

Pilas de arena sobre grafos dirigidos y algo de complejidad

CAROLINA MEJÍA MORENO*

Resumen. En este artículo estudiamos el Modelo de Pilas de Arena sobre grafos dirigidos. El comportamiento del modelo sobre grafos dirigidos es más complejo (en términos estrictos) que sobre grafos no dirigidos; es por ello que, para muchas de las preguntas centrales de la teoría, no se conoce la respuesta en el caso dirigido. En este artículo se ha sintetizado la teoría para digrafos, se han simplificado algunas pruebas y se concretan algunos resultados relacionados con la complejidad de predicción del autómata.

Abstract. In this work we study the Abelian Sandpile Model on directed graphs. The model is more complex on directed graphs than on undirected graphs, because of which there are many questions that remain without an answer. We survey the basic theory of the model on directed graphs and present some new results.

1. Introducción

El modelo abeliano de pila de arena (*Abelian Sandpile Model*, ASM) fue introducido por D. Dhar [5] como una manera de representar los procesos de difusión física llamados fenómenos de *autoorganización*. Entre los fenómenos de autoorganización más conocidos están las quemaduras forestales, el equilibrio biológico y las avalanchas de tierra. La idea es partir de sistemas inestables, y con reglas que controlan el espacio-tiempo, llegar a sistemas estables. En el caso de las quemaduras forestales, por ejemplo, el sistema enciende los elementos que puede encender hasta que se asfixia y se estabiliza. Aunque es un modelo abstracto, el ASM permite dar respuesta a algunas de las preguntas que surgen en muchos procesos de este tipo, pero el interés de este escrito es exclusivamente matemático.

Dejando a un lado la interpretación física, el modelo abeliano de pila de arena, ASM, tiene una buena estructura matemática, razón por la cual ha tomado gran importancia

Palabras y frases claves: pilas de arena, laplacianos de grafos, autómatas celulares, complejidad.

MSC2000: Primaria: 68Q05. Secundaria: 68Q80, 68R01.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia,
e-mail: cmejiam@uis.edu.co

en el mundo de los modelos que representan fenómenos de autoorganización. Además, el modelo ha sido intensamente estudiado dentro de la teoría combinatoria, especialmente tras la aparición de [2], donde N. Biggs exhibe profundas relaciones entre el modelo de pilas de arena, la teoría del potencial sobre grafos, los juegos de encendido en grafos y la teoría de laplacianos de grafos. Tras Biggs aparecieron trabajos que estudiaban el modelo desde el punto de vista computacional [1]; tales trabajos lograron clarificar casi completamente la estructura combinatoria y algorítmica del modelo sobre grafos no dirigidos. El modelo de pilas de arena sobre grafos dirigidos presenta una estructura mucho más compleja. Es por ello que es mucho lo que queda por investigar y por decir del modelo de pilas de arena en el caso dirigido. Este trabajo es un pequeño avance en esta dirección.

2. Preliminares

En esta sección listaremos algunas definiciones y algunos resultados que serán usados a lo largo del escrito.

2.1. Preliminares algebraicos

Definición 2.1 (Semigrupo conmutativo). Sea A un conjunto no vacío y sea \cdot una operación binaria sobre A . Si \cdot es una operación asociativa y conmutativa, se dice que (A, \cdot) es un semigrupo conmutativo.

En adelante y mientras el contexto lo permita a los semigrupos conmutativos los llamaremos sólo semigrupos.

Definición 2.2 (Monoide conmutativo). Sea \mathcal{M} un conjunto no vacío y sea \cdot una operación binaria sobre \mathcal{M} . Si \cdot es una operación asociativa, conmutativa y tiene módulo (es decir $(\exists e \in \mathcal{M}) (\forall x \in \mathcal{M}) (e \cdot x = x \cdot e = x)$), se dice que la estructura (\mathcal{M}, \cdot) es un monoide.

Siempre que se pueda escribiremos \mathcal{M} en lugar de (\mathcal{M}, \cdot) .

Definición 2.3 (Ideal). Dado un monoide \mathcal{M} , un ideal de \mathcal{M} es un subconjunto $I \subset \mathcal{M}$ tal que $(\forall a \in \mathcal{M}) (\forall b \in I) (a \cdot b \in I)$. (Cuando I sea un ideal de \mathcal{M} lo notaremos $I \triangleleft \mathcal{M}$).

Note que dados $I, J \triangleleft \mathcal{M}$, $I \cap J$ contiene el conjunto

$$IJ = \{c \in \mathcal{M}: \text{existe } a \in I \text{ y existe } b \in J \text{ tales que } c = a \cdot b\}.$$

Lo anterior implica que:

Hecho 2.4.

1. La intersección de un número finito de ideales no vacíos es no vacía.
2. Dado un monoide finito \mathcal{M} , $\bigcap_{I \triangleleft \mathcal{M}} I$ es un ideal no vacío de \mathcal{M} .

Definición 2.5 (Núcleo). Sea \mathcal{M} un monoide finito. El *núcleo de \mathcal{M}* es igual a la intersección de todos los ideales de \mathcal{M} $\bigcap_{I \triangleleft \mathcal{M}} I$. Al núcleo de \mathcal{M} lo denotaremos con el símbolo $\mathcal{K}(\mathcal{M})$.

El hecho 2.4.1 implica que, dado un monoide finito \mathcal{M} , $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es un ideal no vacío de \mathcal{M} .

Lema 2.6. *Sea A un semigrupo no vacío y finito tal que*

$$(\forall a, b \in A) (\exists x \in A) (a \cdot x = b).$$

Entonces A es un grupo.

Demostración. Probaremos dos cosas: que A posee módulo y que A tiene inversos.

1. Sea $a \cdot x = a$; por hipótesis, esta ecuación tiene solución para $a \in A$, llamémosla e_a . Veamos que esta solución sirve de módulo para (A, \cdot) . Para todo $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $ya = x$, entonces

$$xe_a = (ya)e_a = y(ae_a) = ya = x.$$

2. Para probar que todo elemento de A tiene inverso es suficiente con plantear la ecuación correspondiente y utilizar la hipótesis. ☑

Teorema 2.7. *Dado un monoide finito \mathcal{M} , $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es un grupo.*

Demostración. Note que $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es un semigrupo ya que si $a, b \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$, como $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es ideal, $a \cdot b \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$; además, como \cdot es asociativa y conmutativa en \mathcal{M} , también lo será en $\mathcal{K}(\mathcal{M})$. Si usamos el lema anterior nos faltaría probar que $(\forall a, b \in \mathcal{K}(\mathcal{M})) (\exists x \in \mathcal{K}(\mathcal{M})) (a \cdot x = b)$, es decir, probar que $a \cdot \mathcal{K}(\mathcal{M}) = \mathcal{K}(\mathcal{M})$. Pero $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es un ideal de \mathcal{M} así que para todo $c \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$, $ac \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$; tenemos entonces que $a \cdot \mathcal{K}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{M})$. Por otro lado, $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es la intersección de todos los ideales de \mathcal{M} incluyéndolo, entonces $a \cdot \mathcal{K}(\mathcal{M}) \supseteq \mathcal{K}(\mathcal{M})$. Podemos pues concluir que $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ es grupo. ☑

2.2. Preliminares en teoría de grafos

Un digrafo es un grafo en el cual las aristas tienen dirección. Una definición formal de digrafo es la siguiente:

Definición 2.8. Un digrafo G es un par $(V(G), E(G))$, donde, $V(G)$ es un conjunto al que llamaremos el conjunto de vértices de G y $E(G)$ es un subconjunto de $V(G) \times V(G)$ al que llamaremos el conjunto de aristas de G .

Note que dado $e \in E(G)$, e es una pareja ordenada (u, v) de elementos de $V(G)$. La pareja $(u, v) \in E(G)$ podemos imaginarla como una arista que va de u a v , es decir como un puente entre u y v que solo puede ser cruzado en el sentido antes indicado. A lo largo del escrito supondremos que los digrafos no contienen lazos, i.e., no contienen aristas de

la forma (u, u) . Dado u un vértice de G , a u podemos asociarle dos cantidades. A la primera de estas cantidades la llamaremos *grado de salida* de u , y corresponde al número de aristas de G que tiene a u como extremo inicial; a lo largo del escrito al grado de salida de u lo denotaremos con el símbolo $\deg^+(u)$. La segunda cantidad, $\deg^-(u)$, el grado de entrada de u , corresponde al número de aristas de G que tiene a u como extremo final.

Un camino en un digrafo G es un sucesión de aristas $(u_1, v_1), \dots, (u_m, v_m)$ que satisface la siguiente condición: Para todo $i \leq m - 1$, $v_i = u_{i+1}$. Dado $(u_1, v_1), \dots, (u_m, v_m)$ un camino en G , diremos que u_1 es su extremo inicial, v_m es su extremo final y que $m - 1$ es su longitud. Dados u y v dos vértices de G , diremos que v es accesible desde u si y solo si existe un camino $(u_1, v_1), \dots, (u_m, v_m)$ tal que $u_1 = u$ y $v_m = v$. Si v es accesible desde u , $d(u, v)$ (la *distancia* entre u y v) es igual a la longitud del camino más corto que va de u a v .

Definición 2.9. Un digrafo G tiene la propiedad de amalgamación si y solo si para todo $u, v, w \in V(G)$, si $(u, v), (u, w) \in E(G)$, existe $s \in V(G)$ tal que $(v, s), (w, s) \in E(G)$.

Teorema 2.10 (Teorema de confluencia). *Sea G un digrafo con la propiedad de amalgamación y sea u un elemento de $V(G)$. Todos los caminos maximales que tienen a u como extremo inicial tienen la misma longitud y el mismo extremo final.*

Para una prueba del teorema se puede consultar [10].

En lo que sigue, dado G un digrafo con $n + 1$ vértices, diremos que el vértice $n + 1$ es un *sumidero*^{*} del grafo, y de él supondremos que:

1. $\deg^+(n + 1) = 0$.
2. $n + 1$ es accesible desde todo vértice de G .

Las hipótesis anteriores sobre el sumidero, especialmente el ítem 2, nos permiten definir la noción de radio de un digrafo, la cual será aplicable a todos los digrafos considerados en este escrito.

Definición 2.11. El radio de G , que denotaremos con el símbolo $\delta(G)$, es igual a $\max_{v \in V(G)} \{d(v, n + 1)\}$.

Nota. Nótese que todo digrafo G con n vértices puede ser transformado en un digrafo G' con $n + 1$ vértices que satisfaga las hipótesis asumidas en este escrito, para lo cual es suficiente agregar a G un vértice nuevo, llamémoslo s , tal que $\deg^+(s) = 0$ y $\deg^-(s) = n$.

3. El modelo de pilas de arena, el caso dirigido

Vamos a describir cómo funciona el autómata de pila de arena; recuérdese que un autómata celular es un modelo matemático que representa sistemas dinámicos que varían, a través del tiempo, a pasos discretos. Un autómata es la estructura matemática que sirve

^{*}La diferencia con otros modelos de pilas de arena (especialmente Chip Firing Game) y el SPM es precisamente la existencia de sumidero.

para modelar sistemas naturales que puedan ser descritos como una colección masiva de objetos simples que interactúan localmente unos con otros.

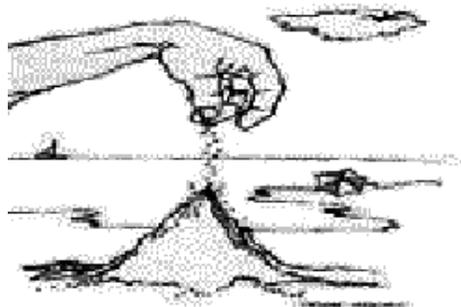


Figura 1. Modelo de pilas de arena.

Hablemos pues del autómata que nos interesa. Imagínense que queremos simular cómo se autoorganizan los granos de arena en una pila a la cual se le agregan granos como se observa en la figura anterior. El modelo es un grafo G dirigido, y en cada vértice de G ponemos un número finito de granos de arena. Para nuestro autómata esta es la configuración inicial o el espacio ambiente. Además, le pedimos al grafo que tenga un vértice que cumpla las condiciones del vértice sumidero.

Definición 3.1 (Configuración). Una configuración en el instante i del cómputo es una función f_i del conjunto de vértices $V(G)$ del grafo en el conjunto de números naturales que nos da información acerca del número de granos de arena en cada vértice en el instante i .

Definición 3.2 (Vértices inestables). $v \in V(G)$ es un vértice *inestable en el instante i* si y sólo si $f_i(v) \geq \deg^+(v)$, es decir, si el vértice v tiene más granos de arena en el instante i que aristas que salen de él. De igual forma, un vértice v es *estable en el instante i* si $f_i(v) < \deg^+(v)$.

Ahora vamos a explicar las reglas de transición del autómata para pasar de una configuración $f_i(V(G))$ en el instante i a la siguiente configuración $f_{i+1}(V(G))$ en el instante $i + 1$:

1. Si $v \in V(G)$ es inestable en el instante i del cómputo, entonces $f_i(v) \geq \deg^+(v)$. En este caso el vértice v dona un grano de arena a cada vértice vecino obteniendo en el siguiente instante del cómputo $f_{i+1}(v) = f_i(v) - \deg^+(v)$ granos de arena. En este caso diremos que el vértice v se encendió.
2. De igual manera, si v es inestable en el instante i y se enciende, entonces para todo $u \in V(G)$, si $(v, u) \in E(G)$ entonces $f_{i+1}(u) = f_i(u) + 1$, y $f_{i+1}(u) = f_i(u)$ en caso contrario.
3. El sumidero **nunca** se enciende, sólo recibe de los demás vértices del grafo. Esta es la razón de su nombre.
4. El cómputo termina cuando todos los vértices (sin contar el sumidero) son estables. Es decir cuando $f_i(v) = f_{i+1}(v)$ para todo $v \in V(G)$.

Una sucesión de encendidos será llamada una *avalancha*. Dadas dos configuraciones f_i y f_j , diremos que f_j es *accesible* desde f_i si y solo si es posible llegar a f_j desde f_i a través de una avalancha. Utilizaremos el símbolo $f_i \rightarrow f_j$ para denotar que f_j es accesible desde f_i . Note que, si f_i es una configuración estable, no existen avalanchas que empiecen en f_i . A una avalancha que no pueda ser continuada, esto es, una avalancha tal que la configuración a la que nos lleva es estable, la llamaremos *maximal*.

Dada una configuración inicial f_0 , diremos que f_0 es convergente si y sólo si todas las avalanchas maximales que tienen a f_0 como inicio son finitas y terminan en la misma configuración estable.

Problema.

1. ¿Existen avalanchas infinitas?
2. ¿Existen configuraciones convergentes? ¿Existen configuraciones no convergentes?

En lo que sigue daremos respuesta a las preguntas anteriores. Dada una configuración inicial f_0 , la norma de f_0 , que denotaremos $\|f_0\|$, es igual a $\sum_{i=1}^n f_0(i)$ con $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$. Nótese que la norma de f_0 no es otra cosa que el número total de granos de arena dispuestos sobre vértices diferentes de $n + 1$.

Teorema 3.3. *No existen avalanchas infinitas. Además, la longitud de toda avalancha que empieza en f_0 está acotada por $n \|f_0\|^{\delta(G)}$.*

Demostración. Lo que probaremos es que, dada f_0 y dado v un vértice de G , el número de veces que v enciende durante una avalancha es menor o igual que $\|f_0\|^{d(v, n+1)}$. La prueba la haremos por inducción en $d(v, n + 1)$.

1. **Paso base:** Si $d(v, n + 1) = 1$, el vértice v no puede encender más que $\|f_0\|$ veces, dado que cada vez que el vértice v enciende, envía un grano de arena al vértice $n + 1$. Esto implica que, si v enciende $\|f_0\|$ veces, entonces en el instante $\|f_0\|$ del cómputo, no quedan granos de arena sobre los vértices diferentes a $n + 1$, y la configuración obtenida es estable.
2. **Hipótesis de inducción:** Suponemos que si $d(v, n + 1) = k$, v no puede encender más que $\|f_0\|^k$ veces.
3. Sea v un vértice tal que $d(v, n + 1) = k + 1$. Supóngase que v enciende al menos $\|f_0\|^{k+1} + 1$ veces. Dado que $d(v, n + 1) = k + 1$, existe u tal que $d(u, n + 1) = k$ y $(v, u) \in E(G)$. Como cada vez que v enciende, v envía un grano de arena a u , tenemos dos casos posibles, a saber: u enciende más que $\|f_0\|^k$ o en algún momento durante la avalancha u alberga más que $\|f_0\|$ granos de arena. Es claro que las dos opciones son imposibles, por lo tanto v puede encender a lo más $\|f_0\|^{k+1}$ veces. \square

Teorema 3.4. *Para todo digrafo G con sumidero $n + 1$ y para todo vértice v , todas las avalanchas maximales que comienzan en f_0 tienen la misma longitud y terminan en la misma configuración estable.*

Demostración. Considérese el grafo $\mathcal{C}(G)$ definido por:

- $V(\mathcal{C}(G)) := \mathbb{N}^n$, las configuraciones de G .
- $E(\mathcal{C}(G)) := \{(f, g) : \text{es posible pasar de } f \text{ a } g \text{ encendiendo un vértice}\}$.

Es fácil verificar que $\mathcal{C}(G)$ tiene la propiedad de amalgamación. El lema es un fácil corolario del teorema de confluencia, Teorema 2.10, aplicado a $\mathcal{C}(G)$. \square

Los teoremas anteriores nos permiten, dado un digrafo G , definir una función computable $\sigma_G : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^n$. La función σ_G está definida por $\sigma_G(f) := g$, si g es la única configuración estable a la que las avalanchas con inicio en f convergen. σ_G será llamada la *función de estabilización*, y dada f , $\sigma_G(f)$ será su *estabilización*.

Nota. La función σ_G es computable en tiempo $n \|f\|^{\delta(G)}$. Nótese que la función $n \|f\|^{\delta(G)}$ no es polinomial en el tamaño del par (G, f) , por lo que, a diferencia de lo que ocurre en el caso no dirigido [9], [4] no podemos asegurar (al menos por el momento) que σ_G sea calculable en tiempo polinomial. Por otro lado, Eriksson en [6] construye una familia de digrafos $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

1. $|G_i| = n$.
2. Existe f_i , tal que $\|f_i\|$ es polinomial en i , y toda avalancha maximal que inicia en f_i tiene longitud $\Omega(2^i)$ (exponencial).

Sea $\mathcal{M}(G)$ el conjunto de las configuraciones estables sobre G . Podemos usar la función σ_G para definir una operación binaria \oplus sobre $\mathcal{M}(G)$. La operación $\oplus : \mathcal{M}(G) \times \mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(G)$ se define para todo par $f, g \in \mathcal{M}(G)$, como $f \oplus g = \sigma_G(f + g)$, donde “+” es la suma de vectores en \mathbb{R}^n .

Es fácil verificar los siguientes hechos acerca de la operación \oplus .

1. \oplus es conmutativa.
2. \oplus es asociativa.
3. La configuración nula es un módulo para \oplus .

De lo anterior tenemos que el par $(\mathcal{M}(G), \oplus)$ es un monoide. Sea $\mathcal{K}(G)$ el núcleo de $\mathcal{M}(G)$. De $\mathcal{K}(G)$ sabemos que es un grupo abeliano (teorema 2.7); a este grupo $\mathcal{K}(G)$ lo llamaremos el *grupo crítico* de G . ¿Cuáles son los elementos de $\mathcal{K}(G)$? ¿Cuál es la estructura de $\mathcal{K}(G)$? En lo que sigue daremos respuesta a las preguntas anteriores.

Dadas $f, g \in \mathcal{M}(G)$, diremos que f es \oplus -accesible desde g si y solo si existe $h \in \mathcal{M}(G)$ tal que $f = \sigma_G(g + h)$. Adicionalmente diremos que una configuración $f \in \mathcal{M}(G)$ es *recurrente* si y solo si f es \oplus -accesible desde toda otra configuración $g \in \mathcal{M}(G)$.

Teorema 3.5. $f \in \mathcal{K}(G)$ si y solo si f es recurrente.

Demostración. Sea f un elemento de $\mathcal{K}(G)$. Dada $g \in \mathcal{M}(G)$, el conjunto

$$g \uparrow := \{h \in \mathcal{M}(G) : h \text{ es } \oplus\text{-accesible desde } g\}$$

es un ideal, por lo tanto $f \in g \uparrow$. Supongamos ahora que f es recurrente. Sea I un ideal de $\mathcal{M}(G)$. Dado $g \in I$, existe $h \in \mathcal{M}(G)$ tal que $f = g \oplus h$. Recordemos que $g \in I$ y que I es un ideal; tenemos entonces que $f \in I$. Como I era un ideal arbitrario de $\mathcal{M}(G)$, podemos concluir que f pertenece a $\mathcal{K}(G)$. \square

3.1. La estructura de $\mathcal{K}(G)$

En esta sección presentaremos, sin prueba, el que hemos dado en llamar *el Teorema de Estructura para $\mathcal{K}(G)$* [1]. Para ello necesitamos introducir el *laplaciano* de un digrafo y estudiar su relación con el modelo de pilas de arena.

Laplacianos de digrafos

Dado G un digrafo con $n + 1$ vértices, el laplaciano de G , que denotaremos $L(G)$, es la matriz definida por $L(G) = [l_{ij}]_{i,j \leq n}$, con:

1. $l_{ii} = -\deg^+(i)$, para todo $i \leq n$,
2. $l_{ij} = 1$ si $i \neq j$ y $(i, j) \in E(G)$ y
3. $l_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $(i, j) \notin E(G)$.

Si el vértice $n + 1$ es un sumidero, i.e., si $n + 1$ es accesible desde todo otro vértice de G , entonces $L(G)$ es no singular. Para probar la afirmación anterior es suficiente comprobar que $\det(L(G))$ es diferente de cero. Recuerde que el Teorema de la matriz de Kirchhoff [1], asegura que $\det(L(G))$ es igual al número de subárboles generados de G dirigidos hacia $n + 1$. Es claro que si $n + 1$ es un sumidero, el número de tales subárboles es diferente de cero, por lo tanto $\det(L(G)) \neq 0$. Dado $i \leq n$, a la i -ésima columna de $L(G)$ la denotaremos con el símbolo L_i .

Sea f una configuración sobre G y sea i un vértice inestable. Nótese que $f + L_i$ es igual a la configuración obtenida de f encendiendo el vértice i . Encender el vértice i es entonces equivalente a sumar la columna i -ésima de $L(G)$. Por lo mismo, una avalancha con inicio f es equivalente a sumar a f una combinación entera (i.e. una combinación lineal con coeficientes enteros positivos) de las columnas del laplaciano de G .

Dada f una configuración, sabemos que todas las avalanchas maximales con inicio en f tienen la misma longitud y terminan en la misma configuración $\sigma_G(f)$. Dadas f, g configuraciones definimos una secuencia (i_1, \dots, i_m) de vértices de G que indica el orden en que se encienden los vértices en una avalancha que empieza en f y termina en g . El *vector tabla* de una avalancha es el vector $t = (t_1, \dots, t_n)$ (donde para cada $i \leq n$ se tiene que t_i es igual al número de veces que se enciende el vértice i durante la avalancha).

Dada f , ¿Será posible que existan dos avalanchas maximales con inicio en f tales que sus respectivos vectores tablas sean diferentes? Lo que veremos a continuación es que esto no es posible, esto es, todas las avalanchas maximales con inicio en f tienen el mismo vector

tabla. Nótese que si $t = (t_1, \dots, t_n)$ es el vector tabla de una avalancha maximal con inicio en f , entonces $\sigma_G(f) = f + \sum_{i=1}^n t_i L_i$. Por lo tanto, el vector t está completamente determinado (recuerde que $L(G)$ es no singular) por la ecuación $\sigma_G(f) - f = L(G)t$.

Definición 3.6. Sea G un digrafo con $n + 1$ vértices y sumidero el vértice $n + 1$. $\mathcal{L}(G)$ es el subgrupo de \mathbb{Z}^n generado por las n columnas de $L(G)$. A $\mathcal{L}(G)$ lo llamaremos el subgrupo laplaciano.

Teorema 3.7 (El teorema de estructura para $\mathcal{K}(G)$). *Dado G un digrafo con $n + 1$ vértices y sumidero el vértice $n + 1$, $\mathcal{K}(G) \simeq \frac{\mathbb{Z}^n}{\mathcal{L}(G)}$.*

El teorema de estructura nos permite, entre otras cosas, calcular el tamaño de $\mathcal{K}(G)$. Para ello basta calcular el tamaño del cociente $\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathcal{L}(G)}$. Usando algunas herramientas del álgebra lineal, específicamente la *Forma normal de Smith* [7], es posible probar que $\left| \frac{\mathbb{Z}^n}{\mathcal{L}(G)} \right| = \det(L(G))$.

Corolario 3.8.

1. $|\mathcal{K}(G)| = \det(L(G))$.
2. El número de configuraciones recurrentes sobre G coincide con el número de los subárboles generados de G dirigidos hacia $n + 1$.

4. Problemas algorítmicos

Dado un digrafo G , el teorema de estructura afirma que $\mathcal{K}(G)$ es isomorfo a $\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathcal{L}(G)}$. Lo anterior no implica que realmente conozcamos cuál es el grupo $\mathcal{K}(G)$. Si conociéramos realmente el grupo $\mathcal{K}(G)$, podríamos resolver cada uno de los siguientes problemas:

Problema (RR). (*Recurrence recognition*) Dada $f \in \mathbb{N}^n$, decida si $f \in \mathcal{K}(G)$, es decir, decida si f es recurrente.

Problema (GC). (*Group computations*).

- (GC1) Dados $f, g \in \mathcal{K}(G)$, calcule $f \oplus g$.
- (GC2) Dada $f \in \mathcal{K}(G)$, calcule f^{-1} .
- (GC3) Calcule la identidad de $\mathcal{K}(G)$.

Los problemas anteriormente listados, vistos como problemas algorítmicos, son precisamente los problemas que consideraremos en esta sección. Adicionalmente consideraremos el siguiente problema:

Problema (SPP). (*Predicción de avalanchas*).

- Entrada: (G, f) , donde G es un digrafo con $n + 1$ vértices y f es una configuración sobre G .
- Problema: Calcule $\sigma_G(f)$.

4.1. La complejidad de predecir

En esta subsección analizaremos la complejidad de cada uno de los problemas antes mencionados. Lo primero que anotaremos es que cada uno de los problemas relacionados con la operación del grupo $GC1$, $GC2$, $GC3$, es reducible a SPP . Para empezar, es claro que $GC1$ es reducible a SPP , dado que calcular $f \oplus g$ no es otra cosa que calcular $\sigma_G(f + g)$.

Dada $f \in \mathcal{K}(G)$ y dado $n \in \mathbb{N}$, el símbolo f^n denotará a $\underbrace{f \oplus \cdots \oplus f}_{n\text{-veces}}$. Sea ω_G la configuración definida por: para todo $i \leq n$, se tiene que $\omega_G(i) = \deg^+(i) - 1$. Nótese que ω_G es estable y recurrente.

Teorema 4.1. *Los problemas $GC2$ y $CG3$ son reducibles a SPP .*

Demostración. Recuerdese que $\omega_G \in \mathcal{K}(G)$. Recuerdese además que

$$|\mathcal{K}(G)| = \det(L(G)).$$

El teorema de Lagrange implica que:

1. Para calcular la identidad de $\mathcal{K}(G)$ es suficiente calcular $\omega_G^{\det(L(G))}$.
2. Para calcular f^{-1} es suficiente calcular $f^{\det(L(G))-1}$.

Dado que $\det(L(G))$ es menor o igual que n^n , es posible calcular $\omega_G^{\det(L(G))}$ y $f^{\det(L(G))-1}$ en tiempo polinomial usando exponenciación rápida, si se tiene acceso a un oráculo para SPP . \checkmark

El teorema anterior muestra que el cálculo de inversos y el cálculo de identidades es reducible a SPP . Lo que nos queda por analizar es la complejidad de los problemas SPP y RR .

Teorema 4.2. *SPP pertenece a NP .*

Demostración. Sea f una configuración. Supóngase que g es igual a $\sigma_G(f)$. Sea t el vector tabla de las avalanchas que van de f a g . Nótese que todas las entradas de t están acotadas por $\|f\|^n$, por lo que para todo $i \leq n$ se tiene que $|t_i| \leq n \log(\|f\|)$. Tenemos entonces que $|t| \in O(n^2 \log(\|f\|))$, i.e. t es polinomial en el tamaño de (G, f) . Recuerdese que $g = f + Lt$.

Todo lo anterior nos permite diseñar un algoritmo no determinista \mathbb{M} que resuelve SPP en tiempo polinomial. \mathbb{M} es el siguiente algoritmo:

Con entrada (G, f) ,

1. Adivine t , de tamaño polinomial en $|(G, f)|$.
2. Calcule $f + Lt$.
3. Verifique que $f + Lt$ es estable. \checkmark

Definición 4.3. Dado un lenguaje L , diremos que L pertenece a $U \cdot P$ (Unique P), si y solo si existen un lenguaje $\Omega \in Ptime$ y un polinomio p tales que:

- $x \in L \Rightarrow |\{y : |y| \leq p(|x|) \ \& \ (x, y) \in \Omega\}| = 1.$
- $x \notin L \Rightarrow |\{y : |y| \leq p(|x|) \ \& \ (x, y) \in \Omega\}| = 0.$

Nótese que la prueba del teorema anterior nos da más información que la que hemos aprovechado; en particular, la prueba del teorema anterior nos permite afirmar que:

Corolario 4.4. SPP pertenece a $U \cdot P$.

Tenemos entonces que si SPP es NP -completo, $NP \subset U \cdot P$. La última inclusión es altamente improbable, por lo cual consideramos haber aportado fuerte evidencia en contra de la posible NP -completez de SPP . En trabajos anteriores [3], [1] se conjeturaba que SPP es NP -completo. A la luz de los resultados anteriores nosotros consideramos necesario refinar la conjetura.

Conjetura 4.5. SPP es duro para NP bajo reducciones aleatorias.

Recuerde que $USAT$ (*Unique satisfiability problem*) pertenece a $U \cdot P$ y es duro para NP bajo reducciones aleatorias [11]. Esto es, la conjetura no contradice, a diferencia de lo que ocurre con la posible NP -completez de SPP , ninguna de las hipótesis ampliamente aceptadas en complejidad computacional.

Por el momento RR ha resistido todas nuestras tentativas de análisis. Cerraremos esta sección proponiendo una conjetura acerca de RR .

Conjetura 4.6. RR pertenece a $U \cdot P$ y es duro para NP bajo reducciones aleatorias.

5. Digrafos acíclicos

En esta, la última sección del escrito, estudiaremos el modelo de pilas de arena sobre digrafos acíclicos.

Definición 5.1. Un digrafo G es acíclico si y solo si G no contiene ciclos.

Los digrafos acíclicos son particularmente manejables porque su estructura es muy similar a la estructura de un árbol; en particular, es posible construir en tiempo polinomial para todo digrafo acíclico un *ordenamiento topológico*.

Definición 5.2. Dado G un digrafo acíclico, un ordenamiento topológico para G es una biyección $\pi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, |V(G)|\}$ tal que para todo $i, j \in V(G)$, se tiene que $(i, j) \in E(G)$ implica $\pi(i) \leq \pi(j)$.

Teorema 5.3. *El problema SPP puede ser resuelto en tiempo polinomial sobre digrafos acíclicos.*

Demostración. Considérese el siguiente algoritmo:

Con entrada (G, f) , donde G es un digrafo acíclico y f es una configuración sobre G .

1. Calcule \leq un subconjunto de $V(G) \times V(G)$, tal que \leq es un ordenamiento topológico de G .
2. Defina $i = 1$.
3. Encienda el i -ésimo vértice de $V(G)$, en el ordenamiento \leq , tantas veces como sea posible.
4. Si $i = |V(G)|$, pase a 5. Si $i \not\leq |V(G)|$ haga i igual a $i + 1$ y vuelva al paso 3.
5. Decida si la configuración obtenida es igual a g .

Es claro que el algoritmo para únicamente al alcanzar una configuración estable, esto es, el algoritmo para únicamente al alcanzar la configuración $\sigma_G(f)$. Por otro lado el número de iteraciones necesarias está acotado por $|V(G)| \|f\|$, por lo que el algoritmo es de tiempo polinomial en el tamaño de la entrada (G, f) . \square

La tratabilidad del problema *SPP* sobre digrafos acíclicos implica a su vez que todos los problemas algorítmicos considerados en este escrito son tratables cuando los restringimos a digrafos acíclicos.

En lo que sigue estudiaremos el modelo de pilas de arena sobre digrafos acíclicos como un tipo especial de autómeta. Nótese que el modelo de pilas de arena está constituido por:

1. Un espacio finito $V(G)$.
2. Una relación de proximidad $E(G)$ entre los elementos del espacio $V(G)$.
3. Un conjunto de estados posibles para cada elemento de $V(G)$, a saber, el número de granos de arena dispuesto sobre cada célula.
4. Reglas locales de transformación, los encendidos.

Todo lo anterior indica que el modelo de pilas de arena es un autómeta. En lo que queda probaremos que las pilas de arena sobre digrafos son una *clase universal* de autómetas, esto es, probaremos que todo problema computable puede ser resuelto usando este tipo de autómetas. Para probar lo anterior mostraremos que todo *circuito booleano monótono* puede ser simulado por una pila de arena sobre un digrafo acíclico. Adicionalmente, dado que la simulación que presentaremos es eficiente (es LOGSPACE computable, i.e., computable en espacio logarítmico), probaremos que el problema *SPP* restringido a digrafos acíclicos es *P*-completo [8].

Un *circuito booleano* es un digrafo acíclico etiquetado $G = (V(G), E(G), L)$, donde la función L de etiquetado es una función de $V(G)$ en $\{I, (O, \wedge), (O, \vee), \sim, \wedge, \vee\}$ que satisface:

1. Para todo $i \in V(G)$, si $L(i) = I$, entonces $\deg^-(i) = 0$.
2. Para todo $i \in V(G)$, si $L(i) \in \{(O, \wedge), (O, \vee)\}$, entonces $\deg^+(i) = 0$.
3. Para todo $i \in V(G)$, si $L(i) = \sim$, entonces $\deg^-(i) = 1$.

4. Para todo $i \in V(G)$, si $L(i) = \wedge$, entonces $\deg^-(i) \geq 2$.
5. Para todo $i \in V(G)$, si $L(i) = \vee$, entonces $\deg^-(i) \geq 2$.

A los vértices de un circuito G los llamaremos puertas; cada puerta será de un tipo particular, el cual está completamente determinado por su etiqueta. Así, por ejemplo, si $L(i) = I$, i será una puerta de tipo entrada, o si $L(i) = (O, \wedge)$ la puerta i será una puerta de tipo \wedge -salida. Un circuito G es *estratificado* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V(G) = \bigsqcup_{i=0}^n N_i$ y se satisface:

1. $N_0 = \{i \in V(G) : L(i) = I\}$.
2. $N_n = \{i \in V(G) : L(i) \in \{(O, \wedge), (O, \vee)\}\}$.
3. Para todo $i, j \in V(G)$, si $(i, j) \in E(G)$, existe $k \leq n$ tal que $i \in N_k$ y $j \in N_{k+1}$.

Finalmente diremos que un circuito G es monótono si y solo si G es estratificado y $\{i \in V(G) : L(i) = \sim\} \subset N_1$. En lo que sigue $\{0, 1\}^*$ denotará el conjunto de las palabras, es decir el conjunto de todas las sucesiones finitas de ceros y unos, y dado $n \in \mathbb{N}$, $\{0, 1\}^n$ denotará el conjunto de las palabras de longitud n . Adicionalmente, supondremos de todo circuito booleano G que su conjunto de vértices $V(G)$ es un segmento inicial de los números naturales.

Un circuito booleano estratificado es un dispositivo que puede ser usado para realizar cálculos que involucran sucesión de ceros y unos. Dado un circuito booleano G estratificado con $k + 1$ niveles, n puertas “entrada” y una única puerta “salida”, y dado $x = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, el valor de x dado G se define de la siguiente manera:

1. Para todo $i \leq n$, asígnesele a la i -ésima puerta entrada el valor booleano a_i .
2. Para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, habiéndole asignado valores booleanos a todas las puertas del nivel $j - 1$, asígnesele a cada puerta del nivel i el valor booleano correspondiente a evaluar su etiqueta (su etiqueta es una función booleana), en los valores booleanos asignados a sus predecesores. En el caso de las puertas salida, cuyas etiquetas son parejas ordenadas, la función a evaluar es la segunda componente de la etiqueta.
3. El valor de x dado G es igual al valor booleano asignado a la única puerta salida de G .

Dada $x \in \{0, 1\}^n$ y dado G un circuito booleano estratificado con n puertas entrada y una puerta salida, diremos que x es aceptado por G si y solo si el valor de x dado G es 1. Nótese que en la definición anterior el valor de x dado G no es otra cosa que el valor obtenido al evaluar x usando el circuito G .

Sea $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de circuitos monótonos estratificados, y sea L un lenguaje, es decir un subconjunto de $\{0, 1\}^*$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que \mathcal{C}_n tiene una única puerta entrada y exactamente n puertas salida (en lo que sigue, a tales circuitos los llamaremos circuitos aceptadores de aridad n), diremos entonces que $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ calcula el lenguaje L si y solo si: para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \{0, 1\}^n$, $x \in L$ si y solo si x es aceptado por \mathcal{C}_n .

Los circuitos booleanos monótonos son un modelo universal y no uniforme de computación. Son un modelo no uniforme, porque es necesario usar un dispositivo diferente para cada longitud. Son un modelo universal en el siguiente sentido.

Teorema 5.4. *Un lenguaje L es computable (decidible), si y solo si existe una sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de circuitos monótonos que calcula L .*

Para una prueba del teorema el lector puede consultar [8].

El teorema anterior nos permite dar una definición de universalidad para clases autómatas.

Definición 5.5. Una clase de autómatas \mathcal{A} es universal si y solo si para todo circuito booleano monótono G existe un autómata $A \in \mathcal{A}$ tal que A acepta las mismas palabras que G (i.e., A simula G).

En lo que sigue mostraremos que la clase de autómatas constituida por las pilas de arena sobre digrafos acíclicos es universal. Esto es, mostraremos que dado un circuito aceptador G de aridad n , existe un digrafo acíclico G_d tal que para todo $x \in \{0, 1\}^n$, existe una configuración f_x para la cual se tiene lo siguiente: G acepta x si y solo si $\|f_x\| - \|\sigma_{G_d}(f_x)\| = 1$. Adicionalmente, y no menos importante, mostraremos que el par (G_d, f_x) puede ser construido en LOGSPACE.

Teorema 5.6. *La clase de autómatas constituida por las pilas de arena sobre digrafos acíclicos es universal.*

Demostración. Sea G un circuito monótono, estratificado y de aridad n , y sea $x \in \{0, 1\}^n$. Primero construiremos el digrafo acíclico G_d . Al digrafo G_d lo construiremos a partir del digrafo subyacente de G , al que llamaremos simplemente G , realizando algunas pequeñas modificaciones locales.

1. (Removiendo negaciones). Dada i una puerta \sim , para todo par de puertas j, k tal que $(j, i), (i, k) \in E(G)$, introducimos un nuevo vértice j^\sim y una arista (j^\sim, k) . Adicionalmente removemos el vértice i .
2. (Balanceando el digrafo). Dada una puerta i , si $\deg^-(i) \not\geq \deg^+(i)$, para cada $l \in \{1, \dots, \deg^-(i) - \deg^+(i)\}$ introducimos tres vértices nuevos i_1^l, i_2^l, i_3^l y las aristas $(i, i_1^l), (i_1^l, i_2^l), (i_1^l, i_3^l), (i_2^l, o), (i_3^l, o)$, donde o es la puerta salida de G .
3. (Elegimos el sumidero). El sumidero de G_d es o .

Construido el digrafo G_d , definimos f_x .

1. Si i es la k -ésima puerta salida de G y $x(k) = 1$, definimos $f_x(i) = \deg^+(i)$.
2. Si i es la k -ésima puerta salida de G y $x(k) = 0$, definimos $f_x(i) = 0$.
3. Si i es la k -ésima puerta salida de G , $x(k) = 1$ y g es igual a i^\sim , definimos $f_x(g) = 0$.

4. Si i es la k -ésima puerta salida de G , $x(k) = 0$ y g es igual a i^\sim , definimos $f_x(g) = \deg^+(g)$.
5. Si i es una puerta \wedge , definimos $f_x(i) = \deg^+(i) - \deg^-(i)$.
6. Si i es una puerta \vee , definimos $f_x(i) = \deg^+(i) - 1$.
7. En otro caso $f_x(i) = 0$.

Es fácil verificar que G acepta x si y solo si $\|f_x\| - \|\sigma_{G_d}(f_x)\| = 1$. ☑

Corolario 5.7. *El problema SPP sobre digrafos acíclicos es P-completo.*

Demostración. Es suficiente notar que la construcción del par (G_d, f_x) puede ser realizada en LOGSPACE. Recuerde que el problema de evaluar un par (G, x) es P -completo, (el problema EVALMONCIRC es P -completo, siendo EVALMONCIRC el problema consistente en: dado $x \in \{0, 1\}^n$ y dado un circuito aceptador G de aridad n , calcule el valor de x dado G).

Tenemos entonces que la prueba del teorema anterior muestra también que EVALMONCIRC es LOGSPACE-reducible a la restricción de SPP a digrafos acíclicos. Por lo tanto, el problema SPP restringido a digrafos acíclicos es P -completo. ☑

6. Conclusiones y perspectivas

En el escrito se ha evidenciado que el modelo de pilas de arena sobre digrafos presenta un comportamiento complejo, dado que la dinámica del modelo parece no ser predecible en tiempo polinomial (si las conjeturas enunciadas son ciertas). Por otro lado, aunque el modelo se comporta mejor sobre digrafos acíclicos, su comportamiento sigue siendo altamente complejo, dado que, si vemos al modelo como una clase de autómatas, esta clase es universal, y además, como se prueba en el escrito, el problema de predecir la dinámica en el caso acíclico es un problema P -completo. Nosotros consideramos que, resolviendo las conjeturas propuestas, podremos entender a cabalidad la estructura combinatoria y algorítmica del modelo sobre grafos dirigidos.

Agradecimientos: Se agradece a la Universidad Industrial de Santander por brindar las facilidades requeridas para la realización de este trabajo.

Referencias

- [1] L. BABAI. *The Abelian Sandpile Model*. Manuscrito, disponible en <http://people.cs.uchicago.edu/~laci/REU05/>.
- [2] N. BIGGS. "Chip-firing and the critical group of a graph". *J. Algebraic Combinatorics*. 9(1):25-45, 1999.
- [3] A. BJORNER & L. LOVASZ. "Chip firing games on directed graphs". *European J. Combinatorics*. 12(4):305-328, 1992.

- [4] F. CHUNG & R. ELLIS. “A chip-firing game and Dirichlet eigenvalues”. *Discrete Mathematics*, 257:341-355, 2002.
- [5] D. DHAR. “Self Organized Critical State of the Sandpile Automaton Model”. *Physical Review Letters*, 64(14): 1613-1616, 1990.
- [6] K. ERIKSSON. “No polynomial bound for the Chip firing game on directed graphs”. *Proceedings American Mathematical Society*, 112:1203-1205, 1991.
- [7] N. JACOBSON. *Basic Algebra*. W.H. Freeman, San Francisco, 1971.
- [8] C.H. PAPANITRIOU. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [9] G. TARDOS. “Polynomial bound for a chip firing game on graphs”. *SIAM J. Discrete Mathematics*, 1:397-398, 1988.
- [10] E. TOUMPAKARI. *On the abelian sandpile model*. Ph.D. thesis, Universidad de Chicago, 2005.
- [11] L.G. VALIANT & V. VAZIRANI. “NP is as easy as detecting unique solutions”. *Theoretical computer Science*, 47:85-93, 1986.

CAROLINA MEJÍA MORENO
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
e-mail: cmejiam@uis.edu.co