Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 30, No. 1, 2012, pág. 15–24

Un paseo por los anillos de bucles

Carmen Rosa Giraldo Vergara
Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Matemática, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Dedicado a Rafael Isaacs, a quien recuerdo siempre con mucho cariño e infinita gratitud por su valioso aporte en mi formación académica.

Resumen. La teoría de anillos de bucles no es solamente una generalización de los anillos de grupos: es una teoría en sí misma, con origen y aún en movimiento. El concepto de anillo de bucles surge en 1944 en los trabajos de R.H. Bruck con la construcción de anillos no asociativos. En los últimos años esta teoría se desarrolló ampliamente. Como ejemplo de esto tenemos la descripción completa del bucle de los elementos invertibles del Álgebra de Zorn. En este trabajo se hace un recorrido a lo largo del desarrollo de esta teoría que ha intrigado a matemáticos de diversas áreas.

Palabras claves: cuasigrupos, bucles, Moufang, anillos alternantes, anillos de bucles.
MSC2010: 20N05, 20H05, 11F06.

A walk through the loop rings

Abstract. The loop ring theory is more that a generalization of group rings; in fact, it is a theory with its own spirit, with origin and still in development. The loop rings borns in 1944 with the works of R. H. Bruck about construction of non-associative rings. In recent years, this theory was developed largely, and as an example of this we know now the complete description of the loop of invertible elements of the Zorn algebra. In this paper we travel through the development of this theory that has intrigued mathematicians from different areas.

Keywords: quasigroup, loops, Moufang, alternative ring, loop rings.

* *E-mail*: carmita@mat.ufmg.br
Recibido: 22 de enero de 2012, Aceptado: 22 de mayo de 2012

1. Preliminares

Con el descubrimiento del álgebra de los cuaterniones por Hamilton, se ha estudiado detalladamente lo que hoy llamamos álgebras de dimensión finita. Los anillos de grupos aparecieron entonces principalmente como ejemplos, pero luego adquirieron vida propia desarrollándose así toda una teoría llamada *anillos de grupo.* A continuación definimos este concepto:

Definición 1.1. Sea R un anillo con unidad y G un grupo. El *anillo de grupo* RG de G sobre R es definido como el R-módulo libre sobre los elementos de G, con la multiplicación inducida por la multiplicación de G, es decir, RG consiste de todas las sumas formales finitas de la forma

$$\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g \quad \alpha_g \in R,$$

con la suma, multiplicación y multiplicación por escalar dadas por:

i. $\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g)g.$

ii. $\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \sum_{z\in G} \delta_z z, \quad \text{donde } \delta_z = \sum_{gh=z} \alpha_g \beta_h.$

iii. $\lambda\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g\in G} (\lambda\alpha_g)\, g, \quad \lambda \in R.$

Si R es campo, entonces RG es llamada el *álgebra de grupo* de G sobre R.

Si identificamos $g \in G$ con $1\cdot g \in RG$, podemos considerar G contenido en RG, y así los elementos de G forman una base de RG sobre R. Con esta identificación, $1 \in G$ es la unidad de RG.

Decimos que un anillo es alternante si tienen lugar las identidades:

- $(xx)y = x(xy)$,
- $y(xx) = (yx)x$.

Una propiedad importante de los anillos alternantes es que el subanillo generado por dos elementos de R es asociativo. Observemos que todo anillo asociativo es alternante; el recíproco no es verdadero.

En este trabajo estamos interesados en estructuras no asociativas; en este contexto consideramos la siguiente definición:

Definición 1.2. Un cuasigrupo es un par $(\mathcal{L}, \cdot)$ donde $\mathcal{L}$ es un conjunto no vacío y $(a, b) \longrightarrow a \cdot b$ es una operación binaria cerrada en $\mathcal{L}$, con la propiedad de que las ecuaciones $a \cdot x = b$ e $y \cdot a = b$ tienen únicas soluciones x e y para todos $a, b \in \mathcal{L}$.

Un bucle es un cuasigrupo con elemento identidad bilateral 1. Notemos que un grupo es un bucle asociativo.

Definición 1.3. Un subbucle de un bucle $(\mathcal{L}, \cdot)$ es un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$, el cual bajo la operación heredada de $\mathcal{L}$, es también un bucle. Los elementos identidad de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{L}$ son necesariamente iguales, ya que para $h \in \mathcal{H}$ la ecuación $hx = h$ tiene una única solución en $\mathcal{L}$.

Un ejemplo trivial de cuasigrupo es $(\mathbb{Z}, -)$; más adelante daremos ejemplos de bucles.

Observemos que la definición de cuasigrupo es equivalente a afirmar que las aplicaciones

$$R : a \mapsto ax, \qquad \text{translación a la derecha,}$$

$$L : a \mapsto xa, \qquad \text{translación a la izquierda,}$$

son permutaciones de $\mathcal{L}$. Así, el conjunto de las aplicaciones a la derecha y a la izquierda generan el grupo $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ llamado grupo multiplicativo de $\mathcal{L}$.

Con la definición de bucle en manos, podemos considerar una generalización del concepto de anillo de grupo de la siguiente forma:

Definición 1.4. Sea $\mathcal{L}$ un bucle y R un anillo conmutativo, asociativo con unidad. El anillo de bucle de $\mathcal{L}$ sobre R, el cual denotamos por $R\mathcal{L}$, es el R-módulo libre de base $\mathcal{L}$, y para $\alpha = \sum_{g\in\mathcal{L}} \alpha_g g$ y $\beta = \sum_{g\in\mathcal{L}} \beta_g g$ en $R\mathcal{L}$, $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ son definidas por

i. $\sum_{g\in\mathcal{L}} \alpha_g g + \sum_{g\in\mathcal{L}} \beta_g g = \sum_{g\in\mathcal{L}} (\alpha_g + \beta_g) g$;

ii. $\left(\sum_{g\in\mathcal{L}} \alpha_g g\right) \left(\sum_{h\in\mathcal{L}} \beta_h h\right) = \sum_{g,h\in\mathcal{L}} \alpha_g \beta_h gh = \sum_{z\in\mathcal{L}} \delta_z z$, donde $\delta_z = \sum_{gh=z} \alpha_g \beta_h$,

con la multiplicación dada por la extensión de la multiplicación en $\mathcal{L}$ a través de las leyes distributivas.

Como ejemplo de anillo de bucles tenemos el álgebra de los octoniones, que fue el primer ejemplo de anillo alternante no asociativo y el único no asociativo normado con división. Destacamos que esta álgebra, junto con los reales, los complejos y el álgebra de los cuaterniones, son las únicas álgebras alternantes normadas con división de dimensión finita sobre los reales $\mathbb{R}$.

2. Un poco de historia

Se puede decir que el concepto de anillos alternantes surgió con los trabajos de Ruth Moufang en 1930, cuando ella estableció una relación entre esta clase de anillos y planos proyectivos; veamos un poco de esta historia. A comienzos del siglo 20 las ideas de axiomatización de todas las teorías matemáticas estaban en auge. Uno de los grandes nombres en este sentido fue David Hilbert, quien estableció 3 axiomas básicos de incidencia para la Geometría Proyectiva:

1. Por cada dos puntos pasa exactamente una línea.
2. Dos líneas se encuentran en exactamente un punto.
3. Existen cuadriláteros (cuatro puntos tales que tres no están sobre una línea).

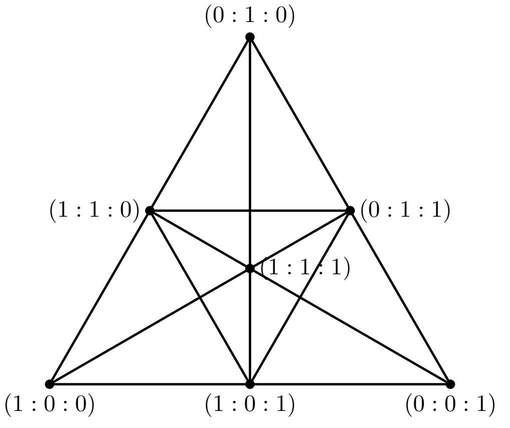

Figura 1. Representación del plano de Fano $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

Modelos clásicos para validar estos axiomas aparecieron entonces; el más conocido es el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, donde los puntos son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen, y las líneas son planos.

En general, $\mathbb{P}^2(R)$, con un anillo R con división, también es un modelo de plano proyectivo. Si $R = \mathbb{F}_2$, tenemos el plano de Fano $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, que es el menor modelo de plano proyectivo: tiene 7 puntos y 7 líneas (ver Figura 1).

Observemos que la representación de la geometría depende del sistema coordenado usado. Así tenemos una relación entre la Geometría (plano proyectivo) y Álgebra (sistema coordenado). Para un espacio proyectivo de dimensión d, tenemos un conjunto (puntos) junto con una familia de subconjuntos (líneas) que satisfacen los siguientes axiomas:

- P1. Por cada dos puntos distintos pasa exactamente una línea.
- P2. Si una línea corta dos lados de un triángulo, no en su punto de intersección, entonces ella corta su tercer lado.
- P3. Toda línea contiene por lo menos tres puntos.
- P4. El conjunto de todos los puntos es generado por $d + 1$ puntos y no menos.

Hilbert observó que el hecho de que los planos proyectivos sean más complejos que los espacios proyectivos de dimensión mayor, es debido a que el siguiente teorema no necesariamente se satisface.

Teorema 2.1 (Teorema de Desargues). *Sea F un campo (o un anillo con división). Dos triángulos en $\mathbb{P}^d(F)$ son perspectivas de un punto si y solamente si ellos son perspectivas de una recta.*

Se dice que una geometría proyectiva es desarguesiana si ella satisface el teorema anterior. En caso contrario es llamada no desarguesiana.

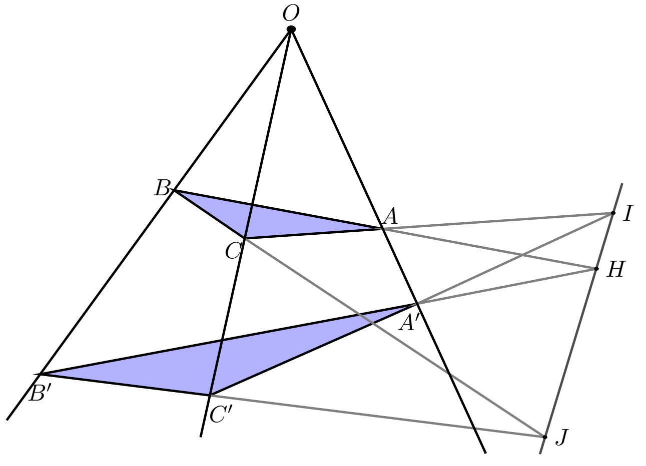

Figura 2.

Hilbert probó que cualquier geometría proyectiva desarguesiana es un espacio proyectivo $\mathbb{P}^d(F)$, donde F es un campo o un anillo con división. En particular $\mathbb{P}^2(\mathbb{H})$, donde $\mathbb{H}$ es el anillo de los cuaterniones es desarguesiana.

La idea entonces era encontrar ejemplos de geometría proyectiva no desargueriana. Aquí aparece como ejemplo $\mathbb{P}^2(\mathcal{O})$, donde $\mathcal{O}$ es el álgebra de los octoniones, que es un álgebra de dimensión 8 sobre $\mathbb{R}$, cuyos generadores cumplen con la siguiente tabla de multiplicación:

$\cdot$	1	i	j	k	e	f	g	h
1	1	i	j	k	e	f	g	h
i	i	-1	k	$-j$	f	$-e$	h	$-g$
j	j	$-k$	-1	i	$-g$	h	e	$-f$
k	k	j	$-i$	-1	h	g	$-f$	$-e$
e	e	$-f$	g	$-h$	$-i$	-1	k	j
g	g	$-h$	$-e$	f	j	$-k$	-1	i
h	h	g	f	e	$-k$	$-j$	$-i$	-1

Ruth Moufang mostró en [12] otros ejemplos a partir de $\mathbb{P}^2(A)$, donde $(A, +, \cdot)$ es un anillo no necesariamente asociativo. Ella estaba estudiando planos proyectivos no desarguesianos que satisfacen la propiedad: *Para toda recta L en el plano Π, el grupo de automorfismos que fija todos los puntos de L actúa transitivamente sobre $\Pi \setminus L$.* Tales planos son conocidos como *Planos de Moufang*.

Moufang probó que todo Plano de Moufang es de la forma $\mathbb{P}^2(A)$, donde $(A, +, \cdot)$ es un anillo que cumple:

- $(xx)y = x(xy)$,
- $y(xx) = (yx)x$,

estableciendo así una conexión entre anillos alternantes y planos proyectivos de Moufang. De hecho, para cada plano de Moufang existe una única álgebra alternante, y viceversa. Así, para estudiar tales planos basta estudiar su sistema coordenado, es decir, el álgebra alternante asociada.

La atención de Moufang estaba concentrada en la estructura multiplicativa de un anillo con división, ya que de la misma forma que los elementos invertibles de un anillo con división forman un grupo bajo la multiplicación, los elementos "invertibles" de un anillo alternante con división forman un bucle.

La idea de dejar a un lado la exigencia de la asociatividad y de considerar anillos de bucles fue de R.H. Bruck, quien mostró en [1] que bajo ciertas condiciones el Teorema de Maschke se satisface en un contexto no asociativo. El Teorema de Maschke es un resultado fundamental de anillos de grupos, el cual enunciamos a continuación.

Teorema 2.2 (Teorema de Maschke). *Sea R un anillo con unidad y G un grupo. Entonces RG es semisimple, si y solamente si, se cumplen las siguientes condiciones:*

i. *G es finito,*

ii. *$|G|$ es invertible en R,*

iii. *R es semisimple.*

Observación 2.3. La prueba de este teorema se puede ver en [13].

Para anillos de bucles, Bruck probó el siguiente resultado:

Teorema 2.4 ([1]). *Si $\mathcal{L}$ es un bucle finito y F es un campo de característica 0 o de característica positiva relativamente primo al orden del grupo multiplicativo de $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L}$ es suma directa de álgebras simples.*

Podemos afirmar que en la teoría de anillos de bucles siempre se está buscando una cierta asociatividad; se habla entonces de anillos no asociativos que son potencia asociativa, es decir, anillos no asociativos donde cada elemento genera un subanillo asociativo. Esto se puede ver en el trabajo de Paige en 1955, cuando probó que que si $R\mathcal{L}$ es un anillo de bucles conmutativo sobre un campo de característica diferente de 2 que satisface la identidad $x^2x^2 = x^3x$, entonces $\mathcal{L}$ es un grupo. Más exactamente:

Teorema 2.5 (Paige; 1955). *Sea L un bucle finito y R un anillo conmutativo y asociativo de característica cero o positiva relativamente primo a 30. Entonces el anillo de bucles $R\mathcal{L}$ es conmutativo y una potencia asociativa si y solamente si $\mathcal{L}$ es un grupo.*

La prueba de este teorema se puede ver en [8].

En general, no es cierto que anillos de bucles sin ninguna propiedad importante sean anillos de grupo. Goodaire mostró en [7] que existen álgebras de bucle alternantes que no son álgebras de grupo. Él estudió las propiedades que deberían tener los bucles para que sus anillos de bucles cumplan las propiedades alternantes: *Supóngase que R es un anillo conmutativo, asociativo con unidad y de característica diferente de dos. Entonces $R\mathcal{L}$ es alternante si y solamente si:*

i) Si $x, y, z \in \mathcal{L}$ cumplen la asociatividad en algún orden, entonces la cumplen en cualquier orden.

ii) Si g, h y k son elementos en $\mathcal{L}$ que no cumplen la asociatividad, entonces $(gh)k = g(kh) = h(gk)$.

3. Lazo y anillos de bucles

Dada la gran variedad de bucles, generalmente se estudian bucles que satisfacen alguna forma débil de asociatividad. En este contexto se dice que un bucle es *de Moufang* si satisface alguna de las siguientes identidades equivalentes:

1. $((xy)x)z = x(y(xz))$ identidad de Moufang a la izquierda.
2. $((xy)z)y = x(y(zy))$ identidad de Moufang a la derecha.
3. $(xy)(zx) = (x(yz))x$ identidad de Moufang media.

Un ejemplo canónico de bucle de Moufang son los elementos invertibles del álgebra de los octoniones, conocido como el bucle de Cayley, formado por el conjunto $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \pm e, \pm f, \pm g, \pm h\}$. De hecho, si consideramos la tabla de multiplicación de los generadores del álgebra de los octoniones dada anteriormente, podemos ver que este conjunto con la multiplicación dada forma un bucle, y como el álgebra de los octoniones es alternante, dado que sus elementos satisfacen las identidades de Moufang, entonces este bucle es de Moufang.

Un ejemplo de anillo alternante es el álgebra de Zorn definida a continuación.

Sea R un anillo conmutativo y asociativo con unidad; denotamos por R^3 el espacio vectorial de las triplas ordenadas sobre R. El álgebra de Zorn sobre R, denotada por $\mathfrak{Z}(R)$, consiste en el conjunto de matrices 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in R, \quad x, y \in R^3,$$

dotado de las operaciones suma y multiplicación, donde la suma de matrices 2×2 es componente a componente y la multiplicación se da mediante la igualdad

$$\begin{bmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + x_1 \cdot y_2 & a_1x_2 + b_2x_1 - y_1 \times y_2 \\ a_2y_1 + b_1y_2 + x_1 \times x_2 & b_1b_2 + y_1 \cdot x_2 \end{bmatrix},$$

donde $\cdot$ y $\times$ denotan el producto escalar y el producto vectorial en R^3.

Si R es un campo, el álgebra de Zorn es precisamente la representación matricial del álgebra de Cayley-Dickson asociada a R.

La función determinante $\det : \mathfrak{Z}(R) \to R$ definida por $\det \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} = ab - x \cdot y$ es multiplicativa. Así, un elemento $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$, $a, b \in R$, $x, y \in R^3$ de $\mathfrak{Z}(R)$ es invertible si y solamente si, $\det(A) \in R^*$, y por tanto $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$.

El álgebra de Zorn es alternante, luego el conjunto de elementos invertibles forma un bucle de Moufang. Con estos bucles fue desarrollada en [4] una teoría equivalente a la teoría de grupos de congruencias.

A este bucle lo llamamos general lineal, y lo denotamos por $\mathrm{GLL}(2,R)$, es decir,

$$\mathrm{GLL}(2,R) = \{A \in \mathfrak{Z}(R) |\ \det(A) \in R^*\}.$$

Haciendo analogía con el grupo general lineal $GL(2,R)$, definimos el bucle especial lineal denotado por Γ ó $\mathrm{SLL}(2,R)$ como

$$\Gamma = \mathrm{SLL}(2,R) = \{A \in \mathrm{GLL}(2,R) |\ \det A = 1\}.$$

Se define el subbucle de congruencia principal de Γ de nivel n, el cual denotamos por $\Gamma(n)$, como el conjunto de todas las matrices A de Γ tales que $A \equiv I \pmod{n}$, donde la congruencia es componente a componente. Se dice que Γ tiene la propiedad débil de Lagrange relativa a $\mathcal{L}$, si existe un subbucle $\mathcal{H}$ de índice finito en $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ satisfacen una de las siguientes condiciones equivalentes:

- $\mathcal{H}x \cap \mathcal{H}y \neq \varnothing$, $x, y \in \mathcal{L}$ si y solamente si $\mathcal{H}x = \mathcal{H}y$,
- $\mathcal{H}(hx) = \mathcal{H}x$ para todo $x \in \mathcal{L}$ y $h \in \mathcal{H}$.

En [5] se mostró que si R es un dominio de Dedekind de números algebraicos que contiene una unidad de orden infinita, todo subbucle de índice finito $\mathcal{L}$, tal que Γ tiene la propiedad débil de Lagrange relativa a $\mathcal{L}$, contiene un subbucle principal de congruencia. Una pregunta natural que surge de este resultado es si todo subbucle de índice finito contiene un subbucle normal de índice finito. Si la respuesta a esta pregunta es verdadera, tendremos entonces que todo subbucle de índice finito es un subbucle de congruencia. Para $R = \mathbb{Z}$ fue probado que existen subbucles de índice finito que no son de congruencia. Por otro lado, en [2] y [9] fue probado que todo bucle de Moufang finito tiene la propiedad de Lagrange, es decir, que si $\mathcal{H}$ es un subbucle de un bucle $\mathcal{L}$, entonces el orden de $\mathcal{H}$ divide el orden de $\mathcal{L}$. Así, en el resultado mostrado en [5] la condición impuesta sobre Γ de tener la propiedad débil de Lagrange es trivial si $\mathcal{L}$ contiene un subbucle normal de Γ de índice finito.

$\mathrm{SLL}(2,R)$ es más que un simple ejemplo de bucle de Moufang. En [11] Liebeck mostró que todo bucle de Moufang finito y simple es de la forma $\dfrac{\mathrm{SLL}(2,F)}{< \pm I >}$, donde F es un campo finito.

$\Gamma(n)$ es un bucle finitamente generado y es un ejemplo de bucles RA, es decir, bucles cuyo anillo de bucle sobre un anillo R conmutativo, asociativo con unitario y de característica diferente de 2, es alternante pero no asociativo.

Una exposición más detallada sobre subbucles de congruencias puede ser revisada en [4], y de la teoría de bucles de Moufang y anillos alternantes en [8] y [14].

Observemos que una vez que todo anillo alternante cumple las identidades de Moufang y $\mathcal{L} \subset R\mathcal{L}$, entonces todo bucle RA es un bucle de Moufang. En 1995 Jespers, Leal y Milies clasificaron en [10] los bucles RA indescomponibles finitos, mostrando así que existen 7 familias distintas de bucles de este tipo, y Garabini mostró en [3] que existen 16 familias no isomorfas de bucles RA indescomponibles finitamente generados.

Otro tópico tratado actualmente es el estudio de la estructura del conjunto formado por las unidades de anillos de bucles sobre los enteros $\mathbb{Z}$. Milies y Goodaire mostraron resultados al respecto de este bucle de unidades en [6]. En este mismo artículo ellos mostraron que el problema del isomorfismo tiene respuesta positiva para anillos de bucles RA de torsión (un bucle es de torsión si todo elemento tiene orden finito) sobre $\mathbb{Z}$; ellos probaron que si L_1 y L_2 son bucles RA con L_1 de torsión y $\mathbb{Z}L_1 \simeq \mathbb{Z}L_2$, entonces $L_1 \simeq L_2$.

Podemos afirmar que los resultados planteados en este trabajo surgieron de una pregunta natural: ¿Qué resultados de la teoría de grupos y de la teoría de anillos de grupos se pueden "extender" cuando consideramos estructuras no necesariamente asociativas? Vimos por ejemplo el Teorema de Maschke en un contexto no asociativo; tenemos también que el teorema de Higman: *si G es un grupo de torsión, entonces las unidades de $\mathbb{Z}G$ son triviales si y solamente si G es un grupo abeliano de exponente* $1, 2, 3, 4,$ *ó* 6, *o un 2-grupo hamiltoniano*, puede ser generalizado para bucles de torsión L. Podemos entonces seguir preguntándonos qué otros resultados (Teorema de Cayley, Teorema de Sylow, etc.) son válidos en la teoría de bucles.

Es importante resaltar que la teoría de anillos de bucles no es solo una generalización de los anillos de grupos, sino una teoría en sí misma, con origen y en constante movimiento, que en los últimos 30 años ha intrigado a matemáticos en diversas áreas.

Referencias

[1] Bruck R.H., "Some results in the theory of linear nonassociative algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.* 56 (1944), 141–199.

[2] Gagola S.M. and Hall J.I., "Lagrange's theorem for Moufang loops", *Acta Sci. Math.* 71 (2005), 45–64.

[3] Garabini C.M., *Classificação dos RA loops*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, ICEx, 2006.

[4] Giraldo C.R., *Grupos de congruências e matrizes de Zorn*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, 2002.

[5] Giraldo C.R. and Brochero F.E., "Zorn's matrices and finite index subloops", *Comm. Algebra* 33 (2005), no. 10, 3691–3698.

[6] Goodaire E.G. and Milies C.P., "Normal subloops in the integral loop ring of an RA loop", *Canad. Math. Bull.* 44 (2001), no. 1, 27–37.

[7] Goodaire E.G., "Alternative loop rings", *Publ. Math. Debrecen* 30 (1983), no. 1-2, 31–38.

[8] Goodaire E.G., Jesper E. and Milies C.P., *Alternative loop rings.* North-Holland Math. Studies 184, Amsterdam, 1996.

[9] Grishkov A.N. and Zavarnitsine A.V., "Lagrange's theorem for Moufang loops", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 139 (2005), no. 1, 41–57.

[10] Jespers E., Leal G. and Milies C.P., "Classifying indecomposable R.A. loops", *J. Algebra* 176 (1995), no. 2, 569–584.

[11] Liebeck M.W., "The classification of finite simple Moufang loops", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 102 (1987), no. 1, 33–37.

[12] Moufang R., "Zur Struktur von Alternative Korpern", *Math. Ann.* 110 (1935), no. 1, 416–430.

[13] Pierce R., *Associative Algebras*, Springer–Verlag, New York, 1980.

[14] Zhevlakov K.A, Slin'ko A.M., Shestakov I.P. and Shirshov A.I., *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York-London, 1982.