

## Introducción a la relatividad numérica

F. S. GUZMÁN\*

**Resumen.** En este manuscrito se presentan ejemplos de aplicación de la aproximación en diferencias finitas a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en particular sistemas de ecuaciones asociados a las ecuaciones de Einstein. El objetivo es que los ejemplos mostrados sirvan como introducción a la Relatividad Numérica. Los casos que se estudian con profundidad son: la ecuación de onda en un espacio-tiempo 1+1 plano en general, el campo escalar real acoplado a la Relatividad General y el campo escalar complejo acoplado a la Relatividad General.

**Abstract.** In this manuscript there are examples of the technique of finite differences approximations to the solution of systems of partial differential equations, in particular systems of equations associated with the Einstein's equations. The aim is that the examples that are shown can serve as an introduction to Numerical Relativity. The cases studied in depth are: the wave equation in a 1+1 general flat space-time, the real scalar field coupled to General Relativity and the complex scalar field coupled to General Relativity.

### Introducción

La relevancia de la Relatividad Numérica (RN) es indiscutible en los años recientes. La aplicación mas urgente de le RN es la simulación de las fuentes de ondas gravitacionales, porque los interferómetros dedicados a la detección de la radiación gravitacional se encuentran realizando ejecuciones totales (*science runs*) en el umbral de la sensibilidad necesaria para la detección. En particular la importancia radica en que para filtrar las señales detectadas en los interferómetros es necesario contar con catálogos de señales

---

**Palabras y frases claves:** relatividad numérica, diferencias finitas, ecuaciones de Einstein.

**Keywords:** numerical relativity, finite difference methods, Einstein's equations.

**PACS:** 04.25.D-, 02.07.Bf, 04.20.-q.

\* Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Edificio C-3, Cd. Universitaria, C. P. 58040 Morelia, Michoacán, México. e-mail: guzman@ifm.umich.mx

predichas por los modelos asociados a ciertos tipos de fuentes de radiación gravitacional. Una de las fuentes de ondas gravitacionales más potentes es la colisión de dos hoyos negros orbitando; esta es la razón por la cual dicho problema se convirtió en el problema principal de la RN durante muchos años. En la actualidad los modelos que aportan las señales para filtrar corresponden a aproximaciones postnewtonianas del problema de dos cuerpos en la etapa orbital de los hoyos negros y la teoría de perturbaciones para la etapa en la que queda solamente un hoyo negro de Kerr perturbado. En los últimos dos años, el problema del choque de hoyos negros orbitando ha sido resuelto numéricamente en el lapso total en que ocurre el fenómeno: la etapa en que los objetos orbitan, la etapa en la que chocan y la etapa del hoyo negro final. Así, en la actualidad es posible generar la forma de onda de la radiación gravitacional de estos procesos usando Relatividad General sin aproximaciones de carácter físico [1, 2]. Incluso ya se han estudiado casos en los que los hoyos negros no tienen la misma masa y las patadas (*kicks*) que se producen sobre el hoyo negro final [3].

Entender el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que conforman las ecuaciones de Einstein tomó un periodo considerable de tiempo, en particular para el problema de dos hoyos negros. Entre los elementos que favorecieron el avance reciente en la solución de este problema en RN se encuentran: los estudios de las formulaciones de la descomposición 3+1 de la Relatividad General y las propiedades de hiperbolicidad de los distintos “sabores” de dicha descomposición; el poder computacional se incrementó; los algoritmos evolucionaron y ahora es posible programar algoritmos eficientes y precisos que ayudan a optimizar los recursos, como por ejemplo el refinamiento adaptativo de mallas que destinan memoria a las regiones del dominio numérico con mayores gradientes de las funciones involucradas. Estos son algunos aspectos íntimamente relacionados con el desarrollo de las soluciones de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), en particular con el sistema de las ecuaciones de Einstein, y ciertamente hay espacio para mejorar el estado del arte de todas estas herramientas dentro de la RN, ya sea en la parte de los algoritmos numéricos a través de la introducción de las técnicas de elementos finitos y volúmenes finitos, que son aplicados en sistemas hidrodinámicos, o bien en la parte física, es decir mediante la solución de las ecuaciones de Einstein con fuentes de materia.

Debido a los resultados exitosos en la solución del sistema binario de hoyos negros, la corriente de estudio principal dentro de la RN se ha enfocado a otros sistemas físicos, entre los que se encuentran: el colapso de supernovas sin simetrías, colapso de supernovas considerando microfísica y transporte de neutrinos, el colapso de estrellas compactas en

hoyos negros sin simetrías, discos de acreción en torno a hoyos negros y la formación de chorros (*jets*). En el campo de las teorías alternativas de la Relatividad General hay todo por hacer en la solución de sistemas astrofísicos considerando teorías escalares-tensoriales, o bien teorías de cuerdas en el límite de bajas energías [4], objetos extendidos como cuerdas negras [5] o burbujas de nada [6, 7].

Naturalmente, antes de intentar la solución de alguno de estos problemas es tal vez útil analizar casos más simples. En este sentido la ecuación de onda en una dimensión espacial es el ejercicio básico que ejemplifica el proceso de solución de EDP hiperbólicas con métodos numéricos. De hecho la, solución de esta ecuación en 1+1 dimensiones es el problema al que se dedica más espacio en estas notas. Con los elementos aprendidos con dicho ejemplo es posible avanzar hacia el caso en tres dimensiones espaciales con simetría esférica, porque se puede reducir a un problema de 1+1 dimensiones.

El objetivo de este manuscrito no es proveer al estudiante del conjunto total de herramientas para explotar la Relatividad Numérica. Más bien, la idea es mostrar a través de algunos ejemplos el procedimiento usado para resolver las ecuaciones de la Relatividad General para algunos sistemas en particular, y motivar al lector para ir más allá de dichos casos. En parte, la motivación para proceder de esta manera es que conviene contar con un código computacional simple que funciona, que es capaz de reproducir los resultados en estas notas y en artículos clásicos, y después será simple generalizar las ideas aprendidas en problemas más complicados relacionados con la Relatividad General. El objetivo es que después de leer este manuscrito, el lector se interese por: i) temas en los cuales la RN es esencial, ii) RN directamente a través de los ejemplos para los cuales se incluye un código, de modo que es posible reproducir algunos de los resultados presentados aquí.

En la sección 1 se describen los métodos numéricos relacionados con la aplicación de las diferencias finitas a las EDP. En la sección 2 se presenta la solución numérica de la ecuación de onda en 1+1 dimensiones y sus propiedades generales. En la sección 3 se estudia un campo escalar real autogravitante, que no es sino la introducción de la gravedad a un campo masivo de Klein-Gordon. De hecho, este caso es una generalización directa de la ecuación de onda con las ecuaciones de Einstein como restricciones. En la sección 4 se generaliza al caso de campo escalar complejo, es decir, se estudia el caso de campo complejo autogravitante, lo que da lugar a soluciones conocidas como estrellas de bosones. Finalmente, en la sección 5 se mencionan algunos comentarios.

## 1. Métodos numéricos

### 1.1. Diferencias finitas

La noción que debe permanecer presente desde el principio es que para usar la aproximación de las EDP con diferencias finitas se supone que el dominio donde el sistema está definido es discreto. Esto es, las funciones involucradas en un sistema de EDP son evaluadas solamente en un número finito de puntos. La implicación de tal restricción es que no es posible calcular soluciones numéricamente con precisión infinita y siempre habrá una contribución de un error (llamado error de discretización) que contamina el problema en el continuo. Sin embargo, si se tiene en cuenta la variedad de problemas que es posible resolver numéricamente que permanecen sin solución a través de métodos exactos, parece que el error de discretización es un buen precio a pagar.

Hay distintos tipos de aproximaciones a los sistemas de ecuaciones por resolver; por ejemplo, la aproximación de los métodos espectrales supone que las funciones involucradas en un sistema de EDP puede expandirse como una serie de funciones ortogonales en un dominio dado; entonces las condiciones de ortogonalidad de la base y las relaciones de recurrencia de las funciones base se utilizan para reducir el sistema a otro más simple de ecuaciones para los coeficientes de la expansión.

La aproximación con diferencias finitas (DF) funciona de manera distinta. Con la finalidad de ilustrar cómo funciona la discretización, supóngase el caso de un dominio finito hipotético con coordenada temporal  $t$  y coordenada espacial  $x$ . La coordenada espacial será definida solamente en un conjunto discreto de puntos dados por  $x_j = x_{min} + j\Delta x$ , donde  $x_{min}$  es el menor valor del dominio escogido, las fronteras corresponden a los casos  $x_0$  (en la izquierda) y  $x_N$  (en la derecha). El tiempo  $t^n = n\Delta t$  también queda definido solamente para ciertos valores del tiempo continuo. Por tanto una función queda definida en valores de  $x$  y de  $t$  que corresponden a puntos en la malla, de modo que para una función continua  $f$  hay valores disponibles en los puntos  $(t^n, x_j)$ , denotados por  $f_j^n$ . Para una malla discretizada de manera uniforme  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  y  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  indican la resolución en las coordenadas espacial y temporal, respectivamente.

La aproximación en diferencias finitas supone que las funciones involucradas pueden ser expandidas en serie de Taylor en torno a cada punto de la malla hasta un orden arbitrario de precisión. Por tanto, considerando que la función está definida en el punto  $x_j$ , el valor

de la función en los puntos vecinos más cercanos puede calcularse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3), \\ f(x_j) &= f(x_j), \\ f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3), \end{aligned} \tag{1}$$

donde la prima denota derivada respecto a  $x$ . Partiendo de estas aproximaciones es posible construir operadores diferenciales para las derivadas de  $f_j^n$ . Por ejemplo, sumando la primera y la tercera ecuaciones se obtiene una expresión para la primera derivada en el punto  $x_j$  con un error de segundo orden

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2);$$

vale notar que los valores de la función en los vecinos de la derecha e izquierda son necesarios para calcular esta derivada; de hecho, esta es la razón por la que a la aproximación que se ha construido se le llama aproximación centrada con diferencias finitas, pues hay otros casos que se mencionan a continuación.

Para obtener la aproximación de la segunda derivada de  $f$  basta con escribir la combinación

$$\frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} = f''(x_j) + O(\Delta x^2),$$

lo cual implica la expresión deseada para la segunda derivada con un error de segundo orden. Al igual que en el caso previo, esta también es una aproximación centrada.

En el caso de las fronteras espaciales, el valor de las funciones en alguno de los vecinos cercanos no está definido, y por tanto una aproximación centrada no es adecuada a menos de que se agregue un punto al dominio (llamado punto fantasma); sin embargo es preferible evitar el uso de puntos fantasma, y para evitarlo es posible construir aproximaciones de operadores diferenciales no centrados. Si se consideran puntos a la derecha de  $x_j$  en el dominio espacial (por ejemplo el caso de la frontera izquierda) se escriben expansiones en serie de Taylor de modo que

$$\begin{aligned} f(x_j) &= f(x_j), \\ f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x f' + \frac{\Delta x^2}{2} f'' + O(\Delta x^3), \\ f(x_{j+2}) &= f(x_j) + 2\Delta x f' + 2\Delta x^2 f'' + O(\Delta x^3). \end{aligned} \tag{2}$$

La combinación  $f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 3f(x_j) = 2\Delta x f' + O(\Delta x^3)$  implica la expresión deseada para la primera derivada espacial de la función con error de segundo orden;

entonces, cuando este resultado se aplica a la frontera de la izquierda dicha derivada es

$$f' = \frac{f(x_2) - 4f(x_1) + 3f(x_0)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Una expresión semejante se construye para la frontera derecha donde se consideran solamente puntos a la izquierda de  $x_N$ . Es posible construir aproximaciones con un error de mayor orden (ver por ejemplo [8]). Sin embargo dichas aproximaciones involucran puntos mas allá de los primeros vecinos  $x_{j\pm 1}$  y no son útiles para ilustrar.

Si ahora se considera la discretización en el tiempo, las operaciones descritas hasta aquí se aplican de manera semejante y las derivadas con respecto al tiempo son muy parecidas, salvo porque los índices que cambian no son los espaciales sino los temporales. Por ejemplo, la primera derivada con respecto al tiempo de  $f$  al tiempo  $t^n$  en  $x_j$  queda aproximada a segundo orden por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

La segunda derivada a segundo orden centrada al tiempo  $t^n$  resulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \rightarrow \frac{f_j^{n+1} - 2f_j^n + f_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O(\Delta t^2).$$

Con estas aproximaciones para las segundas derivadas es directo construir la versión discreta de la ecuación de onda  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$  centrada en el punto  $(t^n, x_j)$ :

$$\frac{f_j^{n+1} - 2f_j^n + f_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2), \quad (3)$$

para todo  $j$  y  $n$ . De esta expresión es posible resolver para  $f_j^{n+1}$ , y dados los valores de la función  $f$  en los niveles de tiempo  $n$  y  $n - 1$  es posible calcular los valores de  $f$  al tiempo  $n + 1$ ,  $f_j^{n+1} = 2f_j^n - f_j^{n-1} + (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)$ . Este es un ejemplo de cómo dadas unas condiciones iniciales es posible construir la solución a un tiempo posterior. Una nota importante acerca de las diferencias finitas es que debido a que las aproximaciones de los operadores diferenciales en las EDP se obtienen a partir de expansiones en serie de Taylor, se introduce un error en la definición de las EDP debido a que la serie se trunca a cierto orden. De hecho, se espera que el término de error en (3) decrezca cuando se incrementa la resolución en el tiempo y en el espacio.

En lo que sigue, las ecuaciones que se discuten son discretizadas de la manera que se ha mostrado aquí, y se discutirá la construcción de soluciones globales de EDP en el tiempo a partir de condiciones iniciales.

## 1.2. Convergencia

Como se mencionó antes, cuando se resuelven ecuaciones usando la aproximación de diferencias finitas se discretiza la ecuación, y por tanto las ecuaciones cuya solución está siendo calculada no es estrictamente válida en el continuo, pues se ha introducido un error de truncamiento en la expansión en serie de Taylor. Además, incluso si el error introducido decrece cuando la resolución aumenta ( $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ) es necesario establecer con qué ritmo debe decrecer dicho error. La convergencia es la noción que relaciona el ritmo al que decrece el error con la precisión de la discretización. Sin embargo, hay un concepto en el medio, esto es, la consistencia: se dice que la versión discreta de una ecuación diferencial es consistente si cuando se reducen los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  el error con respecto a la solución en el continuo decrece. Otro concepto es el de la estabilidad, que es una medida del ritmo de incremento de los valores calculados de una función en una EDP; por ejemplo en (3) si uno elige resoluciones tales que  $\Delta t/\Delta x > 1$  la amplitud de la función de onda se incrementará después de cada iteración hasta que dicha amplitud diverja. Este es solamente un caso, pero en general la estabilidad está relacionada con el algoritmo de integración en el tiempo, como los mencionados posteriormente. Si ambas condiciones, estabilidad y consistencia se satisfacen, se dice que el algoritmo converge. Este resultado se conoce como el teorema de Lax.

Con la finalidad de ilustrar el significado de la convergencia y cómo es posible saber si los cálculos numéricos son convergentes, considérese la función  $f_j$  que se conoce con precisión de segundo orden (como los operadores descritos antes) de modo que  $f(x) = f_0(x) + E(x)(\Delta x^2) + O(\Delta x^3)$ , donde  $f_0(x)$  es la solución exacta de la ecuación en el continuo, y  $E$  denota una función de error. Si  $f_0(x)$  es conocida, basta con comparar los resultados obtenidos mediante el uso de dos resoluciones distintas, digamos  $f_1$  obtenida usando resolución  $\Delta x$  y  $f_2$  obtenida usando resolución  $\Delta x/2$ . Entonces se espera que

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3). \quad (4)$$

Por ejemplo, para la ecuación de onda (3) se conoce la solución exacta, y bastaría con hacer los cálculos numéricos usando dos resoluciones distintas para verificar que la diferencia entre la solución exacta y las soluciones numéricas converge a cero al ritmo esperado.

En Relatividad General en la descomposición 3+1 el sistema de EDP es sobredeterminado, y por tanto hay ecuaciones de evolución (el número depende de la formulación, las más comunes son la ADM y la BSSN, ver por ejemplo [9]) y cuatro ecuaciones de

restricción que se suponen válidas, la Hamiltoniana  $H = 0$  y tres de momento  $M^k = 0$ . Sin embargo, el error de truncamiento implica que estas restricciones no se satisfacen de manera exacta pero se supone que se satisfacen, o sea, que  $H$  y  $M^k$  valen cero en el continuo. Este es un ejemplo en el que se conoce (o supone) la solución exacta y basta con usar dos resoluciones distintas para verificar que los cálculos numéricos son confiables.

Algo distinto ocurre cuando se desconoce la solución exacta, que es el caso general. Es posible hacer una prueba de convergencia tipo Cauchy basada en el uso de tres resoluciones distintas. Suponiendo  $f_1$  y  $f_2$  como antes, y además  $f_4$  que ha sido calculada usando resolución  $\Delta x/4$ , se tiene:

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_4} = \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3). \quad (5)$$

Este tipo de estimaciones indica si los cálculos son correctos o no lo son. Por ejemplo, si uno encuentra que el factor de convergencia (el 4 en las expresiones anteriores) resulta ser menor que el valor 4 estimado en teoría, entonces es necesario aceptar que la convergencia de la solución numérica no es tan buena como se espera. Las posibles razones son: i) que hay un error en la implementación de los algoritmos o ii) el algoritmo mismo no converge para los valores de  $\Delta x$  usados.

## 2. La ecuación de onda en 1+1

La ecuación de onda es el ejemplo canónico utilizado para ilustrar el funcionamiento de la aproximación en diferencias finitas de una EDP. Con este ejemplo se introducirá aquí además la noción de la descomposición del espacio-tiempo. En este sentido, se usarán los nombres comunes en la descomposición 3+1 de la Relatividad General, en particular la “función lapso” y el “vector de corrimiento” (*shift*). Con estos conceptos se pretende ilustrar el concepto de libertad en la elección de coordenadas.

La ecuación de onda está definida en el espacio de Minkowski en 1+1 dimensiones, cuyo elemento de línea es  $ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2$ . Aplicando la transformación general de coordenadas  $dt = \alpha d\tilde{t}$  y  $dx = d\tilde{x} - \beta d\tilde{t}$ , la métrica resultante en forma matricial es la siguiente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (-\alpha^2 + \beta^2) & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta/\alpha^2 \\ \beta/\alpha^2 & (1 - \beta^2/\alpha^2) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde  $\alpha > 0$  es la función lapso y  $\beta$  es la única componente del *vector de corrimiento*; además,  $\mu, \nu = t, x$ . En general el operador de D’Alambert para un espacio-tiempo dado



está definido por  $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0$ , donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . De (6) se tiene que  $\sqrt{-g} = \alpha$ . Entonces la ecuación de onda en su forma general se escribe

$$\begin{aligned} 0 &= \square\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[\alpha g^{t\nu}\partial_\nu\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\alpha g^{x\nu}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[\alpha g^{tt}\partial_t\phi + \alpha g^{tx}\partial_x\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\alpha g^{xt}\partial_t\phi + \alpha g^{xx}\partial_x\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[-\frac{1}{\alpha}\partial_t\phi + \frac{\beta}{\alpha}\partial_x\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\frac{\beta}{\alpha}\partial_t\phi + \alpha(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})\partial_x\phi]. \end{aligned} \quad (8)$$

Es deseable escribir un sistema de EDP que contenga derivadas solamente de primer orden. La razón es que se simplifica el estudio de las propiedades del sistema de ecuaciones con la idea de construir una solución global a partir de una evolución de Cauchy, así que es conveniente determinar la hiperbolicidad del sistema.

La expresión anterior sugiere la definición de dos nuevas variables,  $\psi := \partial_x\phi$  y  $\pi := (\partial_t\phi - \beta\partial_x\phi)/\alpha$ . Obsérvese que  $\pi$  es el argumento de la derivada temporal de primer orden en (8). El objetivo es separar la ecuación de onda en un sistema de dos ecuaciones de primer orden para estas dos nuevas variables. La primera de estas ecuaciones es obvia de (8):

$$\partial_t\pi = \partial_x(\alpha\psi + \beta\pi). \quad (9)$$

Si ahora se supone que  $\phi$  es al menos de clase  $C^2$ , la ecuación para  $\psi$  es  $\partial_t\psi = \partial_x(\partial_t\phi)$ , lo que implica

$$\partial_t\psi = \partial_x(\alpha\pi + \beta\psi). \quad (10)$$

Las ecuaciones (9)–(10) constituyen la versión de primer orden de la ecuación de onda. Esto recuerda que la función incógnita original  $\phi$  no aparece en el sistema de ecuaciones, pero puede reconstruirse a partir de la definición de  $\pi$  una vez calculados  $\pi$  y  $\psi$ , o sea  $\partial_t\phi = \alpha\pi + \beta\psi$ .

### 2.1. Análisis característico

Si se define el vector de estado  $\mathbf{u} = (\pi, \psi)^T$ , es posible escribir la ecuación de onda (9-10) como

$$\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_x\mathbf{u} = -\partial_x(\mathbf{A})\mathbf{u}, \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{A} = - \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Las direcciones características, o sea las direcciones locales de propagación de las señales en el plano  $xt$ , se obtienen de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ ; entonces se resuelve la ecuación  $\det(\mathbf{A} - I_2\lambda) = 0$  para  $\lambda = dx/dt$ , donde  $I_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Los resultados son los siguientes:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \alpha. \quad (13)$$

Dado que los dos valores propios son distintos y reales, el sistema es estrictamente hiperbólico (referencia común acerca de las propiedades hiperbólicas de un sistema de ecuaciones son [10, 11]). En el caso  $\beta = 0$  y  $\alpha = 1$  (la ecuación de onda usual) se obtienen las velocidades características  $\lambda = \pm 1$ , lo que implica que las trayectorias de los datos iniciales son rectas con pendientes  $\pm 1$  y definen el cono de luz usual  $x = x_0 \pm t$ , lo que determina el dominio local de dependencia e influencia de los campos que se propagan a través del punto  $x_0$ .

Los vectores propios correspondientes a  $\lambda_{\pm}$  son  $u_1 = (1, -1)^T$  y  $u_2 = (1, 1)^T$ . La matriz que diagonaliza  $\mathbf{A}$  es por tanto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

De aquí,  $\mathbf{A}$  puede escribirse como  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ , con  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ . Multiplicando la ecuación (11) por  $\mathbf{P}^{-1}$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\partial_x\mathbf{u} &= -\partial_x(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{u} \\ \partial_t\mathbf{w} + \mathbf{\Lambda}\partial_x\mathbf{w} &= -\partial_x(\mathbf{\Lambda})\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\pi - \psi, \pi + \psi)^T = (R, L)^T \quad (16)$$

son las *variables características*. De este modo, las dos ecuaciones (9) y (10) se desacoplan, y la dinámica del campo escalar ha quedado descompuesta en un modo que se mueve a la derecha ( $R = 1/2(\pi - \psi)$ ) y otro que se mueve a la izquierda ( $L = 1/2(\pi + \psi)$ ). La ecuación (16) desacopla entonces el sistema en un par de ecuaciones de advección para las variables  $R$  y  $L$ .

## 2.2. Datos iniciales

En la versión de primer orden de la ecuación de onda es necesario conocer al tiempo inicial los valores de  $\pi(0, x)$  y  $\psi(0, x)$ . Esto es equivalente a demandar valores para  $\phi$  y su derivada temporal al tiempo inicial. Con el fin de enfocarnos en la evolución de datos iniciales es posible elegir simplemente datos simétricos en el tiempo para un perfil gaussiano:

$$\begin{aligned}\phi(0, x) &= Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2} \\ \psi(0, x) &= -2\frac{(x-x_0)}{\sigma^2}\phi(0, x), \\ \pi(0, x) &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Se sabe que la solución de la ecuación de onda es la superposición de un pulso que se mueve a la derecha y otro que se mueve a la izquierda ( $\phi(t, x) = f(x+t) + g(x-t)$ ). Entonces la evolución de los datos iniciales (17) debiera mostrar la descomposición de los datos iniciales en dos gaussianas. De hecho, en el caso usual ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ) para los datos iniciales (17) se tendría

$$\phi(0, x) = \frac{1}{2}Ae^{-([x+t]-x_0)^2/\sigma^2}|_{t=0} + \frac{1}{2}Ae^{-([x-t]-x_0)^2/\sigma^2}|_{t=0},\tag{18}$$

que involucra en realidad dos pulsos gaussianos superpuestos que al tiempo  $t = 0$  aparecen como uno solo.

## 2.3. Evolucionando los datos iniciales

La evolución de datos consiste en el cálculo de la función  $f_j^{n+1}$  a partir de datos en los niveles de tiempo previos. Para ilustrarlo considérese la ecuación (9) con  $\beta = 0$  y  $\alpha = 1$ . En este caso particular la discretización en el punto  $(t^n, x_j)$  es

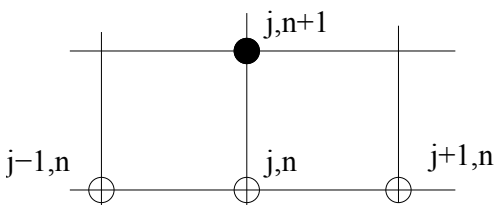
$$\frac{\pi_j^{n+1} - \pi_j^n}{\Delta t} \approx \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} \Rightarrow \pi_j^{n+1} = \pi_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n),\tag{19}$$

donde se ha supuesto que  $\Delta t$  y  $\Delta x$  son pequeños. Una expresión similar se encuentra para la evolución de  $\psi$  a partir de (10). Para conocer el valor  $\pi(t^{n+1}, x_j)$  es necesario conocer los valores de  $\psi$  en los puntos vecinos  $(t^n, x_{j+1})$ ,  $(t^n, x_{j-1})$  y el valor de  $\pi$  en  $(t^n, x_j)$ . Tal discretización se conoce como hacia delante en el tiempo y centrada en el espacio (FTCS); la molécula usada para construir datos al tiempo  $n + 1$  se muestra en la Figura 1. Se trata de una discretización ilustrativa y fácil de implementar, pero inestable. Sin

embargo la discretización en este ejemplo ilustra el método que es estable y muy poderoso: el método de líneas (MoL). En el concepto de MoL se supone que para cada  $j$  la EDP satisface una ecuación diferencial ordinaria (EDO) a lo largo de las líneas verticales en el plano  $xt$  según se ilustra en la Figura 1. Con esta información en mente, basta con tener la discretización en (19) e integrar en el tiempo la ecuación diferencial resultante para  $\partial_t \pi$ . Los términos aparte de la derivada en el tiempo de la EDP se consideran miembros de la *parte derecha* de la ecuación en el tiempo. Entonces basta con un integrador de EDO para evolucionar datos de un tiempo al siguiente. Uno solamente tiene que elegir dicho integrador en términos de la precisión deseada, la disipación que introduce en los cálculos y sus propiedades de estabilidad, lo que implica restricciones en el valor del factor de Courant  $\Delta t/\Delta x$  (para aprender más acerca de las propiedades de los algoritmos de evolución conviene revisar las referencias [10, 11, 12]). Para obtener los resultados de este manuscrito se ha usado un algoritmo Runge-Kutta de tercer orden. Una versión simplificada de este algoritmo supone que la función  $f$  satisface una ecuación del tipo  $\partial_t f = S$ , donde  $S$  es la *parte derecha* de la ecuación de evolución para  $f$  y que puede incluir funciones y derivadas de funciones conocidas en su versión discreta. Entonces el algoritmo para calcular  $f^{n+1}$  en términos de valores de funciones en el tiempo previos se resume así:

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \Delta t S^n, \\ f^{**} &= \frac{3}{4} f^n + \frac{1}{4} f^* + \frac{\Delta t}{4} S^*, \\ f^{n+1} &= \frac{1}{3} f^n + \frac{2}{3} f^{**} + \frac{2}{3} \Delta t S^{**}. \end{aligned}$$

Este algoritmo es usado comúnmente porque requiere de tres iteraciones solamente, es preciso y estable para valores suficientemente pequeños del factor de Courant.



**Figura 1.** Ilustración de la molécula usada en la construcción de la solución al tiempo  $n + 1$ . El círculo lleno indica el punto donde se desea calcular el valor de una variable, mientras que los vacíos indican la posición de los puntos donde son conocidas las funciones involucradas.

#### 2.4. Condiciones de frontera

Como se puede ver de la ecuación (19) y de la Figura 1, el valor de la variable que se desea actualizar puede calcularse solamente en los puntos interiores del dominio, y no

en aquellos localizados en las fronteras  $x_0, x_N$ ; la razón es que en la *parte derecha* de  $\pi$  aparece una derivada espacial. Este no es un obstáculo sino una oportunidad para imponer condiciones de frontera que involucran derivadas espaciales. Como ejemplos de condiciones de frontera para la ecuación de onda se tienen los siguientes: i) *periódicas*, para las cuales se supone un cambio de la topología del dominio espacial de un trozo de  $\mathfrak{R}$  (pues el dominio espacial es finito), a la circunferencia  $S^1$ , lo cual se logra asociando los valores de las variables en un extremo del dominio con los valores en el otro extremo; ii) *reflejantes*, que consisten en reflejar la onda una vez que llega a las fronteras y iii) *de onda saliente*, que absorben la función de onda una vez que ésta llega a las fronteras. Debido a que la mayoría de los sistemas en Relatividad General suponen que los sistemas bajo estudio son aislados, y debido a que el dominio espacial es finito, en los ejemplos que siguen en este manuscrito se usará solamente este tipo de condición de frontera.

La condición en la frontera izquierda consiste en la eliminación del modo que viaja hacia la derecha ( $R = 0$ ), lo que significa que no se permite la reflexión hacia dentro del dominio, y la condición en la frontera derecha consiste en eliminar el modo que viaja a la izquierda ( $L = 0$ ). Explícitamente, en la frontera izquierda  $x_0$  se exige

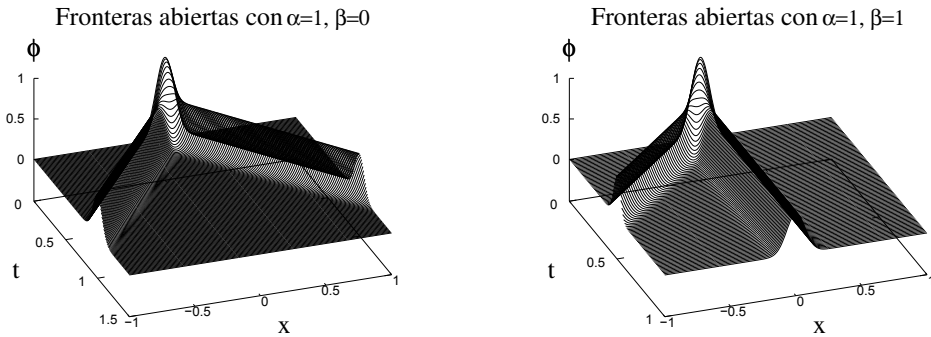
$$\frac{1}{2}(\pi_0^n + \psi_0^n) = L_0, \quad \frac{1}{2}(\pi_0^n - \psi_0^n) = R_0 = 0, \quad (20)$$

cuya solución es  $\pi_0^n = \psi_0^n = L_0$ . De modo equivalente, la condición en la frontera derecha es  $\pi_N^n = R_N$  y  $\psi_N^n = -R_N$ . El problema se reduce a calcular  $L_0, R_0, L_N$  y  $R_N$ . Para conocer estos valores basta con hacer una extrapolación usando los puntos internos de la malla.

## 2.5. Resultados

Con todos estos conceptos en mente: datos iniciales, un algoritmo de evolución para las funciones de un tiempo al siguiente, condiciones de frontera y un código que contiene todos estos ingredientes, es posible construir soluciones de la ecuación de onda bajo muchas distintas circunstancias. Aquí se presentan algunos ejemplos ilustrativos. El dominio espacial considerado es  $-1 \leq x \leq 1$ , y se usan resoluciones  $\Delta x = 0,002$  y  $\Delta t = 0,0005$ .

En la Figura 2 se presentan dos casos con  $\alpha = 1$ . En el primer caso  $\beta = 0$ , lo que corresponde al caso usual de la ecuación de onda. De hecho, puede verse que la gaussiana inicial se divide en dos gaussianas pequeñas que llegan a las fronteras al mismo tiempo (alrededor  $t \sim 1$ ). Sin embargo, en el segundo caso  $\beta = 1$ , esto es, las coordenadas se mueven hacia  $x > 0$  a la velocidad de propagación de la onda; entonces el sistema de



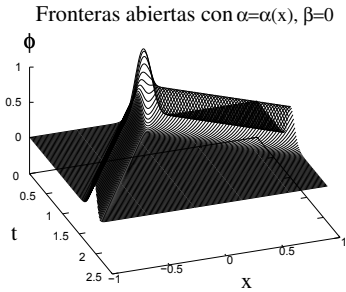
**Figura 2.** Solución de la ecuación de onda para dos casos. (Izquierda) La ecuación de onda usual; la gaussiana inicial se parte en dos gaussianas de amplitud igual a la mitad de la original y del mismo ancho, cada una de las cuales viaja hacia las fronteras. (Derecha) La ecuación de onda con  $\beta = 1$ , lo que implica que las coordenadas viajan a la velocidad de propagación de uno de los pulsos.

coordenadas sigue a uno de los pulsos, lo que en la figura se traduce en un pulso centrado permanentemente en  $x = 0$ ; el otro pulso alcanza la frontera en la mitad del tiempo que toma en el caso anterior.

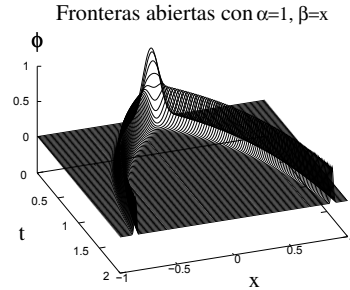
Un ejemplo que ilustra el papel del lapso  $\alpha$  es el mostrado en la Figura 3. En tal caso el lapso tiene el perfil de una función escalón suavizada tal que el lapso va de 0,5 a 1,0. El efecto que produce esta elección es que, siendo  $\alpha^2$  el coeficiente de  $dt^2$ , determina qué tan separados se encuentran los niveles de tiempo. Por tanto, la evolución en la región donde  $\alpha = 0,5$  ( $x < 0$ ) es más lenta que en la región donde  $\alpha = 1$  ( $x > 0$ ). De hecho, en el primer caso al pulso le toma un tiempo  $\sim 2$  para llegar a la frontera, mientras que en el segundo caso el pulso llega a la frontera en un tiempo  $\sim 1$ . Este tipo de comportamiento es muy útil en escenarios de Relatividad General. Por ejemplo, cuando se forma un hoyo negro debido al colapso de algún tipo de materia, lo que se encuentra es que los invariantes geométricos (por ejemplo el invariante de Kretschmann  $K = R_{\gamma\delta\mu\nu}R^{\gamma\delta\mu\nu}$ ) comienzan a divergir en la región de la singularidad, y por tanto una posibilidad para evitar este problema es elegir una condición de foliación que comprime la separación temporal entre un tiempo dado y el siguiente en la región cercana al origen demandando que  $\alpha \rightarrow 0$  en esta región, de modo que la evolución tiende a congelarse ahí.

Como ejemplo final, en la Figura 4 se presenta la solución para el caso  $\alpha = 1$  y  $\beta = x$ . En este caso las coordenadas viajan a la velocidad de la onda en las fronteras  $x = \pm 1$ , porque en esos dos puntos  $\beta = \pm 1$ . Esto implica que las señales nunca llegarán a las fronteras

numéricas. El efecto es que los pulsos en estas coordenadas se comprimen conforme se acercan a las fronteras. Por una parte esta es una ventaja, porque no es necesario imponer condiciones de frontera (las señales nunca llegarán a las fronteras), y por otra parte, los pulsos están siendo resueltos con cada vez menos puntos del dominio espacial, lo que afecta la precisión de los cálculos. En cualquier caso, este ejemplo ilustra las posibilidades que se tienen cuando se puede elegir un lapso y un *vector de corrimiento*.



**Figura 3.** La ecuación de onda para el caso  $\beta = 0$  y  $\alpha = 0,25 \tanh(10x) + 0,75$ , que es una versión suave de una función escalón que salta de 0,5 a 1,0. Puede observarse que en la región donde  $\alpha = 0,5$  ( $x < 0$ ) la onda se propaga con baja velocidad en estas coordenadas (el pulso tarda más en llegar que el pulso en la otra mitad del dominio). Esto es así porque se ha usado una foliación con intervalo de tiempo  $0,5dt$ , de modo que los intervalos de tiempo en esa región se encuentran más cercanos uno al otro, mientras que en la región con  $x > 0$ , para el cual el intervalo de tiempo es como en los casos anteriores  $1,0dt$ , están más alejados.



**Figura 4.** Solución para el caso  $\beta = x$  y  $\alpha = 1$ . Debido a que el valor del *vector de corrimiento* iguala al valor de la velocidad de propagación de la onda en las fronteras, las señales nunca llegarán a las fronteras. Las gaussianas se comprimen conforme se aproximan a las fronteras pues en esa región el dominio físico esta representado por una región de tamaño menor al real.

### 3. Campo escalar real autogravitante

Un ingrediente que se puede agregar a la ecuación de onda es la gravedad. La generalización más simple de la ecuación de onda en la dirección de la Relatividad General consiste en considerar que la función de onda está asociada a un campo escalar, para el cual hay un tensor de energía-momento bien conocido. En este manuscrito se incluye además la propiedad de que dicho campo escalar tenga masa. El tensor de energía-momento para dicho campo escalar es el siguiente:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + 2V(\phi)], \tag{21}$$

que se conecta a la geometría del espacio-tiempo a través de las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = \kappa_0 T_{\mu\nu}$ , donde  $\kappa_0 = 8\pi G$  en unidades donde  $c = 1$ ;  $V(\phi)$  es el potencial del campo escalar que en el presente caso es considerado de la forma  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ , donde  $m$  se interpreta como la masa de un bosón de espín cero en teoría de campos cuánticos. Por simplicidad, en adelante se considerará que el espacio-tiempo es esféricamente simétrico. Una restricción importante acerca de las soluciones a las ecuaciones de Einstein con campo escalar real en simetría esférica es que no es sencillo construir soluciones que sean asintóticamente Schwarzschild con un campo escalar no trivial, y es preciso considerar sutilezas respecto de las propiedades del potencial del campo escalar. Una manera de evitar este problema consiste en suponer que el espacio-tiempo depende del tiempo. El precio a pagar es que las ecuaciones resultantes constituyen un sistema de EDP en el tiempo y la coordenada radial. Bajo tales suposiciones es posible escribir el elemento de línea en coordenadas de Schwarzschild como

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t)dt^2 + a^2(r, t)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (22)$$

donde  $\alpha$  es la función lapso y donde se ha supuesto que la única componente del vector *vector de corrimiento*  $\beta^r = 0$ . Aquí  $r$  y  $t$  son las coordenadas radial y temporal respectivamente. Con la finalidad de eliminar algunas constantes que aparecen en las ecuaciones de Einstein y la de Klein-Gordon, es posible reescalar las variables  $\phi \rightarrow \sqrt{\kappa_0}\phi$ ,  $r \rightarrow mr$  y  $t \rightarrow mt$ . La identidad de Bianchi para el tensor de materia implica la mencionada ecuación de Klein-Gordon:

$$\square\phi - \phi = 0, \quad (23)$$

donde, como se mencionó antes,  $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]$ , con  $\phi = \phi(r, t)$ . Aquí  $g$  y  $g^{\mu\nu}$  son el determinante y la inversa de la métrica (22). De igual modo a como se hizo en el caso de la ecuación de onda, se procede a definir variables de primer orden. De hecho, después de desarrollar el operador de D'Alembert como se hizo en la ecuación (8) se descubre que un buen conjunto de variables de primer orden es  $\psi = \partial_r\phi$  y  $\pi = a\partial_t\phi/\alpha$ . En términos de estas nuevas variables, las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{r}{4} [\psi^2 + \pi^2 + 2a^2V], \quad (24)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{\partial_r a}{a} + \frac{a^2 - 1}{r} - ra^2V, \quad (25)$$

$$\partial_t a = \frac{1}{2}r\alpha\psi\pi, \quad (26)$$



donde (24) es la constricción hamiltoniana, (25) es la componente  $(r, r)$  de las ecuaciones de Einstein y (26) es la constricción de momento (componente  $(t, r)$  de las ecuaciones). Este conjunto de ecuaciones es sobredeterminado y es necesario elegir las ecuaciones que serán resueltas. Como en [13], las primeras dos ecuaciones se resuelven y la constricción de momento se usa solamente para monitorear la precisión con que se están resolviendo las ecuaciones de Einstein, así como la convergencia del código hacia la solución en el continuo de dichas ecuaciones.

Por otra parte, la ecuación de Klein-Gordon se escribe como un conjunto de tres ecuaciones (ver (9) y (10) para comparar):

$$\partial_t \phi = \frac{\alpha}{a} \pi, \quad (27)$$

$$\partial_t \pi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left( \frac{r^2 \alpha \psi}{a} \right) - a \alpha \phi, \quad (28)$$

$$\partial_t \psi = \partial_r \left( \frac{\alpha \pi}{a} \right), \quad (29)$$

lo cual completa el sistema de EDP que describen un campo escalar autogravitante. La pregunta es qué hacer con la ecuación (26). De hecho, se supone que si el resto de las ecuaciones está siendo resuelta con cierto grado de precisión, esta constricción tiene que estar satisfaciéndose también con cierto grado de precisión. Para verificarlo basta con mostrar que la cantidad  $\partial_t a - \frac{1}{2} r \alpha \phi \pi$  converge a cero en el límite continuo.

Un detalle importante en (28) es que el primer término es singular para  $r = 0$ . Hay dos cosas por hacer: i) como se hace con frecuencia, se evita el origen de coordenadas, lo cual se logra definiendo el dominio espacial no de  $0 \leq r \leq r_N$  sino de  $-\Delta r/2 \leq r \leq r_N - \Delta r/2$ ; ii) el operador diferencial no converge en el origen; este problema se resuelve usando la expresión  $3 \frac{d}{dr^3} \left( \frac{r^2 \alpha \psi}{a} \right)$  para el primer término en (28), donde  $d/dr^3$  indica derivada con respecto a  $r^3$ . Esta es una técnica usada comúnmente (como muestra [13, 14]), y es la usada para obtener los resultados presentados en este trabajo.

### 3.1. Datos iniciales

En este caso, los datos iniciales deben satisfacer las restricciones del sistema, a saber (24–26) y no basta con poner una gaussiana de campo escalar y evolucionarla como en el caso de la ecuación de onda. En general, en la descomposición 3+1 de la Relatividad General es necesario resolver las constricciones hamiltoniana y las de momento al tiempo inicial para el sistema físico deseado (un artículo de revisión acerca de la construcción de datos iniciales se encuentra en [15]). Una vez que las constricciones son resueltas, las ecuaciones

de evolución se utilizan para evolucionar los datos iniciales; por ejemplo, en la formulación ADM de la Relatividad General las variables dinámicas son las componentes de la 3-métrica y las componentes de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espaciales con que se folia el espacio-tiempo [9], y las constricciones se utilizan para verificar que las soluciones numéricas convergen a las soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein.

En el presente caso, la constricción de momento no ha sido considerada para evolucionar el sistema, y el *vector de corrimiento* ha sido fijado a  $\beta^r = 0$ , lo que implica que es necesario resolver las constricción hamiltoniana y (25) al tiempo inicial. Afortunadamente, estas ecuaciones son ordinarias y la solución numérica de tales sistemas se puede obtener usando cualquier método iterativo como los que aparecen en las recetas numéricas [12].

La inspección de las ecuaciones (24) y (25) sugiere la necesidad de dar valores de  $\pi$  y  $\psi$  al tiempo inicial. Esto se consigue suponiendo algún perfil de  $\phi$  y  $\psi$  tal como se hizo para la ecuación de onda- se supone simetría temporal al tiempo inicial, es decir  $\pi = 0$ . Como antes, se elige un perfil gaussiano centrado en el origen de coordenadas, es decir,  $\phi(r, 0) = Ae^{-r^2/\sigma^2}$ , y su derivada espacial  $\psi(r, 0) = -\frac{2r}{\sigma^2}\phi(r, 0)$ . Puede tratarse de cualquier otro perfil para el campo escalar, pero siempre es preferible que sea de soporte compacto.

Entonces, la construcción de los datos iniciales funciona de la siguiente manera: i) se suministran  $\phi(r, 0)$  y  $\psi(r, 0)$ ; ii) se supone  $\pi = 0$ ; iii) se integra la constricción hamiltoniana (24) del origen hacia la frontera del dominio numérico suponiendo que el origen es espacialmente plano ( $a = 1$ ); iv) se supone que en la frontera el espacio-tiempo corresponde a una solución en el vacío (en el presente caso a la solución de Schwarzschild), por lo que se supone  $\alpha(r_N, 0) = 1/a(r_N, 0)$  en la frontera; entonces se integra (25) para  $\alpha$  de la frontera hacia el origen. La integración del lapso y de la constricción hamiltoniana se resuelve en este trabajo usando un integrador iterativo Runge-Kutta de segundo orden.

### 3.2. Evolución

Al igual que en el caso de la ecuación de onda, se utiliza la aproximación de diferencias finitas centradas para aproximar las ecuaciones continuas. El sistema de ecuaciones por resolver es finalmente (24-25) y (27-29). Las primeras dos ecuaciones son ordinarias en  $r$  y las otras tres son ecuaciones parciales de evolución. Por tanto, dichas tres ecuaciones dirigen la evolución de los datos iniciales, lo que implica que controla los valores de las componentes del tensor de energía-momento; las otras dos ecuaciones son las ecuaciones

de Einstein que se resuelven cada vez que se tienen valores nuevos para  $\pi$  y  $\psi$  (ver (21) y (24)).

El procedimiento es el siguiente: i) se toman los datos iniciales construidos en la sección previa; ii) se evolucionan dichos datos usando (27–29); iii) se aplican condiciones de frontera al campo escalar y sus derivadas; iv) se resuelve la restricción hamiltoniana (24) del origen hacia fuera suponiendo que el origen es espacialmente plano,  $a(r_0) = 1$ ; v) en la frontera del dominio numérico; se supone que el espacio-tiempo es el de Schwarzschild y se define  $\alpha(r_N) = 1/a(r_N)$ ; entonces se integra la ecuación para  $\alpha$  hacia dentro; vi) se usan los nuevos valores de  $\alpha$  y  $a$  para calcular nuevos valores del campo escalar y sus derivadas a través de (27–29); vii) se repite el proceso a partir de (iii).

En cada paso de tiempo las funciones métricas  $\alpha$  y  $a$  se relacionan una con otra a través de la condición  $\alpha(r_N) = 1/a(r_N)$ , pero nada se ha dicho acerca de las condiciones de frontera del campo y sus derivadas mencionadas en (iii). Lo que se supone es que en la frontera el campo escalar se comporta como una onda esférica, de modo que cumple la relación

$$\psi = -\pi - \phi/r, \quad (30)$$

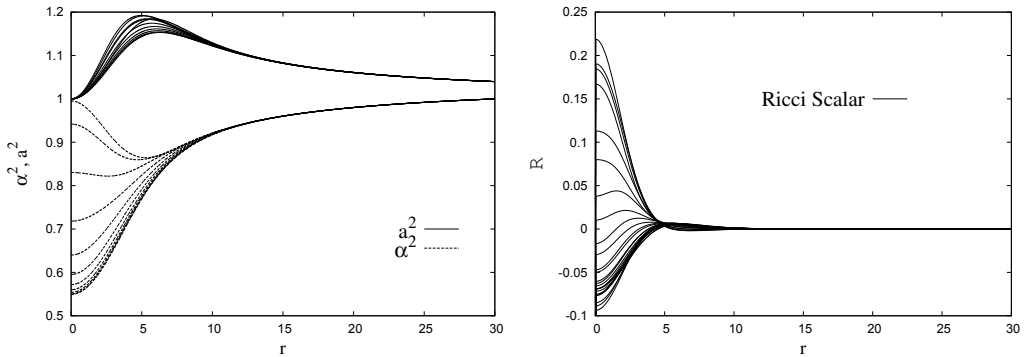
la cual involucra la información de las funciones métricas ( $\pi = a\partial_t\phi/\alpha$ ). Sin embargo, no se cuenta con toda la información necesaria: según (27) el campo escalar puede integrarse hasta la frontera, pues la parte derecha de dicha ecuación no contiene derivadas espaciales y no es necesario aplicar condiciones sobre  $\phi$ ; sin embargo, en lugar de imponer un perfil al campo en la frontera se escribe la ecuación que debe cumplir una onda esférica,

$$\partial_r\pi + \partial_t\pi + \pi/r = 0, \quad (31)$$

que involucra a las derivadas espacial y temporal del campo. Para resolver esta ecuación en la frontera se usan los operadores no-centrados descritos en la sección 1.1, pues para calcular  $\partial_r\pi$  solamente hay puntos disponibles dentro del dominio numérico, incluyendo  $\pi(r_N)$ ; el resto consiste en resolver para  $\pi(r_N)$  en la versión discreta de (31). Una vez que se calcula  $\pi(r_N)$ , se usa (30) para calcular  $\psi(r_N)$ , con lo que se resuelve el problema de los valores en la frontera de las derivadas del campo.

Con la finalidad de ilustrar que la combinación de los ingredientes descritos funciona correctamente, se presenta el caso en que el perfil gaussiano del campo escalar es  $\phi(r, 0) = 0,3e^{-r^2/(5,35)^2}$ . Cualquier otro conjunto de parámetros es útil, pero se usan estos porque la solución resultante presenta un largo tiempo de vida. La frontera se eligió en  $r_N = 30$ , de modo que la materia se encuentra localizada cerca del origen. En la Fig. 5 se presenta

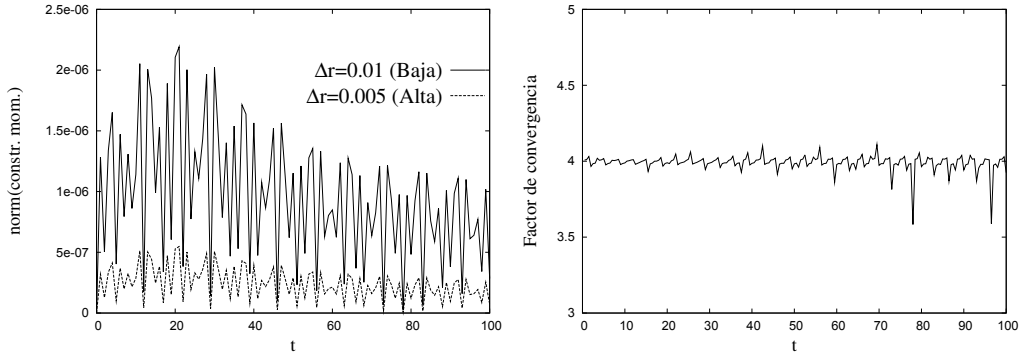
el comportamiento dinámico de las funciones métricas. Se muestra además el escalar de Ricci, el cual muestra también un comportamiento dependiente del tiempo, lo que indica que las oscilaciones no son producto de la elección de las coordenadas. La transformada de Fourier del valor central de esta cantidad revela un modo cuasinormal de baja frecuencia y otro de alta frecuencia que corresponde a sobretonos de las oscilaciones del campo escalar [13].



**Figura 5.** (Izquierda) Se muestran instantáneas de las funciones métricas  $a^2$  y  $\alpha^2$ . (Derecha) Se muestran instantáneas del escalar de Ricci  $R$ ; posiblemente esta solución es una de las más elementales que presenta una geometría altamente dependiente del tiempo.

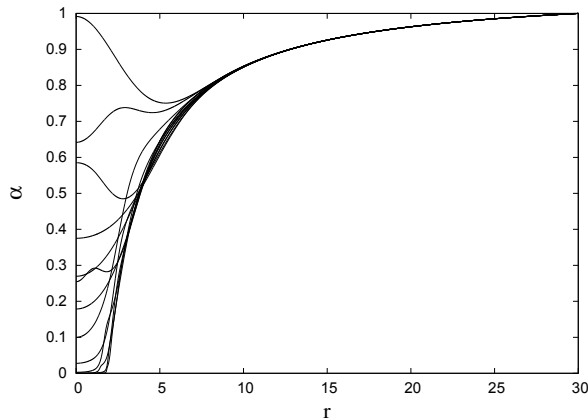
Es necesario verificar que la constricción de momento (26) se satisface en el límite continuo, de lo contrario no se puede decir que se están resolviendo las ecuaciones de Einstein. En la Fig. 6 se muestra el valor de la norma  $L_2$  de la cantidad  $\partial_t a - \frac{1}{2} r \alpha \phi \pi$  calculada en el dominio discreto para la solución de la Fig. 5, para lo cual se han usado dos resoluciones distintas. La implicación es que la constricción de momento se cumple en el continuo, o bien, que la constricción de momento converge a cero con segundo orden. En la Fig. 6 también se muestra el factor de convergencia (que según (4) debe ser estrictamente 4), es decir, que el valor de la constricción de momento con alta resolución multiplicada por 4 debiera aparecer justamente encima de la gráfica de la constricción con la resolución baja.

Otra situación ilustrativa ocurre cuando  $\phi(r, 0) = 0,4e^{-r^2/(5,35)^2}$ , pues la materia se encuentra tan localizada que el objeto es suficientemente compacto para que el sistema colapse en un hoyo negro. En la Fig. 7 se muestran instantáneas del lapso; después de algunas oscilaciones la configuración finalmente se colapsa. Las coordenadas usadas no son las más adecuadas (son las de Schwarzschild) para continuar la evolución después de que se ha formado el hoyo negro de manera precisa, pues la función  $a$  comienza a



**Figura 6.** (Izquierda) Se muestra la norma euclidiana (puede ser cualquier otra norma) de la constricción de momento para dos resoluciones distintas. (Derecha) Se muestra el factor de convergencia de dicha norma como se definió en (4). El hecho de que el valor de la norma de la constricción usando la resolución baja es cuatro veces mayor que aquella calculada usando la resolución alta, indica convergencia de segundo orden a cero, lo que indica que en el límite continuo (26) se satisface. Otra conclusión importante es que los valores elegidos de  $\Delta t$  y  $\Delta r$  que se usaron se encuentran en el régimen de convergencia. Por otra parte, el factor de convergencia presenta picos, lo cual indica que hay un corrimiento de fase de la cantidad calculada (en este caso la norma de la constricción de momento) entre una resolución y la otra.

divergir cerca de la posición del horizonte; el uso de coordenadas penetrantes con *vector de corrimiento* distinto de cero o una condición de lapso que tiende a evitar singularidades (por ejemplo el caso en [16] para un sistema muy parecido al presentado aquí) permite seguir la evolución del hoyo negro.



**Figura 7.** Se muestran instantáneas del lapso para la configuración que colapsa en hoyo negro. Después de algunas oscilaciones el lapso finalmente colapsa a cero, lo que indica -en estas coordenadas- la formación de un horizonte aparente.

### 3.3. Oscilatonos

Otras aplicaciones de los algoritmos descritos en esta sección incluyen el estudio del colapso crítico como se hizo en la referencia clásica de Choptuik [17]. Adicionalmente, es importante remarcar el interesante caso de soluciones oscilantes de largo tiempo de vida llamadas oscilatonos. Estas son soluciones al problema de valores iniciales suponiendo que el campo escalar real y las funciones métricas pueden expresarse en términos de una serie de Fourier. El resultado es que como otras soluciones de tipo estrella (de neutrones o de bosones) las configuraciones de equilibrio presentan ramas estable e inestable; esto es, las configuraciones estables presentan largo tiempo de vida, mientras que las inestables colapsan en hoyos negros. La primera referencia a estas soluciones es [18], y un análisis detallado de los oscilatonos se encuentra en [13]; una aplicación astrofísica de estas soluciones al problema de la materia oscura se encuentra en [14].

## 4. Campo escalar complejo autogravitante: la estrella de bosones

### 4.1. El sistema de ecuaciones

Una generalización del caso anterior es el caso de campo escalar complejo  $\phi$  tal que  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  funciona como fuente en las ecuaciones de Einstein. El tensor de energía momento de este campo es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^*] - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\phi^{*,\alpha}\phi_{,\alpha} - V(|\phi|^2)], \quad (32)$$

donde  $V(|\phi|^2)$  es el potencial de autointeracción del campo y el asterisco significa complejo conjugado; en este manuscrito nos restringimos al caso  $V = \frac{1}{2}m^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4$ , donde una vez más  $m$  se interpreta como la masa del campo escalar y  $\lambda$  es un coeficiente de la contribución de la autointeracción a pares de bosones en la aproximación de campo medio. La ecuación de Klein-Gordon (KG) es nuevamente

$$\left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi = 0, \quad (33)$$

donde como antes  $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]$ . Esta ecuación es una leve generalización de (23) para un potencial arbitrario. Considerando las partes real e imaginaria del campo, la ecuación de KG se puede escribir como dos ecuaciones:

$$\left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi_1 = 0, \quad \left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi_2 = 0. \quad (34)$$

Las ecuaciones para las funciones métricas  $a$  y  $\alpha$  son necesarias para completar el sistema de ecuaciones; el elemento de línea se supone nuevamente (22). Como en el caso anterior, es conveniente definir variables de primer orden, que en este caso son  $\pi_k = \frac{a}{\alpha} \partial_t \phi_k$  y  $\psi_k = \partial_r \phi_k$ , para cada  $k = 1, 2$ . En términos de estas nuevas variables la ecuación de KG se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi_1 &= \frac{\alpha}{a} \pi_1, \\
 \partial_t \phi_2 &= \frac{\alpha}{a} \pi_2, \\
 \partial_t \psi_1 &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{a} \pi_1 \right), \\
 \partial_t \psi_2 &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{a} \pi_2 \right), \\
 \partial_t \pi_1 &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \psi_1 \right) - \frac{1}{2} a \alpha \frac{dV}{d|\phi|^2} \phi_1, \\
 \partial_t \pi_2 &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \psi_2 \right) - \frac{1}{2} a \alpha \frac{dV}{d|\phi|^2} \phi_2.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Las ecuaciones de Einstein acopladas a este campo escalar para la métrica (22) en términos de las variables de primer orden son muy parecidas a las del caso de campo real:

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{\kappa_0 r}{4} [\pi_1^2 + \pi_2^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + a^2 (V_1 + V_2)], \tag{36}$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{a^2 - 1}{r} + \frac{a'}{a} - \frac{\kappa_0 r a^2}{2} (V_1 + V_2), \tag{37}$$

$$\partial_t a = \frac{\kappa_0 a r}{2} [\partial_r \phi_1 \partial_t \phi_1 + \partial_r \phi_2 \partial_t \phi_2]. \tag{38}$$

Estas ecuaciones son respectivamente la constricción Hamiltoniana, la condición de foliación y la componente  $rt$  de las ecuaciones o constricción de momento. Claramente, este conjunto de ecuaciones está sobredeterminado y -como antes- la constricción de momento se usa solamente para monitorear la solución numérica.

#### 4.2. Datos iniciales para estrellas de bosones y las pruebas

Las estrellas de bosones (BS) son soluciones al sistema de ecuaciones mencionado, bajo una condición particular: el campo escalar depende armónicamente del tiempo  $\phi(r, t) = \phi_0(r) e^{-i\omega t}$ . Esta condición implica que el tensor de energía-momento en (32) es independiente del tiempo, lo que implica a través de las ecuaciones de Einstein que la geometría es también independiente del tiempo. Esto es, se tiene un campo escalar que oscila en el tiempo sobre una geometría estática cuya fuente es el campo escalar mismo. Entonces es posible construir soluciones de estrellas de bosones suponiendo que

la métrica es  $ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + a(r)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2$ . Bajo estas condiciones, las ecuaciones del sistema Einstein-Klein-Gordon son:

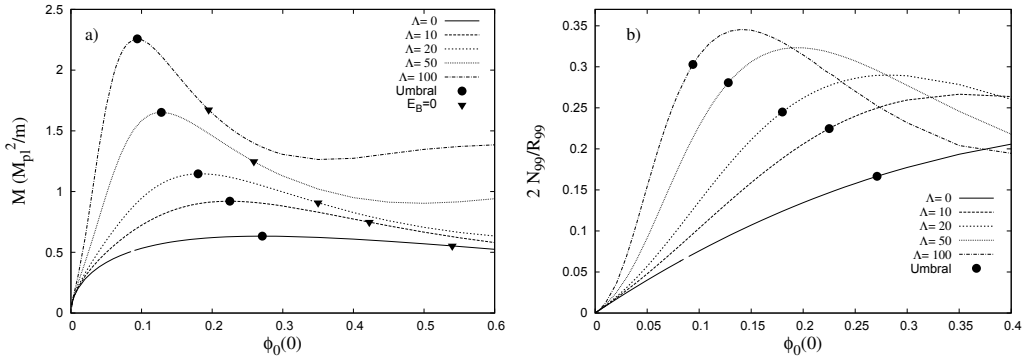
$$\begin{aligned} \frac{\partial_r a}{a} &= \frac{1-a^2}{2r} + \frac{1}{4}\kappa_0 r \left[ \omega^2 \phi_0^2 \frac{a^2}{\alpha^2} + (\partial_r \phi_0)^2 + a^2(m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2}\lambda a^2 \phi_0^4) \right], \\ \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} &= \frac{a^2-1}{r} + \frac{\partial_r a}{a} - \frac{1}{2}\kappa_0 r a^2 \phi_0^2 (m^2 + \frac{1}{2}\lambda \phi_0^2), \\ \partial_{rr} \phi_0 + \partial_r \phi_0 \left( \frac{2}{r} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} - \frac{\partial_r a}{a} \right) + \omega^2 \phi_0 \frac{a^2}{\alpha^2} - a^2(m^2 + \lambda \phi_0^2) \phi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

El sistema (39) es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, para resolver bajo las condiciones de que haya planitud espacial en el origen  $a(0) = 1$ ,  $\phi_0(0)$  tenga un valor finito y  $\partial_r \phi_0(0) = 0$ , y además,  $\phi_0(\infty) = \phi_0'(\infty) = 0$  para garantizar que el espacio-tiempo es asintóticamente plano, como se describe en [19, 20, 21, 22, 23]; estas condiciones reducen el sistema (39) a un problema de valores propios para  $\omega$ . La solución se calcula numéricamente usando la aproximación en diferencias finitas con un integrador de EDO (Runge-Kutta de cuarto orden en el presente caso) y un procedimiento de bisección (*shooting*) que localiza a prueba y error el valor de  $\omega$  para el cual las funciones del sistema (39) satisfacen las condiciones de frontera.

Con la finalidad de recuperar las ecuaciones de evolución sin los parámetros  $m$ ,  $\lambda$  y  $\omega$ , basta con reescalar las variables de modo que  $\phi_0 \rightarrow \sqrt{\kappa_0/2}\phi_0$ ,  $r \rightarrow mr$ ,  $t \rightarrow \omega t$ ,  $\alpha \rightarrow \frac{m}{\omega}\alpha$  y  $\Lambda = \frac{2\lambda}{\kappa_0 m^2}$ . El resultado es que las constantes físicas desaparecen de las ecuaciones, la coordenada radial tiene unidades de  $m$  y el tiempo tiene unidades de  $\omega$ . En estas unidades, los datos iniciales construidos para el sistema de estrella de bosones se evolucionan usando el sistema dependiente del tiempo (35–38).

Antes de mostrar la evolución de las estrellas de bosones es preciso estimar lo que ocurrirá. Las soluciones de (39) definen secuencias de configuraciones de equilibrio como las mostradas en la Fig. 8(a). En cada curva, para cada valor de  $\Lambda$ , aparecen indicados dos puntos importantes: i) el punto crítico -marcado con un círculo negro- indica el umbral entre las ramas estable e inestable de cada secuencia; esto es, las configuraciones a la izquierda de este punto son estables, y las que aparecen a la derecha son inestables, como se ha mostrado a partir del análisis de perturbaciones [22, 23], teoría de catástrofes [25] y la evolución totalmente no-lineal usando relatividad numérica de estas configuraciones de equilibrio [20, 21, 24]; y ii) el punto en el cual la energía de amarre  $E_B = M - Nm = 0$  -marcada con un triángulo invertido-, donde  $N = \int j^0 d^3x = \int \frac{i}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*] d^3x$  es el número de partículas, y  $M = (1 - 1/a^2)r/2$ , valuada en la frontera del dominio numérico, es la masa ADM; aque-





**Figura 8.** (a) Se muestran varias secuencia de configuraciones de equilibrio para distintos valores de  $\Lambda$  en función del valor central del campo  $\phi_0(0)$ ; cada punto de cada curva corresponde a una solución del problema de valores propios y representa una estrella de bosones. Los círculos negros indican configuraciones críticas que dividen las soluciones estables y las inestables. Los triángulos invertidos indican las configuraciones cuya energía de amarre es cero. Las configuraciones que aparecen entre los círculos y los triángulos (a lo largo de cada curva) colapsan en hoyos negros incluso bajo perturbaciones infinitesimales. Las configuraciones a la derecha de los triángulos explotan y se dispersan. (b) Se muestra la compacticidad de cada solución. El punto crítico se indica nuevamente con un círculo negro.

llas configuraciones entre el umbral de inestabilidad y el punto de energía de amarre cero han de colapsar en hoyos negros, mientras que aquellas configuraciones a la derecha del triángulo han de fisionarse como se mostró en [24]. Las unidades de  $M$  y  $N$  son  $M_{pl}^2/m$ , donde  $M_{pl}$  es la masa de Planck y  $m$  es la masa del campo escalar.

Debido a que la masa de las configuraciones en la Fig. 8(a) se escala con  $m$ , la introducción del término de autointeracción permite que las configuraciones tengan masas mayores incluso para valores de  $m$  fijos [26], lo que permite construir estrellas de bosones tan compactas como las estrellas de neutrones [26]. En la Fig. 8(b) se muestra la compacticidad de las configuraciones de equilibrio. Dado que las estrellas de bosones no tienen definida una superficie, se considera como radio de la estrella aquel dentro del cual se tiene el 99% ( $R_{99}$ ) del total de  $N$  (siguiendo a [20, 21] donde se usó la superficie que contiene el 95%) es un lugar donde es razonable medir el campo gravitacional de una de estas configuraciones; entonces la compacticidad que aparece en la Fig. 8(b) está definida como  $2N_{99}/R_{99}$ , donde  $N_{99}$  es el número de partículas integrado hasta  $R_{99}$ . Para valores grandes de  $\Lambda$  es posible construir configuraciones tan compactas que pueden jugar un papel como objetos astrofísicos.

### 4.3. Evolución de estrellas de bosones

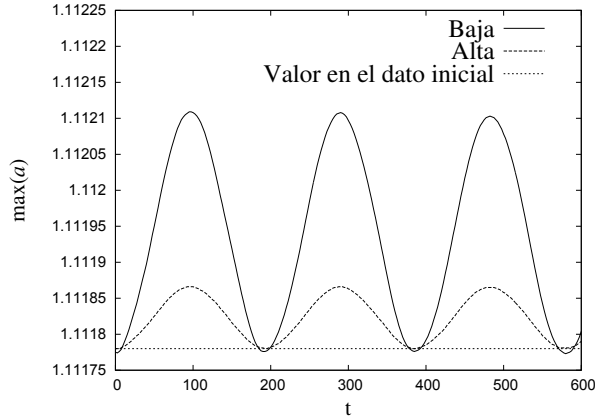
El caso más ilustrativo consiste en probar la hipótesis de que el campo escalar oscila con una frecuencia calculada de antemano al resolver el problema de valores propios, mientras que la métrica permanece independiente del tiempo. Las configuraciones óptimas para probar la hipótesis son las estables, pues tienen largo tiempo de vida. Entonces se elige una configuración estable construida a partir de (39) y se impone como datos iniciales del sistema (35–37). El procedimiento para llevar a cabo la evolución es el mismo que el descrito en la sección anterior para el caso del campo escalar real, incluyendo las condiciones de frontera para el lapso, para  $\pi_k$  (31) y para  $\psi_k$  (30) con  $k = 1, 2$ . Esto es, las partes real e imaginaria del campo se consideran ondas esféricas en la frontera, lo cual es razonable dado que las ecuaciones para  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están desacopladas (ver (34)).

### 4.4. Estrella de bosones estable

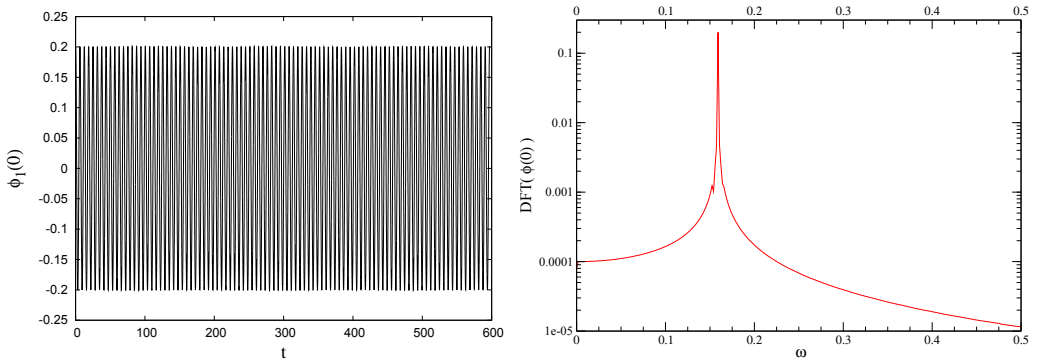
Se considera la configuración con valores  $\phi_0(0) = 0,2$ ,  $\Lambda = 0$ , con  $M = 0,6208(M_{pl}/m)$ . Esta configuración se localiza cerca del umbral de inestabilidad de la curva para  $\Lambda = 0$  en la Fig. 8(a). En la Fig. 9 se muestra el máximo de la función métrica  $a$  como función del tiempo. Se puede ver que la independencia temporal no ocurre y más bien esta función métrica oscila en el tiempo. Sin embargo, se muestra el resultado obtenido con otra resolución, y la amplitud de las oscilaciones cuando se usa la resolución alta es cuatro veces menor a la amplitud medida cuando se usa la resolución baja; esto indica que la amplitud de la oscilación converge a cero en el límite continuo. Es decir, se tendrá un espacio-tiempo estático solamente en el límite continuo.

Además de mostrar que el espacio-tiempo es independiente del tiempo en el límite continuo, la prueba de fuego consiste en mostrar que el campo escalar está realmente oscilando con la frecuencia correcta. En la Fig. 10 se presenta el valor central de  $\phi_1$  como función del tiempo. La transformada de Fourier de dicha cantidad muestra que hay un modo fundamental de oscilación con frecuencia  $\omega = 1/2\pi$ . Este es el valor correcto para cualquier configuración de estrella de bosones calculada si se considera el reescalamiento aplicado  $t \rightarrow \omega t$ .

Para mostrar que se están resolviendo las ecuaciones de Einstein es necesario mostrar que se satisface la constricción de momento en el continuo. Una vez más se verifica que esto ocurre para la cantidad  $\partial_t a - \frac{ar}{2}[\partial_r \phi_1 \partial_t \phi_1 + \partial_r \phi_2 \partial_t \phi_2]$  definida en el dominio discreto. La convergencia es de segundo orden y el resultado es semejante al mostrado en la Fig. 6



**Figura 9.** Se muestra el máximo de  $a$  en función del tiempo para la configuración con  $\phi_0(0) = 0,2$  y  $\Lambda = 0$ . De acuerdo con las hipótesis en la construcción de las configuraciones de estrella de bosones, esta función debiera ser independiente del tiempo. Sin embargo es evidente que esta función métrica oscila en el tiempo. Mediante el uso de dos resoluciones distintas  $\Delta r = 0,05$ ,  $\Delta r = 0,025$ , se muestra que la amplitud de las oscilaciones converge a cero con segundo orden si se considera que el valor del máximo de  $a$  es el calculado en la construcción de la configuración  $max(a_{ivp}) = 1,11178$ .



**Figura 10.** (Izquierda) Se muestra el valor central de  $\phi_1$  en función del tiempo para la estrella con  $\phi_0(0) = 0,2$  y  $\Lambda = 0$ . (Derecha) Se muestra la transformada de Fourier de dicha cantidad. El pico principal aparece en la frecuencia  $\omega = \frac{1}{2\pi}$ .

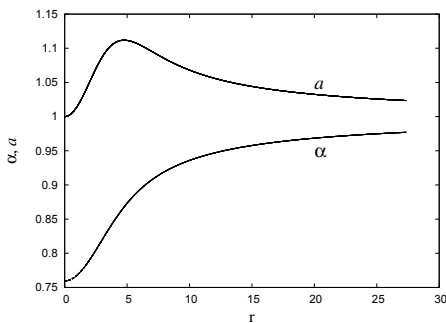
para el caso del campo escalar real.

Finalmente, en la Fig. 11 se muestran instantáneas de las funciones métricas durante la evolución. La dependencia temporal de las funciones métricas converge a cero según se mostró en la Fig. 9 para el máximo de  $a$ . En esta nueva gráfica se muestra que la independencia temporal es manifiesta no solamente en la región donde aparece el máximo de  $a$ , sino para todos los valores de  $r$ .

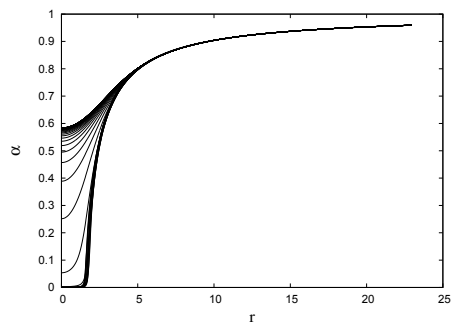
En conclusión, de alguna manera las partes real e imaginaria del campo oscilan y conspiran para mantener una métrica independiente del tiempo que *no siente* la dinámica del campo escalar.

#### 4.5. Estrella de bosones inestable

Con el fin de mostrar la formación de un hoyo negro, se considera una de las configuraciones que pertenece a alguna de las ramas inestables como dato inicial de las ecuaciones de evolución. Se considera la configuración con  $\phi_0(0) = 0,25$  y  $\Lambda = 10$  (que pertenece a la rama inestable del caso  $\Lambda = 0$  en la Fig. 8(a)). El error de discretización será suficiente para activar el colapso de la estrella. El resultado de la evolución se resumen en la Fig.12, donde se muestran instantáneas del lapso; el lapso colapsa a cero en una región que se espera esté cubierta por un horizonte de eventos, al igual que en el caso del colapso del campo escalar real en un hoyo negro. El proceso de colapso más completo seguido para una estrella de bosones aparece en [24], donde incluso se trazan tanto el horizonte aparente como el de eventos. Los resultados presentados en esta sección, incluso usando el mismo tipo de coordenadas, son los que aparecen en los trabajos canónicos de evolución de estrellas de bosones esféricamente simétricas [20, 21].



**Figura 11.** Se muestran instantáneas a distintos valores del tiempo de las funciones métricas. La independencia temporal es manifiesta en todo el dominio espacial.



**Figura 12.** Instantáneas del lapso para la configuración con  $\phi_0(0) = 0,22$  and  $\Lambda = 10$ . Después de un tiempo el lapso finalmente se colapsa a cero, lo cual indica que se ha formado un horizonte.

#### 4.6. Aplicaciones de las estrellas de bosones

Las estrellas de bosones son sistemas autogravitantes que ayudan a ilustrar la evolución de espacio-tiempos con materia. Una propiedad fundamental de los campos escalares es que las ecuaciones de evolución son lineales y no se forman discontinuidades a partir de

datos iniciales suaves. De hecho, como se ha mostrado en los ejemplos presentados aquí, la ecuación de evolución del campo escalar es la ecuación de onda con un operador de D'Alembert algo más general que el del espacio-tiempo plano.

Las estrellas de bosones no se han estudiado solamente como modelos de juguete, sino que se ha planteado la posibilidad de que existan como objetos astrofísicos. En este sentido, las estrellas de bosones se consideran como estados finales de condensados de Bose autogravitantes [27], que son fuente de un espacio-tiempo libre de singularidades y de horizontes. Debido a que estos objetos no absorben radiación electromagnética, se espera que sean transparentes pero negros, pues tampoco emiten. De hecho, la versión newtoniana de las BS ha sido considerada como modelo de halos galácticos que explican el proceso de formación galáctica bajo la hipótesis de que la materia oscura es un condensado de Bose [27].

Es posible obtener resultados relevantes con el conocimiento desarrollado en esta sección. Por ejemplo, es posible inferir las diferencias entre una estrella de bosones y un hoyo negro cuando hay un disco de acreción en torno a ellos [28, 29, 30]. Ideas fuera del alcance de estas notas consisten en considerar que estos objetos pueden ser fuentes de ondas gravitacionales, lo cual determinaría la existencia potencial de las estrellas de bosones [31].

## 5. *Comentarios finales*

A lo largo de estas notas se ha mostrado cómo resolver sistemas de EDP relacionadas con la Relatividad General usando la aproximación con diferencias finitas. Entre otras, una de las ventajas más relevantes del uso de métodos numéricos para estudiar sistemas autogravitantes consiste en verificar la estabilidad de sistemas en el régimen no lineal, es decir, más allá de los estudios con teoría de perturbaciones lineales.

Los ejemplos relacionados con los campos escalares autogravitantes pueden mejorar fácilmente. A partir de los casos vistos aquí, es elemental generalizar a casos en los que la libertad de norma sea más general que la aquí usada; por ejemplo, en [16] se presenta la solución de un sistema de campo escalar autogravitante con condiciones de lapso que autocorriga las coordenadas.

Un punto importante relacionado con los algoritmos es que en los ejemplos desarrollados en este manuscrito, la resolución en todos los casos es uniforme. Esta condición es suficiente para resolver los casos descritos, pero no necesariamente lo es en casos más

generales. La razón es que cuando las ecuaciones involucran tres dimensiones espaciales la memoria de la computadora se convierte en una limitante. Es entonces necesario optimizarla y hacer uso de algoritmos de refinamiento de mallas que permiten asignar memoria solamente en aquellas regiones donde los gradientes de las funciones involucradas en las EDP son grandes. Otra alternativa consiste en usar transformaciones de coordenadas que asignan mayor resolución a las regiones espaciales en las que se encuentran las fuentes de materia y asigna menos resolución a las regiones en las que ocurren solamente fenómenos de radiación lejana a las fuentes de materia.

Finalmente, es de suma importancia señalar que existe una amplia gama de problemas sin resolver dentro de la Relatividad Numérica y la Astrofísica Relativista. Entre otros, se encuentran los sistemas con fluidos perfectos autogravitantes, ya sea en procesos de acreción o en procesos de explosión y colapso de supernovas.

Con la finalidad de profundizar en el campo de la Relatividad Numérica y de reconocer el estado del arte de ésta, se recomiendan las siguientes referencias: en [32] se trata el tema de la hidrodinámica relativista en Relatividad General, en [33] se trata la construcción de datos iniciales en Relatividad General, en [34] se desarrolla la hidrodinámica en Relatividad Especial, en [35] se revisa la Cosmología Numérica. Recientemente ha aparecido la referencia [36], que contiene una descripción completa de las herramientas usadas en la Relatividad Numérica.

## ***Agradecimientos***

Este trabajo recibe apoyo parcial de los proyectos CIC-UMSNH-4.9 de la Universidad Michoacana y S08-02-28 de COECyT Michoacán.

## ***Referencias***

- [1] M. CAMPANELLI, C.O. LOUSTO, P. MARRONETTI, Y. ZLOCHOWER, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111101 (2006).
- [2] JOHN G. BAKER, JOAN CENTRELLA, DAE-IL CHOI, MICHAEL KOPPITZ, JAMES VAN METER, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111102 (2006).
- [3] J.A. GONZÁLEZ, ET AL. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 091101 (2007).
- [4] M. ALCUBIERRE, R. BECERRIL, F.S. GUZMÁN, T. MATOS, D. NÚÑEZ, L.A. UREÑA-LÓPEZ, *Class. Quantum Grav.* **20**, (2003) 2883-2903.

- [5] M.W. CHOPTUIK, L. LEHNER, I. OLABARRIETA, R. PETRYK, F. PRETORIUS, H. VILLEGAS, *Phys. Rev. D* **68**, 044001 (2003).
- [6] OLIVIER SARBACH, LUIS LEHNER, *Phys. Rev. D* **71**, 026002 (2005).
- [7] F.S. GUZMÁN, L. LEHNER, O. SARBACH, *Phys. Rev. D* **76**, 066003 (2007).
- [8] J. THORNBURG, E-print: [gr-qc/9906022](http://arXiv.org/abs/gr-qc/9906022)
- [9] C. BONA, C. PALENZUELA-LUQUE, *Elements of Numerical Relativity*, Lect. Notes Phys. **673**, Springer, Berlin Heidelberg, 2005.
- [10] B. GUSTAFSSON, H-O. KREISS, J. OLIGER, *Time Dependent Problems and Difference Methods*. Wiley-Interscience, 1996.
- [11] R.J. LEVEQUE, in *Numerical methods for conservation laws*. Birkhauser, Basel, 1992.
- [12] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. WATTERLING, B.P. FLANNERY, *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, 1992.
- [13] M. ALCUBIERRE, R. BECERRIL, F.S. GUZMÁN, T. MATOS, D. NÚÑEZ, L.A. UREÑA-LÓPEZ, *Class. Quantum Grav.* **20**, 2883 (2003)
- [14] M. ALCUBIERRE, F.S. GUZMÁN, T. MATOS, D. NÚÑEZ, L.A. UREÑA-LÓPEZ, P. WIEDERHOLD, *Class. Quantum Grav.* **19**, 5017 (2002).
- [15] GREGORY B. COOK, *Living Reviews in Relativity*. 2005-5.  
<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume3/2000-5cook>
- [16] M. ALCUBIERRE, J.A. GONZÁLEZ, M. SALGADO, *Phys. Rev. D* **70**, 064016 (2004).
- [17] M.W. CHOPTUIK, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9-12 (1993).
- [18] E. SEIDEL, W-M. SUEN, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1659 (1991).
- [19] R. RUFFINI, S. BONAZOLLA, *Phys. Rev.* **187**, 1767 (1969).
- [20] E. SEIDEL, W-M. SUEN, *Phys. Rev. D* **42**, 384 (1990).
- [21] J. BALAKRISHNA, E. SEIDEL, W-M. SUEN, *Phys. Rev. D* **58**, 104004 (1998).
- [22] M. GLEISER, *Phys. Rev. D* **38**, 2376 (1988).
- [23] S.H. HAWLEY, M.W. CHOPTUIK, *Phys. Rev. D* **62**, 104024 (2000).
- [24] F.S. GUZMÁN, *Phys. Rev. D* **70**, 044033 (2004).
- [25] F.E. SCHUNCK, D.F. TORRES, *Int. J. Mod. Phys. D* **9**, (2000) 601.
- [26] M. COLPI, S.L. SHAPIRO, I. WASSERMAN, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2485 (1986).

- [27] F.S. GUZMÁN, L.A. UREÑA-LÓPEZ, *ApJ* **645**, 814 (2006). ArXiv: astro-ph/0603613.
- [28] D.F. TORRES, S. CAPOZZIELLO, G. LAMBIASE, *Phys. Rev. D* **62**, 104012 (2000).
- [29] D.F. TORRES, *Nucl. Phys. B* **26**, 377 (2002).
- [30] Y-F. TUAN, R. NARAYAN, M.J. REES, *ApJ* **606**, 1112 (2004).
- [31] J. BALAKRISHNA, R. BONDARESCU, G. DAUES, F.S. GUZMÁN, E. SEIDEL, *Class. Quantum Grav.* **23**, 2631-2652 (2006).
- [32] JOSÉ A. FONT, “Numerical Hydrodynamics in General Relativity”, *Living Rev. Relativity* 6, (2003). <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-4>
- [33] GREGORY B. COOK, “Initial Data for Numerical Relativity”, *Living Rev. Relativity* 3, (2000). <http://www.livingreviews.org/lrr-2000-5>
- [34] JOSÉ MARÍA MARTÍ, EWALD MÜLLER, “Numerical Hydrodynamics in Special Relativity”, *Living Rev. Relativity* 6, (2003). <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-7>
- [35] PETER ANNINOS, “Computational Cosmology: from the Early Universe to the Large Scale Structure”, *Living Rev. Relativity* 1, (1998). <http://www.livingreviews.org/lrr-1998-2>
- [36] M. ALCUBIERRE, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.

F. S. GUZMÁN  
Instituto de Física y Matemáticas,  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.  
Edificio C-3, Cd. Universitaria,  
C. P. 58040 Morelia, Michoacán, México.  
e-mail: [guzman@ifm.umich.mx](mailto:guzman@ifm.umich.mx),  
<http://www.ifm.umich.mx/guzman/>