Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 24, No. 2, 2006, pág. 77–85

Algunas representaciones de la función hipergeométrica generalizada ${}_2R_1\,(a,b;c;\tau;z)$

Jaime Castillo Pérez*

Resumen. El campo de las funciones especiales ha tenido un gran desarrollo en los últimos decenios, dado que son muchos campos de aplicación de las mismas, como por ejemplo procesos estocásticos relacionados, investigación de operaciones, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de placas, conducción del calor, elasticidad, radiación. En este trabajo se considera una ampliación de las teorías presentadas por M. Dotsenko en 1991, quien introdujo la generalización de la función hipergeométrica de Gauss denotada por ${}_2R_1^{\tau}(z)$, y estableció su representación en serie e integral. Es importante notar que en 1999 Nina Virchenko, y luego en el 2003 Leda Galué, consideraron esta función introduciendo un conjunto de fórmulas de recurrencia y de diferenciación. En este trabajo se establecen algunas representaciones para la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$, las cuales serán muy útiles puesto que permiten simplificar cálculos a la hora de resolver problemas que involucren esta función.

Abstract. The field of special functions have had a remarkable development during the last decades, because there are many phenomena that can be studied by means of the use of these functions, such as related stochastic processes, operational research, quantum theory, functional equations, vibration of plates, heat conduction, elasticity, radiation. Along this paper work, an extension of the theories presented by M. Dotsenko in 1991 is considered. M. Dotsenko introduced the generalization of the hypergeometric function of Gauss referred as ${}_2R_1^{\tau}(z)$, and established its representation as a series and as an integral. It is important to remark that in 1999 Nina Virchenko and, later in 2003, Leda Galué considered this function by introducing a set of recurrence and differentiation formulas. Along this paper work some representations of the function ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$ are established and they will be very useful since they permit simplify calculus when solving problems involving this function.

Palabras y frases claves: Función hipergeométrica generalizada, representación integral de tipo Euler.
***Key words*:** Generalized hypergeometric function, integral representation Euler type.
MSC2000: Primaria: 33Cxx. Secundaria: 33E50.

* Centro de Investigaciones Universidad de la Guajira, grupo de investigación Gima. Riohacha, Colombia, *e-mail*: `jacas68@yahoo.es`

1. Introducción

El estudio de las funciones especiales ha apoyado en gran manera el desarrollo de las matemáticas aplicadas. Entre ellas se tienen: la función hipergeométrica de Gauss, la función hipergeométrica generalizada, la función hipergeométrica de Wright, las funciones de Appell, La función G, la función H, las funciones de Humbert (ver [1, 2, 3, 4, 5, 6]).

Las funciones hipergeométricas aparecen en una diversidad de aplicaciones tales como estadísticas, investigación de operaciones, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de placas, conducción del calor, elasticidad, radiación (ver [1, 7, 8]).

En 1991 M. Dotsenko [9] consideró una generalización de la función hipergeométrica de Gauss definida como

$$ {}_2R_1^{\tau}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!}, $$

estableciendo además su representación en serie, como también su representación integral. En 1999 Nina Virchenko [10] estableció algunas fórmulas de diferenciación y relaciones de recurrencia para la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$, las cuales fueron ampliadas en el 2003 por Leda Galué y colaboradores [7], quienes dedujeron seis nuevas relaciones de recurrencia para dicha función.

En el presente trabajo se muestra la función hipergeométrica generalizada ${}_2R_1^{\tau}(z)$ en términos de la función H de Fox, a fin de obtener una representación de la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$ para un racional positivo τ. Se presenta además la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$ en términos de integrales simples de tipo Euler.

1.1. La función ${}_2R_1^{\tau}(z)$

En 1999 N. Virchenco [10] consideró una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss de la siguiente forma:

$$ {}_2R_1^{\tau}(z) = {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!}, \tag{1} $$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $|z| < 1$.

Esta función tiene la representación integral

$$ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^{\tau})^{-a} dt, \tag{2} $$

donde $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$.

1.2. Algunas representaciones integrales de tipo Euler para la función beta

En [11, p. 14, No. 7], se establece la siguiente representación de la función beta:

$$ B(x,y) = -\frac{e^{-i\pi(x+y)}}{4\,\mathrm{sen}(\pi x)\,\mathrm{sen}(\pi y)} \int_p^{(1+,0+,1-,0-)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{3} $$

donde $\operatorname{Re} x>0$, $\operatorname{Re} y>0$ y el contorno de integración es un lazo doble de Pocchammer, el cual consiste de un lazo que comienza en un punto P, encierra el punto 1 en la dirección positiva y retorna a P, encierra el punto 0 en la dirección positiva y retorna a P, encierra el punto 1 en la dirección negativa y retorna a P, y encierra el punto 0 en la dirección negativa y retorna a P. Similarmente, la función beta se expresa como una integral de contorno de un lazo simple de la siguiente forma:

$$B(x,y)=\frac{1}{2}\operatorname{csch}(\pi\boldsymbol{i}y)\int_0^{(1+)}t^{x-1}(t-1)^{y-1}\,dt, \tag{4}$$

donde $\operatorname{Re} x>0$, $|\arg(t-1)|\leq\pi$, $y\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$

$$B(x,y)=-\frac{1}{2}\operatorname{csch}(\pi\boldsymbol{i}x)\int_1^{(0+)}(-t)^{x-1}(t-1)^{y-1}\,dt, \tag{5}$$

donde $\operatorname{Re} y>0$, $|\arg(-t)|\leq\pi$, $x\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$

Por otra parte, la función hipergeométrica generalizada de Wright es un caso particular de la función H (ver [12, p. 19, No.(2.6.11)])

$$\begin{aligned} H^{1,p}_{p,q+1}&\left[-x\left|\begin{array}{l}(1-\alpha_1,A_1),\ldots,(1-\alpha_p,A_p)\\(0,1),(1-\beta_1,B_1),\ldots,(1-\beta_q,B_q)\end{array}\right.\right]=\\ &={}_p\Psi_q\left[\begin{array}{l}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p);\\(\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q);\end{array}\;x\right]. \end{aligned}\tag{6}$$

También, de acuerdo con [13, p. 629, No.(22)],

$$H^{m,n}_{p,q}\left[x\left|\begin{array}{l}(\alpha_p,A_p)\\(\beta_q,B_q)\end{array}\right.\right]=(2\pi)^{c^*-ka^*/2}\,k^{\mu}MG^{\tilde m,\tilde n}_{\tilde p,\tilde q}\left[\left(\frac{x}{\beta k^{\Delta}}\right)^k\left|\begin{array}{l}\Delta(k_p,\alpha_p)\\\Delta(l_q,\beta_q)\end{array}\right.\right], \tag{7}$$

$[A_1,\ldots,A_p,\ B_1,\ldots,B_q>0]$ son cantidades racionales y

$$\Delta(k,a)=\frac{a}{k},\ \frac{a+1}{k},\ \frac{a+2}{k},\ldots,\frac{a+k-1}{k}.$$

Aquí k es el M.C.M. de todos los denominadores de $A_1,\ldots,A_p$, $B_1,\ldots,B_q$, $k_i=kA_i$, $i=1,\ldots,p$, $l_j=kB_j$, $j=1,\ldots,q$,

$$M=\prod_{i=1}^{p}A_i^{\frac{1}{2}-\alpha_i}\prod_{j=1}^{q}B_j^{\beta_j-1/2},\qquad \tilde m=\sum_{j=1}^{m}l_j,\qquad \tilde n=\sum_{j=1}^{n}k_j,$$

$$\tilde p=\sum_{j=1}^{p}k_j,\qquad \tilde q=\sum_{j=1}^{q}l_j,$$

$$a^*=\sum_{j=1}^{n}A_j-\sum_{j=n+1}^{p}A_j+\sum_{j=1}^{m}B_j-\sum_{j=m+1}^{q}B_j,$$

$$c^*=m+n-\frac{p+q}{2},\qquad \beta=\prod_{i=1}^{p}A_j^{-A_j}\prod_{j=1}^{q}B_j^{B_j},$$

$$\Delta=\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j,\qquad \mu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\frac{p-q}{2}+1.$$

2. Representación de la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$ en términos de la función H

Se sabe [14, 15] que

$$ {}_p\Psi_q\left[\begin{array}{ll}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p); & \\ (\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q); & z\end{array}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha_j+A_jn)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(\beta_j+B_jn)}\frac{z^n}{n!}. $$

Como caso particular se tiene

$$ {}_2\Psi_1\left[\begin{array}{ll}(\alpha_1,A_1),(\alpha_2,A_2); & \\ (\beta_1,B_1); & z\end{array}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+A_1n)\Gamma(\alpha_2+A_2n)}{\Gamma(\beta_1+B_1n)}\frac{z^n}{n!}, \tag{8} $$

donde $A_1,A_2,B_1>0$ y $1+B_1-A_1-A_2\geq 0$.
Haciendo $A_1=1$ y $A_2=B_1=\tau$ en (8) se tiene

$$ {}_2\Psi_1\left[\begin{array}{ll}(\alpha_1,1),(\alpha_2,\tau); & \\ (\beta_1,\tau); & z\end{array}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+\tau n)}{\Gamma(\beta_1+\tau n)}\frac{z^n}{n!}; $$

entonces,

$$ {}_2R_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta_1;\tau;z)=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{ll}(\alpha_1,1),(\alpha_2,\tau); & \\ (\beta_1,\tau); & z\end{array}\right]. \tag{9} $$

Teniendo en cuenta (6),

$$ H^{1,2}_{2,2}\left[-z\left|\begin{array}{l}(1-\alpha_1,1),(1-\alpha_2,\tau)\\ (0,1),(1-\beta_1,\tau)\end{array}\right.\right]={}_2\Psi_1\left[\begin{array}{ll}(\alpha_1,1),\ldots,(\alpha_2,\tau); & \\ (\beta_1,\tau); & z\end{array}\right]. \tag{10} $$

Finalmente de (9) y (10) se obtiene

$$ {}_2R_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta_1;\tau;z)=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}H^{1,2}_{2,2}\left[-z\left|\begin{array}{l}(1-\alpha_1,1),(1-\alpha_2,\tau)\\ (0,1),(1-\beta_1,\tau)\end{array}\right.\right]. \tag{11} $$

2.3. Representación de ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$ para $\tau\in\mathbb{Q}^+$

Considerando en (11) $\tau=\dfrac{r}{s}$, con r y s enteros positivos y teniendo en cuenta las condiciones de (7) se tiene:
$M=\left(\dfrac{r}{s}\right)^{b-c}$, $\tilde{m}=s$, $\tilde{n}=s+r$, $\tilde{p}=s+r$, $\tilde{q}=s+r$, $a^*=2$, $c^*=1$, $k_1=s$, $k_2=r$, $l_1=s$, $l_2=r$, $\beta_1=1$, $\Delta=0$, $\mu=1$.

$$\Delta\left(s,1-a\right)=\frac{1-a}{s},\ \frac{2-a}{s},\ \frac{3-a}{s},\ldots,\frac{s-a}{s}\,,$$
$$\Delta\left(r,1-b\right)=\frac{1-b}{r},\ \frac{2-b}{r},\ \frac{3-b}{r},\ldots,\frac{r-b}{r}\,,$$
$$\Delta\left(r,1-c\right)=\frac{1-c}{r},\ \frac{2-c}{r},\ \frac{3-c}{r},\ldots,\frac{r-c}{r}\,,$$
$$\Delta\left(s,0\right)=0,\ \frac{1}{s},\ \frac{2}{s},\ldots,\frac{s-1}{s}\,.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (7) y (11),

$$\begin{aligned}{}_2R_1\left(a,b;c;\frac{r}{s};z\right)&=\frac{\Gamma\left(c\right)s\left(2\pi\right)^{1-s}\left(\frac{s}{r}\right)^{b-c}}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}\times\\ &G^{s,s+r}_{s+r,s+r}\left[\left(-z\right)^s\left|\begin{array}{l}\frac{1-a}{s},\frac{2-a}{s},\ldots,\frac{s-a}{s},\frac{1-b}{r},\frac{2-b}{r},\ldots,\frac{r-b}{r}\\ 0,\ \frac{1}{s},\frac{2}{s},\ldots,\frac{s-1}{s},\frac{1-c}{r},\frac{2-c}{r},\ldots,\frac{r-c}{r}\end{array}\right.\right].\end{aligned}\tag{12}$$

En (12) cuando $r=s=1$ se tiene el resultado conocido [13, p. 719, No.(13)].

2.4. Representación integral simple de tipo Euler para la función ${}_2R_1\left(a,b;c;\tau;z\right)$

De acuerdo con (2), y teniendo en cuenta que

$$\left(1-zt^{\tau}\right)^{-a}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a\right)_k\frac{\left(t^{\tau}z\right)^k}{k!}\,,$$

se tiene

$${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a\right)_k\frac{\left(t^{\tau}z\right)^k}{k!}dt\,.$$

De acuerdo con la convergencia uniforme de la serie, intercambiamos la suma con la integral, y después de usar la representación integral de la función beta se tiene

$${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a\right)_k\frac{z^k}{k!}B\left(b+\tau k,c-b\right)\,;$$

haciendo uso de (3) obtenemos

$$\begin{aligned}{}_2R_1(a,b;c;\tau;z)=\frac{-\Gamma\left(c\right)e^{-i\pi c}}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(c-b\right)4\operatorname{sen}\pi b\operatorname{sen}\pi\left(c-b\right)}\int_p^{(1+,0+,1-,0-)}t^{b-1}\times\\ \left(1-t\right)^{c-b-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_k\left(t^{\tau}z\right)^k e^{-i\pi\tau k}}{\operatorname{sen}\pi\left(b+\tau k\right)k!}dt\,,\end{aligned}$$

donde $|\arg(-z)| < \pi$, b, $b+\tau k$, $1-c$, $c-b \neq 1,2,3,\ldots$
Similarmente, después de usar (4) y (5) se obtuvieron, respectivamente, los siguientes resultados:

$$ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\boldsymbol{i}\Gamma(c)\, e^{\boldsymbol{i}\pi(b-c)}}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)\, 2\operatorname{sen}\pi(c-b)} \int_0^{(1+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-t^{\tau}z)^{-a}\, dt\,, $$

donde $\operatorname{Re} b > 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$, $c-b \neq 1,2,3,\ldots$ y

$$ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{-\boldsymbol{i}\Gamma(c)\, e^{-\boldsymbol{i}\pi b}}{2\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_1^{(0+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (zt^{\tau})^k e^{-\boldsymbol{i}\pi\tau k}}{\operatorname{sen}\pi(b+\tau k)\, k!} dt\,, $$

donde $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b$, $|\arg(-z)| < \pi$, $b+\tau k \neq 1,2,3,\ldots$

2.5. Aplicaciones

Aplicación 1.

Calcular

$$ I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} J_{\nu}\left(\sigma\sqrt{x}\right) {}_2R_1(a,b;c;\tau;-wx)\, dx\,. $$

En [12, p. 18, No. (2.6.5)] se tiene

$$ H_{0,2}^{1,0}\left[\frac{x^2}{4}\,\middle|\, \begin{matrix} ------ \\ \left(\frac{a+\nu}{2},1\right), \left(\frac{a-\nu}{2},1\right) \end{matrix}\right] = \left(\frac{x}{2}\right)^{a} J_{\nu}(x)\,, $$

donde $J_{\nu}(x)$ es la función de Bessel de primera especie. Ahora, de acuerdo con (11),

$$ I = \frac{\Gamma(c)\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{2\alpha}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \int_0^{\infty} x^{-1} H_{0,2}^{1,0}\left[\frac{\sigma^2 x}{4}\,\middle|\, \begin{matrix} ------ \\ \left(\alpha+\frac{\nu}{2},1\right), \left(\alpha-\frac{\nu}{2},1\right) \end{matrix}\right] \times $$
$$ H_{2,2}^{1,2}\left[wx\,\middle|\, \begin{matrix} (1-a,1), (1-b,\tau) \\ (0,1), (1-c,\tau) \end{matrix}\right] dx\,, $$

lo cual coincide con la fórmula integral 1 [12, p. 58, No.(5.1.1)]. Esta establece lo siguiente:

$$ \int_0^{\infty} x^{\eta-1} H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\sigma}\,\middle|\, \begin{matrix} (a_j,\alpha_j)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right] H_{P,Q}^{M,N}\left[sx\,\middle|\, \begin{matrix} (c_j,\gamma_j)_{1,P} \\ (d_j,\delta_j)_{1,Q} \end{matrix}\right] dx = $$
$$ = s^{-\eta} H_{p+Q,q+P}^{m+N,n+M}\left[zs^{-\sigma}\,\middle|\, \begin{matrix} (a_j,\alpha_j)_{1,n}, (1-d_j-\eta\delta_j,\sigma\delta_j)_{1,Q},\ (a_j,\alpha_j)_{n+1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,m}, (1-c_j-\eta\gamma_j,\sigma\gamma_j)_{1,P}, (b_j,\beta_j)_{m+1,q} \end{matrix}\right]; $$

después de aplicar la fórmula integral 1 con $\eta = 0$, se obtiene

$$ I = \frac{\Gamma(c)\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{2\alpha}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} H_{2,4}^{3,1}\left[\frac{\sigma^2}{4w}\,\middle|\, \begin{matrix} (1,1), (c,\tau) \\ \left(\alpha+\frac{\nu}{2},1\right), (a,1), (b,\tau), \left(\alpha-\frac{\nu}{2},1\right) \end{matrix}\right], \tag{13} $$

donde $\sigma, \operatorname{Re}(2\alpha+\nu)>0$; $\operatorname{Re}(\alpha-a), \operatorname{Re}(\alpha-b)<\frac{3}{4}$; $|\arg w|<\pi$.
En (13), para $\tau=1$ se tiene el resultado conocido [13, p.323, No.(1)].
Similarmente se obtuvieron los siguientes resultados:

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{c-1}{2}} J_{c-1}\left(\sigma\sqrt{x}\right) {}_2R_1(a,b;c;\tau;-wx)\,dx = \frac{\Gamma(c)\,w\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{c-1}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \times H_{1,3}^{3,0}\left[\frac{\sigma^2}{4w}\,\middle|\, \begin{matrix}(c,\tau)\\ (c-1,1),(a-1,1),(b-\tau,\tau)\end{matrix}\right],$$

donde $\tau>0$, $0<\operatorname{Re}c<2\operatorname{Re}a+\frac{1}{2}$, $2\operatorname{Re}\frac{b}{\tau}+\frac{1}{2}$; $|\arg w|<\pi$.

3. $$\int_0^\infty x^{c-\frac{a}{2}-1} J_{2c-a-2}\left(\sigma\sqrt{x}\right) {}_2R_1(a,b;c;\tau;-wx)\,dx = \frac{\Gamma(c)\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{2c-a-2}}{w\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \times H_{1,3}^{3,0}\left[\frac{\sigma^2}{4w}\,\middle|\, \begin{matrix}(c-\tau,\tau)\\ (2c-a-2,1),(a-1,1),(b-\tau,\tau)\end{matrix}\right],$$

donde $\tau>0$, $1<\operatorname{Re}(2c-a)<2\operatorname{Re}a+\frac{1}{2}$, $2\operatorname{Re}\frac{b}{\tau}+\frac{1}{2}$; $|\arg w|<\pi$.

4. $$\int_0^\infty x^{\frac{3c-2a-3}{4}} J_{\frac{c-1}{2}-a}\left(\sigma\sqrt{x}\right) {}_2R_1\left(a,\frac{c}{2};c;\tau;-wx\right)dx = \frac{\Gamma(c)\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{3c-2a-3}{2}}}{w\Gamma(a)\,\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)} \times H_{2,4}^{3,1}\left[\frac{\sigma^2}{4w}\,\middle|\, \begin{matrix}(0,1),(c-\tau,\tau)\\ (2c-a-2,1),(a-1,1),\left(\frac{c}{2}-\tau,\tau\right),\left(\frac{c-1}{2},1\right)\end{matrix}\right],$$

donde $\tau>0$, $\operatorname{Re}a<\operatorname{Re}c<2\operatorname{Re}a+\frac{2}{3}$; $|\arg w|<\pi$.

5. $$\int_0^\infty x^{\frac{3c-2a-3}{4}} J_{a+\frac{1-c}{2}}\left(\sigma\sqrt{x}\right) {}_2R_1\left(a,\frac{c}{2};c;\tau;-wx\right)dx = \frac{\Gamma(c)\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{3c-2a-3}{2}}}{w\Gamma(a)\,\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)} \times H_{2,4}^{3,1}\left[\frac{\sigma^2}{4w}\,\middle|\, \begin{matrix}(0,1),(c-\tau,\tau)\\ \left(\frac{c-1}{2},1\right),(a-1,1),\left(\frac{c}{2}-\tau,\tau\right),(c-2a-1,1)\end{matrix}\right],$$

donde $\tau>0$, $-1<\operatorname{Re}c<2\operatorname{Re}a+\frac{2}{3}$; $|\arg w|<\pi$.
Cuando $\tau=1$, en los resultados (2)–(5) se obtienen respectivamente los resultados conocidos [13, p. 323-324, No. (2)–(5)].

Aplicación 2.

En (12), cuando $r=1$, $s=2$ se obtiene

$${}_2R_1\left(a,b;c;\frac{1}{2};z\right) = \frac{\Gamma(c)\,2^{b-c}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\pi} G_{3,3}^{2,3}\left[z^2\,\middle|\, \begin{matrix}\frac{1-a}{2}, 1-\frac{a}{2}, 1-b\\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1-c\end{matrix}\right].$$

Por la fórmula [13, p. 618, No. (3)], la cual establece que

$$G_{p,q}^{m,n}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right]=\sum_{h=1}^{m}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma\left(\beta_j-\beta_h\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(1+\beta_h-\alpha_j\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1+\beta_h-\beta_j\right)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(\alpha_j-\beta_h\right)}x^{\beta_h}\times$$
$$ {}_pF_{q-1}\left[\begin{matrix}1+\beta_h-\alpha_1,\ldots,1+\beta_h-\alpha_p\\ 1+\beta_h-\beta_1,\cdots*,1+\beta_h-\beta_q\end{matrix};(-1)^{p-m-n}\,x\right],$$

donde $p\leq q$ y $|x|<1$, se obtiene

$$ {}_2R_1\left(a,b;c;\frac{1}{2};z\right)=\frac{2^{b-c}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{a+1}{2},\frac{a}{2}\\ a\end{matrix}\right]{}_3F_2\left(\frac{a+1}{2},\frac{a}{2},b;\frac{1}{2},c;z^2\right)$$
$$-\frac{2^{b-c+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}+1,b+\frac{1}{2},c\\ a,b,c+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]z\,{}_3F_2\left(\frac{a}{2}+1,\frac{a+1}{2},b+\frac{1}{2};\frac{3}{2},c+\frac{1}{2};z^2\right).$$

Referencias

[1] C. Fox. "The Asymptotic Expansion of Generalized Hypergeometric Functions." *Proc. London Math. Soc.*, 27, 2 (1928), 389-400.

[2] J.B. Slater. *Generalized Hypergeometric Functions*. University Press, Cambridge, 1966.

[3] H.M. Srivastava & P.W. Karlsson. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*. John Wiley & Sons, New York, 1985.

[4] H.M. Srivastava, K.C. Gupta & S.P. Goyal. *The H-functions of One and two Variables*. South Asian Publishers, New Delhi, 1982

[5] E.M. Wright. "The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function." *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), 286-293.

[6] E.M. Wright. "The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function." *J. London Math. Soc.*, 46, 2 (1940), 389-408.

[7] L. Galué, A. Al-Zamel & S.L. Kalla. "Further Results on Generalized Hypergeometric Functions." *Applied Mathematics and Computation*, 136 (2003), 17-25.

[8] N.N. Levedev. *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall, Inc., New York, 1965.

[9] M. Dotsenko. "On Some Applications of Wrigt's Hypergeometric Functions." *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 44 (1991), 13-16.

[10] N. Virchenko. "On Some Generalizations of the Functions of Hypergeometric Type." *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2, 3 (1999), 233-244.

[11] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill, Vol. 1, New York, 1953.

[12] H.M. Srivastava, K.C. Gupta & S.P. Goyal. *The H-functions of One and Two Variables*. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.

[13] A.P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov & O.I. Marichev. *Integrals and Series*. Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 3, New York. 1992

[14] E.M. Wright. "The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function." *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), 286-293.

[15] E.M. Wright. "The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function." *Proc. London Math. Soc.*, 46, 2 (1940), 389-408.

Jaime Castillo Pérez
Centro de Investigaciones Universidad de la Guajira
Grupo de Investigación Gima.
Riohacha, Colombia.
e-mail: jacas68@yahoo.es