Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 24, No. 2, 2006, pág. 87–100

Sobre la diferenciabilidad de funciones en espacios de Banach

Roberto C. Cabrales* & Marko A. Rojas-Medar*

Resumen. Se da un criterio que establece la diferenciabilidad de una función $f : X \to Y$, donde X y Y son espacios de Banach. Este criterio se aplica además para obtener las reglas usuales del cálculo diferencial de una forma elemental, y también para obtener la diferenciabilidad de algunas normas de espacios funcionales clásicos.

Abstract. A criterion for the differentiability of a function $f : X \to Y$, where X and Y are both Banach spaces, is given. Moreover, this criterion is applied to obtain the usual rules of the differential calculus of an elementary fashion and to obtain the differentiability of some norms of classical functional spaces.

1. Introducción

En [2], Botsko y Gosser establecen un criterio para la diferenciabilidad de una función $f : V \to \mathbb{R}^n$ en un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, donde V es una vecindad abierta de $\boldsymbol{a}$. Este criterio es una generalización del resultado debido a Carathéodory (ver [7]), y dice lo siguiente:

Teorema 1.1. *f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ si y solo si existe $g : V \to \mathbb{R}^n$ continua en $\boldsymbol{a}$ tal que*

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in V,$$

donde $\cdot$ denota el producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Palabras y frases claves: diferenciabilidad según Fréchet, espacios de Banach.
***Key words*:** Fréchet differential, Banach spaces.
***MSC2000*:** 26B05, 26B12, 46E15, 54C30.

* Dpto. de Ciencias Básicas,Universidad del Bío-Bío, Casilla 447. Chillán, Chile.
e-mails: `rcabrale@ubiobio.cl`, `marko@ueubiobio.cl`
Marko Rojas-Medar es parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España, Proyecto MTM2007-63432, y por Fondecyt-Chile, Proyecto 1080628.

En el presente trabajo generalizamos el teorema anterior a espacios de Banach. Adicionalmente, demostramos la forma en la que podemos usar esta generalización para deducir algunos teoremas del cálculo diferencial de una manera elemental. Más precisamente, aplicamos el criterio obtenido para obtener las derivadas de algunas normas de espacios funcionales clásicos.

En [1], Acosta y Delgado demuestran nuevamente que la noción de derivada según Carathéodory es equivalente a la noción de derivada según Fréchet en $\mathbb{R}^n$ (Teorema 1.1). Usando la caracterización del Teorema 1.1, muestran algunos teoremas básicos de diferenciación de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, así como el Teorema de la Función inversa.

En [8], Pinzón y Paredes, hacen una revisión del concepto de derivada, comparando las definiciones según Gâteaux, Fréchet y Carathéodory. En dicho trabajo, los autores muestran las relaciones entre ellas y proporcionan una topología en $\mathbb{R}^2$ para la cual las tres definiciones son equivalentes.

El trabajo es organizado de la siguiente forma. En la sección 2, damos la extensión del Teorema 1.1 al caso de funciones de valor real y damos algunos corolarios y ejemplos. En la sección 3 damos la extensión del Teorema 1.1 al caso de funciones de valor vectorial, así como algunas consecuencias interesantes. Finalmente, en la sección 4 mostramos algunas aplicaciones de los resultados enunciados previamente.

2. El caso de funciones de valor real

En lo que sigue, X denotará un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|_X$, $\boldsymbol{x}_0$ será un punto en X, X^* el dual topológico de X, V una vecindad abierta de $\boldsymbol{x}_0$ en X, $f : V \to \mathbb{R}$ un funcional; si $l \in X^*$, denotamos por $\langle l, \boldsymbol{x}\rangle$ el valor de l en el punto $\boldsymbol{x} \in X$.

Inicialmente recordamos las definiciones de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet para funcionales.

Definición 2.1. Decimos que un funcional f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$ si existe un funcional lineal continuo L definido sobre X, i.e., $L \in X^*$ y $\eta : V_0 \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle L, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\rangle + \eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X, \tag{1}$$

donde V_0 es una vecindad abierta de $\mathbf{0}$ en X y

$$\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0.$$

Observación 2.2. Si f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$, entonces L es único, y es usual denotarlo por $f'(\boldsymbol{x}_0)$.

Teorema 2.3. *f es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ si y solo si existe $g : V \to X^*$ continuo en $\boldsymbol{x}_0$ tal que*

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\rangle \qquad \forall \boldsymbol{x} \in V. \tag{2}$$

Demostración.

(Necesidad) Definimos $\gamma : V \to X^*$ tal que

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_0).$$

Entonces, en (2) tenemos que

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \langle \gamma(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \langle g(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle.$$

A continuación, consideramos $L = g(\boldsymbol{x}_0) \in X^*$ y definimos $\eta : V_0 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\eta(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \langle \gamma(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z} \rangle / \|\boldsymbol{z}\|_X & \text{si } \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{0} & \text{si } \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Por lo tanto, para todo $\boldsymbol{x} \in V$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= \langle L, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \langle \gamma(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \\ &= \langle L, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X. \end{aligned}$$

Por otro lado, debido a que $g(\boldsymbol{x}) \to g(\boldsymbol{x}_0)$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, tenemos que $\gamma(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{0}$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, y de esta forma, para todo $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ tenemos

$$|\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)| = \left| \frac{\langle \gamma(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X} \right| \leq \|\gamma(\boldsymbol{x})\|_{X^*},$$

luego, $\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \to 0$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, y de esta forma obtenemos (1).
(Suficiencia) Por definición, para todo $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \langle L, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \frac{\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X^2. \tag{3}$$

Por otro lado, usando un de los Corolarios del Teorema de Hahn-Banach (ver [3, pág. 3]), inferimos que existe $h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0} \in X^*$ tal que

$$||h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}||_{X^*} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X, \tag{4a}$$

$$\langle h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X^2. \tag{4b}$$

(Notése que $h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}$ no es necesariamente único, pero esto no afecta la unicidad del lado derecho de la igualdad (4b)).
Entonces, para todo $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \langle L + \frac{\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X} h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle.$$

Por lo tanto, es natural considerar la función $g : V \to X^*$ definida como

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} L + \dfrac{\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X} h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}, & \text{si } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \\ L, & \text{si } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0. \end{cases}$$

De esta forma, es suficiente estudiar la continuidad de g en $\boldsymbol{x}_0$. Usando (4), se tiene que

$$\left\| \frac{\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X} h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0} \right\|_{X^*} \leq |\eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)|$$

para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$. Más aún,

$$\eta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\frac{h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0,$$

debido a que $\eta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \to 0$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$. Se tiene de esta forma que

$$g(\boldsymbol{x}) \to L = g(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{cuando} \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0.$$

Esto completa la demostración del teorema. ☑

Observación 2.4. Si X es un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$, la demostración del Teorema 2.3 es más simple y no se hace uso del Teorema de Hahn-Banach. Sin embargo, es necesario usar el Teorema de representación de Riesz-Fréchet (ver [3]). En este caso, es suficiente notar que

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),$$

y que existe un único $\boldsymbol{u} \in X$ tal que

$$\langle L, \boldsymbol{x}\rangle = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \qquad \text{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in X.$$

Por lo tanto, para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{\eta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \\ &= (\boldsymbol{u} + \frac{\eta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \end{aligned}$$

y es suficiente definir $g : V \to X$ tal que

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{u} + \dfrac{\eta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), & \text{si } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{u}, & \text{si } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

y seguir como antes.

Observación 2.5. Es fácil ver que si $X = \mathbb{R}^n$, entonces $g(\boldsymbol{x}_0)$ es el vector gradiente de f evaluado en $\boldsymbol{x}_0$, i.e.,

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_0}(\boldsymbol{x}_0)\right).$$

Las siguientes consecuencias del Teorema 2.3 son inmediatas.

Corolario 2.6. $\boldsymbol{x}_0$ *es un mínimo local de* f *(respectivamente, máximo local de* f*) si y solo si existe un* $r > 0$ *tal que*

$$\langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle \geq 0,$$

(respectivamente, $\langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle \leq 0$*) para todo*

$$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in X \ : \ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X < r\}.$$

Corolario 2.7. *x_0 es un mínimo local estricto de f (respectivamente, máximo local estricto de f) si y solo si existe $r > 0$ tal que*

$$\langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle > 0,$$

(respectivamente, $\langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle < 0$) para todo $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, r) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$.

Ahora, mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.8. Sea $X = \ell^2$ el espacio de Hilbert de aquellas sucesiones $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son elementos de X, se define el producto interno entre ellos como

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Sea $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{i^3} - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^4 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \left(\frac{x_i}{i^3} - x_i^3 \right).$$

f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$. Para probarlo, es suficiente considerar

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i}{i^3} - x_i^3 \right) \mathbf{e}_i,$$

donde $\{\mathbf{e}_i = (\delta_{ki})_{k \in \mathbb{N}} \, : \, i \in \mathbb{N}\}$ es la base de Hilbert estándar de ℓ^2. Más aún,

$$f'(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = 0.$$

Notamos también que $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ no es un extremo de f. De hecho, si consideramos $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $x_i = 1/i$, tenemos que

$$(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = \frac{1}{i^5} - \frac{1}{i^4} < 0,$$

y si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $x_i = -1/i + 1/i^{3/4}$, obtenemos que

$$(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) > 0.$$

Ejemplo 2.9 (Botsko & Gosser [2]). Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \operatorname{sen} \frac{1}{\|x\|}, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0 \\ 0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a_i > 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$. En efecto, considérese la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{b_i} \operatorname{sen} \frac{1}{\|x\|} \right) \mathbf{e}_i, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \\ 0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

donde $b_i = 1 - a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, y donde $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Notemos que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}) = (g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}),$$

y que g es continua en $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$. Por el Teorema 2.3, se tiene que f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$. Además, $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ no es un extremo de f, debido a que $(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})$ no tiene un signo definido. Más aún, $f'(\mathbf{0}) = 0$.

Es fácil probar que las sumas, productos y cocientes de funciones diferenciables según Fréchet son diferenciables según Fréchet. Más precisamente, usando el criterio presentado en este trabajo y la regla de la cadena, podemos probar el siguiente corolario:

Corolario 2.10. *Sean $f, h : V \to \mathbb{R}$. Supóngase que f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$ y es tal que $f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$. Si además h es continua en $\boldsymbol{x}_0$, entonces el producto fh es una función diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$.*

Demostración. Como f es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$, existe una vecindad V' de $\boldsymbol{x}_0$ tal que la función $g : V' \to X^*$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$. Note que podemos escoger la vecindad V' de tal forma que h esté definida en V'. Tenemos que

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \qquad \text{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in V'.$$

Multiplicando la igualdad anterior por $h(\boldsymbol{x})$, obtenemos que

$$f(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x})\langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = \langle h(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle,$$

válido para todo $\boldsymbol{x} \in V'$. Es claro que $hg : V' \to X^*$ es una función continua en $\boldsymbol{x}_0$. Por lo tanto, usando el Teorema 2.3 deducimos que la función fh es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$, y es tal que

$$(fh)'(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0)g(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0)f'(\boldsymbol{x}_0). \qquad ☑$$

3. Extensión al caso de funciones de valor vectorial

Sean X e Y espacios de Banach, con normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente. En lo que sigue, $\mathcal{L}(X, Y)$ denotará el conjunto de los operadores lineales continuos Λ, definidos en X y con valores en Y.

El objetivo de la presente sección es presentar el análogo vectorial del Teorema 2.3. Para ello, recordamos la noción de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet para operadores.

Definición 3.1. Sea $F : V \to Y$ un operador. Decimos que el operator F es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$, si existe $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in V$

$$F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}_0) + \Lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X, \tag{5}$$

donde $\alpha : V_0 \to Y$ es una función definida en una vecindad abierta V_0 de $\mathbf{0} \in X$ tal que $\lim\limits_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \|\alpha(\mathbf{h})\|_Y = 0$.

El operador Λ se llama la derivada de Fréchet de F en el punto $\boldsymbol{x}_0$, y es usual denotarlo como $F'(\boldsymbol{x}_0)$. Claramente, si $F'(\boldsymbol{x}_0)$ existe, es única.

El siguiente teorema nos ofrece una caracterización de las funciones diferenciables según Fréchet.

Teorema 3.2. *F es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$ si y solo si existe una función $G : V \to \mathcal{L}(X,Y)$ continua en $\boldsymbol{x}_0$ tal que*

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \quad \textit{para todo} \;\; \boldsymbol{x} \in V. \tag{6}$$

Demostración.
(Necesidad). Sea $\gamma : V \to \mathcal{L}(X,Y)$, definida para cada $\boldsymbol{x} \in V$, en la forma

$$\gamma(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}) = (G(\boldsymbol{x}) - G(\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{z}) = G(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}) - G(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}),$$

para todo $\boldsymbol{z} \in X$. Es claro que $\gamma(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}(X,Y)$ para cada $\boldsymbol{x} \in V$. Por lo tanto, (6) nos queda como

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = \gamma(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + G(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0). \tag{7}$$

Sea $\Lambda = G(\boldsymbol{x}_0)$. Entonces $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$, y podemos definir $\alpha : X \to Y$ tal que

$$\alpha(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \dfrac{\gamma(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z}\|_X}, & \text{si } \boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{si } \boldsymbol{z} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Se tiene entonces que para $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$,

$$\gamma(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X.$$

Entonces, para $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$, (7) queda

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X.$$

Por otro lado, $\|\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_Y \le |\gamma(\boldsymbol{x})|$ y, debido a que $\gamma(\boldsymbol{x}) \to \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, obtenemos que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \|\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_Y = 0,$$

y de esta forma se verifica la igualdad (5).
(Suficiencia) Para todo $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ tenemos que

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X^2.$$

Haciendo uso del corolario del Teorema de Hahn-Banach (ver Brezis [3]), podemos escribir

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X} h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0},$$

donde $h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}$ satisface (4).
Ahora, para cada $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ definimos la función $\theta(\boldsymbol{x}) : X \to Y$ como

$$\theta(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}) = \frac{\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_X} h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{z}), \quad \text{para todo } \boldsymbol{z} \in X,$$

y para $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$, como
$$\theta(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}, \quad \text{para todo } \boldsymbol{z} \in X.$$
De esta forma, para todo $\boldsymbol{x} \in V$ se obtiene que
$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = (\Lambda + \theta(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$
Consideremos ahora la función $G : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ definida como $G(\boldsymbol{x}) = \Lambda + \theta(\boldsymbol{x})$. Como una consecuencia inmediata, para todo $\boldsymbol{x} \in V$ se tiene que
$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$
Ahora verificamos que $G(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$, y que $G(\cdot)$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$. Para ello es suficiente probar que

1. $\theta(\boldsymbol{x})$ es un elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$, para todo $\boldsymbol{x} \in V$,
2. $\theta(\boldsymbol{x}) \to \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$.

Demostremos el primer ítem. Nótese que $\theta(\boldsymbol{x})(\cdot)$ es lineal. Verificamos ahora la continuidad, es decir, verificamos que para todo $\boldsymbol{z} \in X$, se tiene que
$$\|\theta(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z})\|_Y \leq C\|\boldsymbol{z}\|_X,$$
con C una constante positiva. De esta forma,
$$\|\theta(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z})\|_Y = \left\| \frac{\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_X} h_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{z}) \right\|_Y \leq \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_Y \|\boldsymbol{z}\|_X. \tag{8}$$
Tomando $C = \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_Y$ concluimos lo deseado.
Demostremos ahora el segundo ítem. Las desigualdades en (8) implican que
$$\|\theta(\boldsymbol{x})\|_Y \leq C = \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_Y.$$
Entonces, si $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, la hipótesis implica que
$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_Y = 0,$$
y así
$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \|\theta(\boldsymbol{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0.$$
☑

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 3.3 (Regla de la Cadena). *Sean X, Y, Z espacios de Banach. Supóngase que $F : U \to Y$ es un operador definido en una vecindad abierta U de $\boldsymbol{x}_0$ que es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$. Supóngase además que $G : V \to Z$ es un operador definido en una vecindad abierta V de $\boldsymbol{y}_0 = F(\boldsymbol{x}_0)$ tal que $F(U) \subset V$. Si G es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{y}_0$, entonces el operador compuesto $H = G \circ F : U \to Z$ es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$, y se tiene la relación*
$$H'(\boldsymbol{x}_0) = G'(\boldsymbol{y}_0)F'(\boldsymbol{x}_0).$$

Demostración. Como G es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{y}_0 = F(\boldsymbol{x}_0)$, existe una función $\varphi : V \to \mathcal{L}(Y, Z)$ continua en $\boldsymbol{y}_0$ tal que, para todo $\boldsymbol{y} \in Y$ se tiene que

$$G(\boldsymbol{y}) - G(\boldsymbol{y}_0) = \varphi(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0). \tag{9}$$

Tomando $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ con $\boldsymbol{x} \in U$, la igualdad (9) implica que para todo $\boldsymbol{x} \in U$,

$$G(F(\boldsymbol{x})) - G(F(\boldsymbol{x}_0)) = \varphi(F(\boldsymbol{x}))(F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0)). \tag{10}$$

Por otro lado, usando el Teorema 2.3, existe una función $\psi : U \to \mathcal{L}(X, Y)$ continua en $\boldsymbol{x}_0$ tal que

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = \psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in U. \tag{11}$$

Sustituyendo (11) en el lado derecho de (10), para todo $\boldsymbol{x} \in U$ se obtiene que

$$G(F(\boldsymbol{x})) - G(F(\boldsymbol{x}_0)) = \varphi(F(\boldsymbol{x}))(\psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)).$$

Consideremos ahora

$$\theta(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}) = \varphi(F(\boldsymbol{x}))(\psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w})),$$

donde $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \in U$. Tenemos entonces que $\theta : V \to \mathcal{L}(X, Z)$. De hecho, la linealidad $\theta(\boldsymbol{x})(\cdot)$ es obvia y la continuidad se obtiene a partir del estimativo

$$\begin{aligned} \|\theta(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w})\|_Y &= \|\varphi(F(\boldsymbol{x}))(\psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}))\|_Y \\ &\leq \|\varphi(F(\boldsymbol{x}))\| \; \|\psi(\boldsymbol{x})\| \; \|\boldsymbol{w}\|_X \\ &\leq c\|\boldsymbol{w}\|_X. \end{aligned}$$

Luego θ es continuo en $\boldsymbol{x}_0$, y se tiene

$$\begin{aligned} \theta(\boldsymbol{x}_0)(\cdot) &= \varphi(F(\boldsymbol{x}_0))(\psi(\boldsymbol{x}_0)(\cdot)) \\ &= \varphi(\boldsymbol{y}_0)(\psi(\boldsymbol{x}_0)(\cdot)) \\ &= G'(\boldsymbol{y}_0)(F'(\boldsymbol{x}_0)(\cdot)), \end{aligned}$$

es decir,

$$H'(\boldsymbol{x}_0) = (G \circ F)'(\boldsymbol{x}_0) = G'(\boldsymbol{y}_0)F'(\boldsymbol{x}_0),$$

que es la identidad deseada. ☑

Corolario 3.4. *Sea V una vecindad abierta del punto $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in X \times Y$ (podemos suponer que $V = V_{\boldsymbol{x}_0} \times V_{\boldsymbol{y}_0}$, donde $V_{\boldsymbol{x}_0}$ e $V_{\boldsymbol{y}_0}$ son vecindades abiertas de los puntos $\boldsymbol{x}_0 \in X$ e $\boldsymbol{y}_0 \in Y$, respectivamente). Considérese $\psi : V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \Phi(\boldsymbol{y}).$$

Supóngase que $\varphi : V_{\boldsymbol{x}_0} \to \mathbb{R}$ es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$ y que $\Phi : V_{\boldsymbol{y}_0} \to \mathbb{R}$ es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{y}_0$. Entonces ψ es diferenciable según Fréchet en $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ y

$$\psi'(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = (\varphi'(\boldsymbol{x}_0), \Phi'(\boldsymbol{y}_0)).$$

Demostración. Debido a que φ es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$, el Teorema 3.2 implica que existe una función $g : V_{\boldsymbol{x}_0} \to X^*$ continua en $\boldsymbol{x}_0$ tal que, para todo $\boldsymbol{x} \in V_{x_0}$ se tiene

$$\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) = \langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle. \tag{12}$$

Análogamente, existe $h : V_{\boldsymbol{y}_0} \to Y^*$ continua en $\boldsymbol{y}_0$ tal que, para todo $\boldsymbol{y} \in V_{\boldsymbol{y}_0}$ se tiene que

$$\Phi(\boldsymbol{y}) - \Phi(\boldsymbol{y}_0) = \langle h(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \rangle. \tag{13}$$

Sumando (12) y (13), para todo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V$ obtenemos que

$$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \langle g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \langle h(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \rangle.$$

A continuación observamos que el dual topológico de $X \times Y$, i.e., $(X \times Y)^*$ puede ser identificado con $X^* \times Y^*$. Por lo tanto, $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (g(\boldsymbol{x})\ ,\ h(\boldsymbol{y}))$ pertenece a $(X \times Y)^*$, y de esta forma

$$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \langle K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \rangle.$$

Notemos que $K(\cdot, \cdot)$ es continua en $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$. Más aún, el Teorema 3.2 implica que ψ es diferenciable según Fréchet en $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ y

$$\psi'(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \quad = \quad K(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = (g(\boldsymbol{x}_0), h(\boldsymbol{x}_0) = (\varphi'(\boldsymbol{x}_0), \Phi'(\boldsymbol{y}_0)),$$

que es la identidad deseada. ☑

El siguiente resultado es bien conocido.

Lema 3.5. *Sea V una vecindad abierta de $\boldsymbol{x}_0$. Supóngase que $T : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0$ y tal que $T(\boldsymbol{x}_0)$ es invertible. Entonces, existe una vecindad abierta U de $\boldsymbol{x}_0$ tal que $T(x)$ es invertible para todo $\boldsymbol{x} \in U$.*

Proposición 3.6. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Sean $U \subset X, V \subset Y$ conjuntos abiertos y $F : V \to W$ un operador invertible. Sea $\boldsymbol{x}_0 \in V$ tal que $F'(\boldsymbol{x}_0)$ exista y tal que $F'(\boldsymbol{x}_0)$ sea invertible. Entonces, la función inversa $F^{-1} : W \to V$ es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{y}_0 = F(\boldsymbol{x}_0)$ y*

$$(F^{-1})'(\boldsymbol{y}_0) = (F'(F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)))^{-1}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.2, existe $G : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ continua en $\boldsymbol{x}_0$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in V$ se tiene

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

y $G(\boldsymbol{x}_0) = F'(\boldsymbol{x}_0)$. Por el Lema 3.5, existe una vecindad abierta U de $\boldsymbol{x}_0$ tal que $G(\boldsymbol{x})$ es invertible para cada $\boldsymbol{x} \in U$, y consecuentemente, para todo $\boldsymbol{x} \in V$, se tiene

$$(G(\boldsymbol{x}))^{-1}(F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0. \tag{14}$$

Definiendo $\boldsymbol{x} = F^{-1}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}_0 = F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$, la igualdad (14) nos da

$$(G(F^{-1}(\boldsymbol{y})))^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) = F^{-1}(\boldsymbol{y}) - F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$$

para todo $\boldsymbol{y} \in W$. Notamos también que la función $\boldsymbol{y} \to (G(F^{-1}(\boldsymbol{y})))^{-1}$ es continua en $\boldsymbol{y}_0$. Usando el Teorema 3.2, se obtiene que F^{-1} es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{y}_0$ y

$$\begin{aligned}(F^{-1}(\boldsymbol{y}_0))^{-1} &= (G(F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)))^{-1} = (G(\boldsymbol{x}_0))^{-1} \\ &= (F'(\boldsymbol{x}_0))^{-1} = (F'(F^{-1}(\boldsymbol{y}_0)))^{-1},\end{aligned}$$

que es la igualdad buscada. ☑

4. Aplicaciones

En la presente sección, haremos uso del Teorema 2.3 para estudiar la diferenciabilidad según Fréchet de las normas de varios espacios funcionales clásicos. Es importante observar que estas preguntas son fundamentales en la geometría de los espacios de Banach (ver, por ejemplo, Diestel [4] o Giles [5]).

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Consideremos los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, definidos para $1 \leq p < \infty$. La norma en estos espacios es dada por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(w)|^p \, dw\right)^{1/p}, \tag{15}$$

donde dw es una medida de Lebesgue. Tenemos entonces el siguiente resultado

Proposición 4.1. *La norma L^p (15) es diferenciable según Fréchet para cualquier función $f_0 \neq 0$ si $1 < p < \infty$, y la derivada de Fréchet es*

$$\frac{|f|^{p-1}\operatorname{sgn}(f)}{\|f\|^{p-1}},$$

donde $\operatorname{sgn}(f)$ indica la función signo.

Si $p = 1$, la norma L^1 no es diferenciable según Fréchet en ninguna parte.

Demostración. Es suficiente considerar la aplicación $f \to \|f\|_{L^p}^p$ con $1 < p < \infty$, ya que la aplicación $x \to x^{1/p}$ es diferenciable para todo número real $x \neq 0$.

Sea $f_0 \neq 0$ un elemento arbitrario de $L^p(\Omega)$. Por el Teorema 2.3, debemos encontrar $g(f) \in (L^p(\Omega))^*$ tal que para toda $f \in L^p(\Omega)$ se cumpla

$$\|f\|_{L^p}^p - \|f_0\|_{L^p}^p = \langle g(f), f - f_0\rangle.$$

Es bien conocido que el dual topológico $L^p(\Omega)$ se puede identificar con $L^q(\Omega)$, donde $1/p + 1/q = 1$ (ver Brézis [3] o Kreyszig [6]). Entonces, es suficiente encontrar $g_f \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\|f\|_{L^p}^p - \|f_0\|_{L^p}^p = \int_\Omega g_f(f - f_0),$$

para toda $f \in L^P(\Omega)$, o de forma equivalente,

$$\int_\Omega (|f(w)|^p - |f_0(w)|^p - g_f(f(w) - f_0(w))\, dw = 0.$$

La desigualdad anterior implica que, para toda $f \neq f_0$,

$$\int_{\Omega}\left(\frac{|f(w)|^p - |f_0(w)|^p}{f(w) - f_0(w)} - g_f\right)(f(w) - f_0(w))\,dw = 0.$$

Por lo tanto, es natural definir

$$g_f = \begin{cases} \dfrac{|f(w)|^p - |f_0(w)|^p}{f(w) - f_0(w)}, & \text{si} \quad f \neq f_0, \\ \lim\limits_{f \to f_0} g_f, & \text{si} \quad f = f_0. \end{cases} \tag{16}$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\lim_{f \to f_0} g_f = p|f_0(w)|^{p-1}\operatorname{sgn}(f_0(w)),$$

donde $\operatorname{sgn}(f_0(w))$ indica el signo de $f_0(w)$. Es decir, es suficiente ver que g_f dado por (16) pertenece a $L^q(\Omega)$, i.e.,

$$\int_{\Omega} |g_f|^q < \infty,$$

lo que es un ejercicio fácil.

Ahora, consideramos el caso $p = 1$. En este caso, el dual topológico de $L^1(\Omega)$ se identifica con $L^\infty(\Omega)$ ([3] ó [6]). Por el Teorema 2.3, se tiene que

$$\|f\|_{L^1} - \|f_0\|_{L^1} = \int_{\Omega} g_f(f - f_0) \tag{17}$$

para toda $f \in L^1(\Omega)$, donde $g_f \in L^\infty(\Omega)$. Entonces, para toda $f \neq f_0$ tenemos que

$$\int_{\Omega}\left(\frac{|f| - |f_0|}{f - f_0} - g_f\right)(f - f_0) = 0,$$

y en consecuencia

$$g_f = \frac{|f| - |f_0|}{f - f_0} \qquad \text{si} \qquad f \neq f_0.$$

Para obtener la consecuencia de $f \to g_f$ debemos definir

$$g_{f_0} = \lim_{f \to f_0} g_f. \tag{18}$$

Pero se puede verificar fácilmente que el limite (18) no existe. Por ello, no es posible encontrar una función $g_f \in L^\infty(\Omega)$ continua en $f = f_0$ que verifique (17), y el Teorema 2.3 garantiza que $\|f\|_{L^1}$ no es diferenciable según Fréchet en el punto f_0. Debido a que f_0 fue escogido arbitrariamente, deducimos que la norma $\|f\|_{L^1}$ no es diferenciable según Fréchet en ningún punto. ☑

Observación 4.2. Siguiendo un procedimiento análogo, podemos trabajar con los espacios ℓ^p para $1 \leq p < \infty$.

Ahora, consideramos a X como un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)$. Tenemos así el siguiente resultado:

Proposición 4.3. *La norma $\|\cdot\|$ inducida por el producto interno $(\cdot,\cdot)$ es diferenciable según Fréchet en cualquier $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, y su derivada según Fréchet es $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$.*

Demostración. Es suficiente considerar

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

Sea $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ arbitrario. Para todo $\boldsymbol{x} \in X$ tenemos que

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|^2 \quad = \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Consideremos la función

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \\ 2\boldsymbol{x}_0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0. \end{cases}$$

Entonces, para todo $\boldsymbol{x} \in X$, tenemos que

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|^2 = (g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Debido a que X se puede identificar con X^*, tenemos que $g(\boldsymbol{x}) \in X^*$ para todo $\boldsymbol{x} \in X$, y como $\boldsymbol{x} \to g(\boldsymbol{x})$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$, el Teorema 2.3 nos permite deducir que $\|\boldsymbol{x}\|^2$ es diferenciable según Fréchet en $\boldsymbol{x}_0$ con derivada igual a $2\boldsymbol{x}_0$. El Corolario 3.4 implica la conclusión de la Proposición. ☑

El Teorema 3.2 sugiere la siguiente definición.

Definición 4.4. Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos, V una vecindad abierta de $\boldsymbol{x}_0 \in X$ y $F : V \to Y$ una aplicación. Decimos que F es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ si y solo si existe $G : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ continua en $\boldsymbol{x}_0$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in V$

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Con esta definición, la regla de la cadena se verifica, y por lo tanto todos los teoremas fundamentales del cálculo diferencial, así como la Proposición 3.6.

Como comentario final, observamos que puede ser interesante estudiar a qué tipo de convergencia corresponde la definición anterior. En particular, en el caso de que X e Y sean espacios localmente convexos, permitiría desarrollar una teoría robusta de cálculo diferencial en los espacios de distribuciones.

Referencias

[1] E. Acosta & C. Delgado. "Fréchet vs. Carathéodory." *Amer. Math. Montly*, 101 (1994), 332-338.

[2] M. Botsko & R. Gosser. "On the differentiability of functions of several variables." *Amer. Math. Montly*, 92 (1985), 663-665.

[3] H. Brézis. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.

[4] J. Diestel. "Geometry of Banach spaces." *Lect. Notes in Math.*, 485, Springer-Verlag, 1974.

[5] J.R. Giles. *Convex Analysis with Applications in the Differentiation of Convex Functions.* Pitman, 1982.

[6] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* J. Wiley and Sons, 1978.

[7] M. Heins. *Complex Function Theory.* Academic Press, New York, 1968.

[8] S. Pinzón & M. Paredes. "La derivada de Carathédory en $\mathbb{R}^2$." *Revista Integración*, 18 (1999), 65-98.

R. C. Cabrales & M. A. Rojas-Medar
Dpto. de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío,
Casilla 447. Chillán, Chile.
e-mail: rcabrale@ubiobio.cl, marko@ueubiobio.cl