Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 30, No. 1, 2012, pág. 25–41

Dinámica colectiva

Héctor Méndez Lango*
UNAM, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, D.F., México.

Resumen. Dado un espacio métrico compacto X y una función continua $f : X \to X$, consideramos el hiperespacio de todos los subconjuntos de X que son cerrados y no vacíos, 2^X, con la métrica de Hausdorff, y la función que induce f en él, $\hat{f} : 2^X \to 2^X$. En la última década ha habido una importante cantidad de artículos estudiando las relaciones entre las propiedades dinámicas de f y las de $\hat{f}$. En este trabajo presentamos un panorama con varios de los resultados más importantes. Ofrecemos, además, una breve colección de varias de las conjeturas y preguntas abiertas que se han planteado en esta área.

Palabras claves: Hiperespacio, dinámica discreta, dinámica colectiva, entropía.
MSC2010: 54B20, 54C05, 54C70.

Collective dynamics

Abstract. For a metric compact set X and a continuous map $f : X \to X$ we consider the hyperspace 2^X of all closed and nonempty subsets of X with the Hausdorff metric, and the induced map $\hat{f} : 2^X \to 2^X$. In the past few years the study of the connection between the dynamical properties of f and those of $\hat{f}$ has became an important and fruitful topic. In this paper we survey some significant results in this area. Also we collect some open questions and conjectures.

Keywords: Hyperspace, discrete dynamics, collective dynamics, entropy.

1. Primeras palabras

Sea X un espacio métrico compacto. Sea $f : X \to X$ una función continua en X. Dado x en X, la *órbita de x bajo f* es la sucesión

$$o(x, f) = \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\},$$

donde f^n es la composición de f consigo misma n veces.

* *E-mail*: hml@ciencias.unam.mx
Recibido: 2 de abril de 2012, Aceptado: 31 de mayo de 2012.

Para nosotros una órbita representa el movimiento de un objeto: En el tiempo $t = 0$ éste se encuentra en x, en $t = 1$ se mueve hacia $f(x)$, en $t = 2$ está en $f^2(x)$, y así sucesivamente. Nuestro interés es el estudio del comportamiento de todas las posibles órbitas que se pueden generar a partir de X y f. Bajo esta óptica se dice que la pareja (X, f) es un sistema dinámico discreto.

De aquí en adelante X representa un espacio métrico compacto no vacío sin puntos aislados, y $f : X \to X$ una función continua en X. Denotamos con la letra $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos.

El sistema dinámico (X, f) induce nuevos sistemas ahora definidos en los hiperespacios de X. Un *hiperespacio* de X es un subconjunto del conjunto potencia de X. Los hiperespacios que nos interesan son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\},$$

dado $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\right\},$$

y

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X),$$

que es la colección de todos los subconjuntos finitos de X.

Denotamos la métrica en X con la letra d. Dados $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, y $\varepsilon > 0$, la *nube de radio ε alrededor de A* es el conjunto,

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Dados A y B dos elementos de 2^X, el valor

$$H(A, B) = \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N(A, \varepsilon)\}$$

define una distancia en 2^X conocida como la *métrica de Hausdorff*. El lector interesado puede encontrar en el libro escrito por los profesores A. Illanes y S.B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, [16], un detallado estudio de las propiedades de la métrica de Hausdorff y de los hiperespacios mencionados.

Tenemos así que 2^X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados. Además $F(X)$ forma un subconjunto denso de 2^X. Dado que todos los hiperespacios definidos antes son subconjuntos del hiperespacio 2^X, entonces todos ellos son espacios métricos considerando en cada uno de ellos la restricción correspondiente de la métrica H.

Dada una colección finita de subconjuntos de X, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, consideramos el siguiente subconjunto de 2^X:

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle = \left\{B \in 2^X : B \subset \cup_{i=1}^{k} A_i \text{ y para cada } i,\ 1 \leq i \leq k,\ B \cap A_i \neq \emptyset\right\}.$$

La colección de todos los posibles subconjuntos de 2^X de la forma

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle,$$

donde cada A_i es un subconjunto abierto de X, es una base que induce una topología en 2^X. Esta topología es conocida como la *topología de Vietoris*. Ella coincide con la topología generada por la métrica de Hausdorff (ver [16]).

Los hiperespacios $C(X)$, $F_n(X)$ y $F(X)$ son espacios topológicos considerando en cada uno de ellos la topología que induce la topología de Vietoris. De aquí en adelante, al referirnos a algún hiperespacio de X sólo consideramos una de las siguientes posibilidades: 2^X, $C(X)$, $F_n(X)$, $F(X)$.

La función $f : X \to X$ induce una función en el hiperespacio 2^X, $\hat{f} : 2^X \to 2^X$, de la siguiente forma: Dado A en 2^X, entonces

$$\hat{f}(A) = f(A) = \{y \in X : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\} .$$

Como f es continua y cerrada en X, la función $\hat{f}$ está bien definida. Es conocido, además, que $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es una función continua [16]. Llamamos a $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ la *función inducida por* f.

Observemos que si

$$\Lambda \in \{C(X), F_n(X), F(X)\} ,$$

entonces la restricción de $\hat{f}$ a Λ, $\hat{f}|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$, está bien definida, ya que para cada $A \in \Lambda$ se tiene que $\hat{f}|_\Lambda(A)$ también es un elemento de Λ. Utilizamos el símbolo $\hat{f}$ cuando consideramos la función inducida en 2^X, y el símbolo $\hat{f}|_\Lambda$ cuando consideramos $\hat{f}$ restringida al hiperespacio Λ.

La discusión sobre las posibles órbitas generadas por $f : X \to X$ es, de cierto modo, un estudio de *dinámicas individuales* (para cada x en X sólo nos interesan las propiedades de la sucesión $o(x, f)$). Tomar un conjunto compacto, A, seguir su órbita bajo la función inducida $\hat{f}$ y preguntarse sobre su comportamiento es lo que algunos autores llaman estudiar la *dinámica colectiva*. El interés principal al considerar estas dos dinámicas es encontrar las relaciones entre ambas. Cuándo la presencia de una propiedad dinámica en f implica la presencia de la misma (u otra) propiedad dinámica en $\hat{f}$, y viceversa.

El estudio de las relaciones entre ambas dinámicas no tiene mucho de haberse iniciado. Se acepta que el primer trabajo que abordó este tema de manera explícita fue el artículo "Topological Dynamics of Transformations Induced on the Space of Probability Measures", escrito por W. Bauer y K. Sigmund en el año de 1975 (ver [7]). A este evento siguió un *silencio* de un poco más de 27 años. Es sólo hasta los primeros años del nuevo siglo cuando el tema es retomado. Del año 2003 al presente se han publicado un poco más de 30 artículos en distintas revistas. No es nuestra intención hacer una lista completa de todos ellos; sin embargo, el lector interesado puede consultar las referencias contenidas en los artículos [1], [10] y [17] .

En las siguientes secciones presentamos varias de las propiedades dinámicas más importantes. Hacemos también un pequeño resumen de algunos de los resultados que actualmente se conocen. A lo largo de las secciones presentamos, además, una pequeña lista de preguntas abiertas y de conjeturas que han planteado diversos autores. Cabe aclarar que la mayoría de los resultados conocidos se refieren principalmente a la dinámica de la función inducida en el hiperespacio 2^X. Existen algunos resultados sobre la dinámica en $C(X)$. Y muy poco, casi nada, se ha publicado sobre la dinámica de la función inducida en los hiperespacios F_n para $n \geq 2$.

2. Transitividad topológica

De acuerdo con la definición dada por R. Devaney (ver [9]), un sistema dinámico discreto (X, f) es caótico si f es transitiva, el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X y f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Otros autores consideran como criterio principal para decidir si el sistema (X, f) es caótico que la entropía de f sea positiva. Este es el caso de la definición de caos dada por L.S. Block y W.A. Coppel (ver [8]). Estas cuatro propiedades dinámicas están entre las más importantes. En este trabajo las hemos tomado como guía en el recuento que aquí iniciamos.

Decimos que $f : X \to X$ es

- *transitiva* (o, *topológicamente transitiva*) si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos de X, U y V, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;
- *débilmente mezclante*, si para cada colección de cuatro conjuntos abiertos no vacíos de X, U_1, U_2, V_1 y V_2, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Observemos que si f es débilmente mezclante, entonces f es transitiva. La implicación recíproca no es válida.

La transitividad de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ implica la transitividad de $f : X \to X$ (ver [25] y [23]). De hecho, la transitividad de $\hat{f}|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$, donde Λ es $C(X)$, $F_n(X)$, o $F(X)$, implica la transitividad de $f : X \to X$.

Por otro lado, una rotación de ángulo irracional (respecto a 2π) definida en la circunferencia unitaria S^1, $f : S^1 \to S^1$, muestra que el hecho de que f sea transitiva no implica que la función inducida $\hat{f}$ sea transitiva, siendo Λ cualquiera de los hiperespacios 2^{S^1}, $C(S^1)$, $F_n(S^1)$, $n \geq 2$, y $F(S^1)$.

Así, se tiene que para obtener la transitividad de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ se necesita algo más que la transitividad de $f : X \to X$. ¿Qué es lo que se necesita?

En 2005 J. Banks resolvió el problema (ver [6]). Él demostró el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

- $f : X \to X$ *es débilmente mezclante.*
- $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ *es transitiva.*
- $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ *es débilmente mezclante.*

Como se puede apreciar, la presencia en un sistema dinámico de la condición de *mezclado débil* es un hecho realmente importante. El propio J. Banks en [5] presenta un estudio muy amplio e interesante sobre varias de las implicaciones que se obtienen a partir de que f sea débilmente mezclante.

Otro artículo interesante en este mismo tema es el de G. Liao, L. Wang y Y. Zhang, [19]. Ahí se encuentra una demostración detallada del siguiente resultado. Sea $m \geq 2$. Consideremos el producto cartesiano de m copias de X, $\prod_{i=1}^m X$, y la función

$$f^{\times m} : \prod_{i=1}^{m} X \to \prod_{i=1}^{m} X,$$

dada por $f^{\times m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m))$.

Proposición 2.2. *Si $f : X \to X$ es débilmente mezclante, entonces para cada $m \geq 2$ se tiene que $f^{\times m}$ es transitiva.*

Presentamos a continuación dos ejemplos de sistemas dinámicos. Ellos se encuentran entre los más estudiados y vale la pena tenerlos a la mano. Ambos son débilmente mezclantes y, por lo tanto, la respectiva función inducida en el hiperespacio 2^X es transitiva.

Ejemplo 2.3. Sea I el intervalo unitario en la recta real, $I = [0, 1]$, y sea $T : I \to I$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La función T es conocida como *la Tienda*. Las demostraciones de varias de sus propiedades se pueden consultar en [4]. En particular, se tiene que para todo intervalo (a, b), $a < b$, contenido en I, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = I$. De aquí se sigue que T es débilmente mezclante.

Ejemplo 2.4. Sea

$$\Sigma = \left\{\hat{t} = (t_1, t_2, t_3, \ldots) : \text{ para todo } i, \ t_i \in \{0, 1\}\right\}.$$

La siguiente expresión define una métrica en Σ:

$$d\left(\hat{t}, \hat{s}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i}.$$

Sea $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ la función dada por

$$\sigma\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = \left(x_2, x_3, x_4, \ldots\right).$$

Esta función es continua en Σ.

De manera similar a lo que sucede para la función T, se tiene que para todo subconjunto abierto de Σ, digamos A, $A \neq \emptyset$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^N(A) = \Sigma$. Por tanto, σ es también débilmente mezclante. El espacio Σ es conocido como el *espacio en dos símbolos*, y la función $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ es conocida como el *corrimiento*.

No es difícil demostrar las equivalencias contenidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$f : X \to X$ es débilmente mezclante.*
- *Para cada $n \geq 2$, $\hat{f}|_{F_n(X)} : F_n(X) \to F_n(X)$ es transitiva.*
- *$\hat{f}|_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ es transitiva.*

La transitividad de la función inducida en el hiperespacio $C(X)$ ha resultado ser un tema más evasivo. Para describir la situación en la que nos encontramos empezamos con una pregunta.

Pregunta 2.6. ¿Cuáles condiciones debe cumplir la función $f : X \to X$ para que podamos concluir que la función inducida $\hat{f}$ restringida a $C(X)$ es transitiva?

Algunos resultados parciales relacionados con la pregunta anterior son conocidos. Antes de mencionarlos necesitamos recordar algunas definiciones. Decimos que un espacio métrico compacto no vacío X es un *continuo* si es, además, conexo. Un continuo X es

- un *arco*, si es homeomorfo al intervalo unitario de la recta real, $I = [0, 1]$;
- una *gráfica*, si X se puede expresar como la unión finita de arcos tales que cada par de ellos se interseca en un subconjunto de sus puntos extremos;
- una *dendrita*, si X es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples;
- *hereditariamente unicoherente*, si para todo par de subcontinuos de X, digamos A y B, se tiene que el conjunto $A \cap B$ es conexo;
- un *dendroide*, si X es arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

Un conjunto Y es un *subcontinuo* de X si $Y \subset X$ y Y es un continuo. El espacio $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X.

En 2005 J. Banks demuestra que para toda función definida en un arco X, se tiene que la función inducida en el hiperespacio $C(X)$ no es transitiva (ver [6]). En 2007 D. Kwietniak y P. Oprocha generalizan este resultado a gráficas (ver [17]).

Más adelante, en 2009, G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez demuestran que si X es una dendrita, entonces la función inducida $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(X)$ tampoco puede ser transitiva (ver [1]).

En 2005 J. Banks comenta en [6] que tal vez es difícil encontrar un ejemplo no trivial donde X sea conexo y $\hat{f}|_{C(X)}$ sea transitiva. El hecho es que tal ejemplo sí existe.

Ejemplo 2.7. El *Cubo de Hilbert* es el producto cartesiano infinito numerable donde todos los factores son el intervalo unitario:

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1] = \{\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots) : x_n \in [0, 1]\, , \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}\, .$$

La métrica en Q está dada por

$$d\left(\hat{t}, \hat{s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n}.$$

El Cubo de Hilbert es compacto, conexo y de dimensión infinita (ver [14]).

Sea $\sigma : Q \to Q$ la función dada por

$$\sigma\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = \left(x_2, x_3, x_4, \ldots\right).$$

Esta función es continua en Q.

En [1] los autores demuestran que la función inducida en el hiperespacio de todos los subcontinuos de Q,

$$\hat{\sigma}|_{C(Q)} : C(Q) \to C(Q),$$

es transitiva.

Las siguientes tres preguntas aparecen en [1].

Pregunta 2.8. ¿Existen un dendroide X y una función continua $f : X \to X$ tal que la función $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(X)$ es transitiva?

Pregunta 2.9. Sea $A = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unitario contenido en $\mathbb{R}^2$. ¿Existe una función continua, $f : A \to A$, tal que

$$\hat{f}|_{C(A)} : C(A) \to C(A)$$

resulte ser transitiva?

Pregunta 2.10. ¿Existen un continuo de dimensión finita X y una función continua $f : X \to X$ tal que la función inducida en el hiperespacio $C(X)$ sea transitiva?

La última de estas preguntas ha adquirido importancia debido a que los únicos ejemplos conocidos donde $\hat{f}|_{C(X)}$ es transitiva se dan cuando el espacio X tiene dimensión infinita.

La definición del concepto de dimensión y muchas de sus propiedades se pueden consultar en el libro *Dimension Theory: An Introduction with Exercises* escrito por el profesor S. B. Nadler Jr. (ver [22]).

Notemos que para un continuo X las propiedades dinámicas de las funciones $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ y $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(X)$ presentan diferencias significativas. Un elemento clave en estas diferencias tiene su origen en las propiedades topológicas de los espacios 2^X y $C(X)$. Por ejemplo, si X es el intervalo unitario I se sabe que el hiperespacio 2^I es homeomorfo al Cubo de Hilbert, Q (ver [24]). Por otro lado, $C(I)$ es homeomorfo a un disco contenido en $\mathbb{R}^2$. La demostración de esta segunda afirmación se puede encontrar en el artículo "Modelos de hiperespacios" escrito por A. Illanes (ver [15]).

3. Órbitas densas

A lo largo de esta sección supondremos que $f : X \to X$ es una función débilmente mezclante y, por tanto, que $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es una función transitiva.

En el libro *Dynamics in One Dimension*, escrito por L. S. Block y W. A. Coppel [8], los autores demuestran la siguiente equivalencia.

Proposición 3.1. *Sea Y un espacio métrico compacto no vacío sin puntos aislados. Entonces la función $g : Y \to Y$ es transitiva si y sólo si existe un punto y en Y cuya órbita bajo g, $o(y, g)$, forma un conjunto denso en Y.*

Como 2^X es un conjunto compacto sin puntos aislados, y $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es transitiva, entonces existe un conjunto compacto A, contenido en X, tal que su órbita bajo $\hat{f}$ es un conjunto denso en 2^X. Si bien la Proposición 3.1 asegura la existencia del conjunto A, ella no nos dice mucho sobre su topología. Sabemos que A es compacto, pero ¿puede ser conexo?; y, si no es conexo, ¿está obligado a ser totalmente disconexo? Por otro lado, ¿puede A ser infinito numerable? En esta parte hacemos algunos comentarios sobre estas preguntas.

Recordemos que para cada n, $\hat{f}^n(A) = f^n(A)$. Es decir, el elemento de la $o(A, \hat{f})$ correspondiente a n es la imagen bajo la función f^n del conjunto A. Como la órbita $o(A, \hat{f})$ es densa en el hiperespacio 2^X, entonces las distintas imágenes $f^n(A)$ deben *pasar cerca*, en la métrica de Hausdorff, de todo conjunto compacto contenido en X. Esto quiere decir que la colección de las iteraciones de f, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$, van deformando el conjunto A de tal manera que estas *versiones* de él *se parecen* a cada conjunto compacto contenido en X. ¿Qué tipo de conjunto es A para tener tal propiedad?

Sea A un conjunto compacto con órbita densa en 2^X bajo $\hat{f}$. Es inmediato que A no puede ser un conjunto finito, ya que debe *pasar* tan cerca de X como deseemos. Por otro lado, A debe *pasar* cerca de cualquier conjunto finito. Esto implica que A no es conexo. De hecho A debe tener una cantidad infinita de componentes.

En el año de 2009, en [1] los autores demuestran que para todo $n \geq 0$ el interior de $f^n(A)$ es el conjunto vacío. Demuestran también que todo elemento de A tiene órbita densa bajo f.

Poco después, en mayo de 2010, en su tesis para obtener el grado de maestra en ciencias (ver [12]), Paloma Hernández muestra de manera explícita un subconjunto compacto del espacio de dos símbolos, Σ, que tiene órbita densa bajo la función inducida por el corrimiento en el hiperespacio 2^Σ, $\hat{\sigma} : 2^\Sigma \to 2^\Sigma$.

Proposición 3.2. *Existe un conjunto compacto A, contenido en Σ, que es una sucesión convergente, es decir,*

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{a_0\}$$

con $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$, tal que la $o(A, \hat{\sigma})$ es densa en 2^Σ.

Obsérvese que el conjunto A en la Proposición 3.2 tiene cardinalidad infinita numerable.

Más adelante, en 2011, P. Hernández, J. King y H. Méndez demuestran el siguiente resultado más general (ver [13]).

Proposición 3.3. *Si la función inducida $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es transitiva, entonces existe un conjunto de Cantor C, contenido en X, tal que la $o(C, \hat{f})$ es densa en 2^X. Además, todo conjunto compacto de cardinalidad infinita contenido en C también tiene órbita densa en 2^X bajo la función $\hat{f}$.*

En ese mismo trabajo [13] los autores muestran una función $f : X \to X$, definida en el *Toro* de dimensión dos, y un elemento $A \in 2^X$ con órbita densa en 2^X, tal que A no es totalmente disconexo.

4. Puntos periódicos

Sea x un punto en X. Decimos que x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$; decimos que x es *un punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces

$$n_0 = \text{mín}\,\{n : f^n(x) = x\}$$

es el periodo de x.

No es difícil demostrar que si el conjunto de los puntos periódicos de f es denso en X, entonces el conjunto de los puntos periódicos de la función $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es denso en 2^X (ver Lema 1 de [6]). De hecho, esta afirmación es cierta si consideramos la función inducida $\hat{f}$ restringida a los hiperespacios $F_n(X)$ y $F(X)$.

Con el siguiente ejemplo mostramos que la densidad de $Per(f)$ en X no implica la densidad del conjunto de los puntos periódicos cuando restringimos $\hat{f}$ al hiperespacio $C(X)$.

Ejemplo 4.1. Sea $I = [0, 1]$ el intervalo unitario, y sea $T : I \to I$ la función Tienda. Se sabe que el conjunto $Per(T)$ es denso en I. Por otro lado, si A es un elemento de $C(I)$ y A tiene más de un punto, entonces A es un intervalo cerrado no degenerado, $A = [a, b]$, $a < b$. Se sigue de aquí que existe un número natural N tal que $T^N(A) = I$. Esto implica que el conjunto de puntos periódicos de la función $\hat{T}$ restringida a $C(I)$ está contenido en $F_1(I) \cup \{I\}$. Y, por lo tanto, no es denso en $C(I)$.

En 2006 (ver [11]), Z. Genrong, Z. Fanping y L. Xinhe demuestran que si X es una gráfica, entonces la densidad de los puntos periódicos de la función inducida $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ sí implica que el conjunto $Per(f)$ es denso en X.

En contraste con lo anterior, en los artículos [6] y [10] los autores muestran ejemplos donde la densidad de $Per(\hat{f})$ en 2^X no implica la densidad de $Per(f)$ en X. En ambos casos el espacio base, X, es un conjunto de Cantor.

Todo indica que la implicación

$$Per\big(\hat{f}\,\big) \text{ denso en } 2^X \;\Rightarrow\; Per(f) \text{ denso en } X$$

trae consigo una dosis de información sobre la topología del conjunto X. Para explicar algunos de los pasos que se han dado en el estudio de este tema necesitamos algunas definiciones.

Decimos que un continuo X es

- *descomponible*, si X contiene dos subcontinuos propios, A y B, tales que $X = A \cup B$;
- *indescomponible*, si X no es descomponible;
- *hereditariamente descomponible*, si todo subcontinuo de X con más de un punto es descomponible;
- *encadenable*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua de X sobre el intervalo unitario, $g : X \to I$, tal que para cada $t \in I$ se tiene que $\text{diám}(g^{-1}(t)) < \varepsilon$.

En 2009, en [21], el autor ofrece otro ejemplo donde la densidad de $Per(\hat{f})$ no implica la densidad de $Per(f)$. Lo interesante aquí es que el espacio base es conexo.

Proposición 4.2. *Existen un continuo X y una función continua $f : X \to X$ con las siguientes propiedades:*

- *X es encadenable e indescomponible;*
- *el conjunto de puntos periódicos de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es denso en el hiperespacio 2^X;*
- *el conjunto $Per(f)$ no es denso en X, de hecho este conjunto está formado por un solo punto;*
- *la función inducida $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es transitiva.*

En ese mismo trabajo se plantean las siguientes dos conjeturas:

Conjetura 4.3. Sea X una dendrita. Entonces para toda función $f : X \to X$ se tiene que la densidad del conjunto $Per(\hat{f})$ en 2^X sí implica la densidad de $Per(f)$ en X.

Conjetura 4.4. Sea X un continuo encadenable hereditariamente descomponible. Entonces para toda función $f : X \to X$ se tiene que la densidad del conjunto $Per(\hat{f})$ en 2^X sí implica la densidad de $Per(f)$ en X.

Tenemos, hasta aquí, que las condiciones:

- el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X,
- el conjunto de puntos periódicos de $\hat{f}$ es denso en 2^X,

no son equivalentes. Si bien la primera sí implica la segunda, resulta que la segunda no implica la primera. Sin embargo la segunda sí nos da información importante sobre la dinámica de $f : X \to X$, como veremos a continuación.

Sea x en X. Decimos que x es un punto:

- *recurrente bajo f*, si para todo conjunto abierto U que contiene a x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$;
- *regularmente recurrente bajo f*, si para todo conjunto abierto U que contiene a x, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{nk}(x) \in U$;

El conjunto de todos los puntos recurrentes bajo f lo denotamos con $R(f)$, y el de todos los puntos regularmente recurrentes bajo f con $RR(f)$. Las demostraciones de las siguientes relaciones son inmediatas:

$$Per(f) \subset RR(f) \subset R(f).$$

En 2009 J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart y P. Oprocha demuestran el siguiente resultado (ver [10]).

Proposición 4.5. *Si $RR(f)$ es denso en X, entonces el conjunto de puntos periódicos de la función $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es denso en 2^X.*

Otro conjunto importante es el siguiente: Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$RR_\varepsilon(f) = \left\{x \in X : \exists k \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, d(x, f^{nk}(x)) < \varepsilon\right\}.$$

En 2009, en [21], el autor obtiene la siguiente equivalencia.

Proposición 4.6. *El conjunto $Per(\hat{f})$ es denso en 2^X si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $RR_\varepsilon(f)$ es denso en X.*

En ese mismo trabajo se plantea la siguiente conjetura.

Conjetura 4.7. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- el conjunto $RR(f)$ es denso en X;
- para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $RR_\varepsilon(f)$ es denso en X.

5. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Decimos que $f : X \to X$ es:

- *sensible* (o *sensible a las condiciones iniciales*), si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\delta > 0$, existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(x, y) < \delta \quad \text{y} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon;$$

- *fuertemente sensible*, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ existe $y \in X$ con

$$d(x, y) < \delta \quad \text{y} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon;$$

- *puntualmente sensible*, si para cada $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(x, y) < \delta \quad \text{y} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_x.$$

Los autores A. Nagar y P. Sharma dan en [25] un ejemplo donde se muestra que la sensibilidad de $f : X \to X$ no implica la sensibilidad de la función $\hat{f} : 2^X \to 2^X$. Por otro lado, en ese mismo trabajo y en [23] se demuestra que la sensibilidad de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ sí implica la sensibilidad de $f : X \to X$.

A. Nagar y P. Sharma demuestran en [25] que la condición de ser fuertemente sensible corre con mejor suerte.

Proposición 5.1. *$f : X \to X$ es fuertemente sensible si y sólo si $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es fuertemente sensible.*

Más adelante los autores plantean la siguiente conjetura.

Conjetura 5.2. Si $f : X \to X$ es sensible, entonces $\hat{f}|_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ es puntualmente sensible.

Decimos que $f : X \to X$ es *colectivamente sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda colección de k puntos distintos en X, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y para todo $\delta > 0$, existen k puntos distintos, $y_1, y_2, \ldots, y_k$, y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que las siguientes dos condiciones se cumplen:

- para todo i, $1 \leq i \leq k$, $d(x_i, y_i) < \delta$, y
- existe i_0, $1 \leq i_0 \leq k$, tal que para todo i, $1 \leq i \leq k$,
$$d(f^n(x_i), f^n(y_{i_0})) > \varepsilon,$$
o para todo i, $1 \leq i \leq k$,
$$d(f^n(x_{i_0}), f^n(y_i)) > \varepsilon.$$

En [27] los autores demuestran el siguiente resultado.

Proposición 5.3. *Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

- f *es colectivamente sensible.*
- $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ *es sensible.*
- $\hat{f}|_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ *es sensible.*

Decimos que $f : X \to X$ es *sensible en el sentido de* Li y Yorke si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\delta > 0$, existe $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$,

$$\liminf_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \delta.$$

En [25] los autores proponen la siguiente conjetura.

Conjetura 5.4. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- $f : X \to X$ es sensible en el sentido de Li y Yorke.
- $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es sensible en el sentido de Li y Yorke.
- $\hat{f}|_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ es sensible en el sentido de Li y Yorke.

6. Entropía topológica

La entropía es un intento de asignarle una medida, un número mayor o igual a cero, a la complejidad de una función definida en un espacio compacto X.

Recordamos a continuación la definición de entropía propuesta por R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew en 1965 (ver [2]). Estos autores utilizan de manera esencial el concepto de cubierta abierta de X. Existe una segunda definición que fue propuesta por E. I. Dinaburg y R. Bowen. En este segundo enfoque se utiliza fuertemente la métrica de X y el concepto de *conjunto generador*. Es un resultado conocido que en espacios métricos compactos ambas definiciones son equivalentes (ver [26]).

Sean α y β dos cubiertas abiertas de X. Definimos

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Obsérvese que $\alpha \vee \beta$ es también una cubierta abierta de X.

Sea α una cubierta abierta de X. Como X es compacto, entonces α tiene al menos una subcubierta finita. Si β es una subcubierta finita de α, $|\beta|$ denota la cantidad de elementos de β. Al mínimo de estos números le llamamos $N(\alpha)$, es decir,

$$N(\alpha) = \text{mín}\{|\beta| : \beta \text{ es subcubierta finita de } \alpha\}.$$

Como $f : X \to X$ es continua, entonces

$$f^{-1}(\alpha) = \left\{f^{-1}(A) : A \in \alpha\right\}$$

es también una cubierta abierta de X.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la cubierta

$$\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

A partir de la pareja: $f : X \to X$, y α, obtenemos una sucesión de cubiertas abiertas,

$$\alpha,\ \alpha \vee f^{-1}(\alpha),\ \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha),\ \ldots,\ \vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha),\ \ldots$$

Observemos que cada una de ellas refina a la anterior, es decir

$$\alpha < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) < \cdots < \vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) < \cdots$$

Obtenemos así la siguiente sucesión de números naturales:

$$N(\alpha) \leq N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha)\right) \leq N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha)\right) \leq$$
$$\cdots \leq N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \leq \cdots$$

Tenemos que $\left\{N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right\}$ es una sucesión creciente que sólo depende de n. La idea es descubrir qué tan simple o complicado es el sistema dinámico generado por f a través del estudio de la rapidez de crecimiento de esta sucesión cuando n tiende a infinito. Intuitivamente una función sencilla, que mueve muy poco a los puntos de X, estaría relacionada con un crecimiento lento o polinomial (con respecto a n) de $N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)$. Una función con dinámica más complicada movería tanto los puntos de X que el crecimiento sería exponencial. Para descubrir esta diferencia entre crecimiento polinomial y crecimiento exponencial, se considera el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right).$$

Dadas $f : X \to X$ y α una cubierta abierta de X, la *entropía de f con respecto a la cubierta α* es:

$$ent\,(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\,(\alpha)\right)\right).$$

La *entropía topológica* (o *entropía*) de f es el siguiente supremo:

$$ent\,(f) = \sup\left\{ent\,(f,\alpha) : \alpha \text{ es una cubierta abierta de } X\right\}.$$

Las demostraciones de las siguientes proposiciones se pueden consultar en los siguientes libros: *Dynamics in One Dimension*, escrito por L. S. Block y W. A. Coppel (ver [8]), *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, escrito por L. Alseda, J. Llibre y M. Misiurewicz (ver [3]), y *An Introduction to Ergodic Theory*, escrito por P. Walters (ver [26]). En el texto, cuando es necesario, damos otras referencias.

Sea B un subconjunto de X. Decimos que B es *invariante bajo f* si $f(B) \subset B$. En este caso podemos considerar la función $f|_B : B \to B$.

Proposición 6.1. *Sea B un subconjunto de X que es compacto e invariante bajo f. Entonces $ent\,(f) \geq ent\,(f|_B)$.*

Proposición 6.2. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $ent\left(f^k\right) = k \cdot ent(f)$.*

Proposición 6.3. *La entropía de $f^{\times m} : \prod_{i=1}^m X \to \prod_{i=1}^m X$ es m veces la entropía de f.*

Proposición 6.4. *Sea $g : Y \to Y$ una función continua en Y, espacio métrico compacto. Sea $h : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

conmuta, entonces:

- *$ent\,(f) \geq ent\,(g)$.*
- *Si h es un homeomorfismo, entonces $ent(f) = ent(g)$.*
- *Si existe $M > 0$ tal que para todo $y \in Y$, la cardinalidad de $h^{-1}(y)$ es menor o igual a M, entonces $ent(f) = ent(g)$.*

Proposición 6.5. *Sea $f : X \to X$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Si existen k subconjuntos cerrados de X, no vacíos, ajenos dos a dos, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tales que*

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \subset (f\,(A_1) \cap \cdots \cap f\,(A_k)),$$

entonces $ent(f) \geq \log k$.

Proposición 6.6. *La entropía de $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es $\log 2$.*

Proposición 6.7. *La entropía de la* Tienda $T : [0,1] \to [0,1]$ *es* $\log 2$.

Proposición 6.8. *Si la función $f : [0,1] \to [0,1]$ es transitiva en $[0,1]$, entonces la entropía de f es positiva.*

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [20].

Proposición 6.9. *La entropía del corrimiento en el Cubo de Hilbert, $\sigma : Q \to Q$, es infinita.*

D. Kwietniak y P. Oprocha hacen en [17] la siguiente observación: Para cada $k \in \mathbb{N}$, la entropía de la función $f^{\times k} : \prod_{i=1}^{k} X \to \prod_{i=1}^{k} X$ es igual a la entropía de la función inducida $\hat{f}|_{F_k(X)} : F_k(X) \to F_k(X)$. A partir de aquí ellos demuestran el siguiente resultado.

Proposición 6.10. *Si la entropía de $f : X \to X$ es positiva, entonces la entropía de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ es infinita.*

En ese mismo trabajo los autores muestran que es posible que la entropía de f sea cero y la entropía de $\hat{f}$ sea positiva e, inclusive, infinita.

Otro resultado interesante, que involucra al hiperespacio $C(X)$, ocurre cuando el espacio X es una gráfica. En [17] se demuestra lo siguiente.

Proposición 6.11. *Sea X una gráfica. Si $f : X \to X$ es transitiva, entonces la entropía de $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(X)$ es la misma que la entropía de f.*

Es casi inmediato pensar en la siguiente pregunta.

Pregunta 6.12. Sea X una dendrita. Si $f : X \to X$ es transitiva, ¿entonces la entropía de $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(X)$ es la misma que la entropía de f?

M. Lampart y P. Raith demuestran en [18] los siguientes resultados.

Proposición 6.13. *Si $f : I \to I$ es un homeomorfismo, entonces:*

- *la entropía de $\hat{f} : 2^I \to 2^I$ sólo tiene dos opciones: cero e infinito;*
- *la entropía de la función $\hat{f}|_{C(I)} : C(I) \to C(I)$ es cero.*

En ese mismo trabajo se plantean las siguientes conjetura y preguntas.

Conjetura 6.14. Sea X una gráfica. Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces:

- la entropía de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ sólo tiene dos opciones: cero e infinito;
- la entropía de la función $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(X)$ es cero.

Pregunta 6.15. Sea $f : I \to I$, no necesariamente un homeomorfismo. ¿Se cumplen entonces las siguientes dos condiciones?

- la entropía de $\hat{f} : 2^I \to 2^I$ sólo tiene dos opciones: cero e infinito;

- la entropía de la función $\hat{f}|_{C(I)} : C(I) \to C(I)$ es igual a la entropía de f.

Pregunta 6.16. ¿Existen una dendrita X y una función $f : X \to X$ tales que

$$0 < \text{ entropía de } \hat{f} : 2^X \to 2^X \ < \infty?$$

Pregunta 6.17. ¿Cuáles espacios X satisfacen la siguiente condición: para toda función $f : X \to X$ (todo homeomorfismo) se tiene que las únicas opciones para la entropía de $\hat{f} : 2^X \to 2^X$ son cero e infinito?

Nota final. Gracias a una invitación de la profesora Sonia Sabogal realicé una estancia, como profesor visitante, en la Universidad Industrial de Santander, en Bucaramanga, Colombia. Este evento tuvo lugar en el segundo semestre del año 2007. De entre las actividades que ocurrieron en aquellos meses recuerdo con gusto especial el *Seminario de Sistemas Dinámicos Discretos y Fractales*. A sus sesiones acudieron de manera regular los profesores de la Escuela de Matemáticas Gilberto Arenas, Claudia Inés Granados, Rafael Isaacs, Carolina Mejía y Sonia Sabogal. El trabajo y las pláticas cotidianas sobre matemáticas y otros temas que tuve con este grupo de profesores no sólo influyeron positivamente en mi formación personal, también crearon y fortalecieron los lazos de amistad que me unen con todos ellos. En particular, me siento muy agradecido y honrado por ser parte del gran grupo de amigos de Rafael Isaacs.

Referencias

[1] Acosta G., Illanes A. and Méndez-Lango H., "The transitivity of induced maps", *Topology Appl.* 156 (2009), no. 5, 1013–1033.

[2] Adler R.L., Konheim A.G. and McAndrew M.H., "Topological entropy", *Trans. Amer. Math. Soc.* 114 (1965), 309–319.

[3] Alseda L., Llibre J. and Misiurewicz M., *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, **5**, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1993.

[4] Arenas G., Isaacs R., Méndez H. y Sabogal S., *Sistemas dinámicos discretos y fractales*, Vínculos Matemáticos, 87, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2009.

[5] Banks J., "Topological mapping properties defined by digraphs", *Discrete Contin. Dynam. Systems* 5 (1999), no. 1, 83–92.

[6] Banks J., "Chaos for induced hyperspace maps", *Chaos Solitons Fractals* 25 (2005), no. 3, 1581–1583.

[7] Bauer W. and Sigmund K., "Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures", *Monatsh. Math.* 79 (1975), 81–92.

[8] Block L.S. and Coppel W.A., "Dynamics in one dimension", *Lecture Notes in Mathematics*, 1513, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[9] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second Edition, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Redwood City, CA, 1989.

[10] García J.L., Kwietniak D., Lampart M., Oprocha P. and Peris A., "Chaos on hyperspaces", *Nonlinear Anal.* 71 (2009), no. 1-2, 1–8.

[11] Gengrong Z., Fanping Z. and Xinhe L., "Devaney's chaotic on induced maps of hyperspace", *Chaos Solitons Fractals* 27 (2006), no. 2, 471–475.

[12] Hernández P., *Navegando en el hiperespacio*, Tesis de Maestra en Ciencias (Matemáticas), UNAM, México, (2011).

[13] Hernández P., King J. and Méndez-Lango H., "Compact sets with dense orbit in 2^X", *Topology Proc.* 40 (2012), 319–330.

[14] Hocking J.G. and Young G.S., *Topology*, Dover Publications, New York, 1996.

[15] Illanes A., "Modelos de hiperespacios", capítulo contenido en *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, Escobedo R., Macías S. y Méndez-Lango H., eds., Aportaciones Mat. Textos, 31, Soc. Mat. Mexicana, México, 2006.

[16] Illanes A. and Nadler S.B., Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[17] Kwietniak D. and Oprocha P., "Topological entropy and chaos for maps induced on hyperspaces", *Chaos Solitons Fractals* 33 (2007), no. 1, 76–86.

[18] Lampart M. and Raith P., "Topological entropy for set-valued maps", *Nonlinear Anal.* 73 (2010), no. 6, 1533–1537.

[19] Liao G., Wang L. and Zhang Y., "Transitivity, mixing and chaos for a class of set-valued mappings", *Sci. China Ser. A* 49 (2006), no. 1, 1–8.

[20] Méndez-Lango H., "The process of finding f' for an entire function f has infinite topological entropy", *Topology Proc.* 28 (2004), no. 2, 639–646.

[21] Méndez-Lango H., "On density of periodic points for induced hyperspace maps", *Topology Proc.* 35 (2010), 281–290.

[22] Nadler S.B., Jr. *Dimension theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Mat. Textos, 18, Soc. Mat. Mexicana, México, 2002.

[23] Roman-Flores H., "A note on transitivity in set valued discrete systems", *Chaos Solitons Fractals* 17 (2003), no. 1, 99–104.

[24] Schori R.M. and West J.E., "The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert Cube", *Trans. Amer. Math. Soc.* 213 (1975), 217–235.

[25] Sharma P. and Nagar A., "Inducing sensitivity on hyperspaces", *Topology Appl.* 157 (2010), no. 13, 2052–2058.

[26] Walters P., *An introduction to ergodic theory*, Grad. Texts in Math., 79, Springer Verlag, New York, 1982.

[27] Wang Y., Wei G. and Campbell W.H., "Sensitive dependence on initial conditions between dynamical systems and their induced hyperspace dynamical systems", *Topology Appl.* 156 (2009), no. 4, 803–811.