caso, es claro que $n \in T$. En el segundo caso, $k \in S_n$. Por lo tanto $k \in T$ y $n = \sigma(k) \in T$. ☑

Referencias

[1] Kunen K., *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[2] Lawvere F.W., "An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary", *Repr. Theory Appl. Categ.* 11 (2005), 1-35.

[3] Levy A., *Basic Set Theory*, Dover, New York, 2002.