

Modelo semidiscreto para una ecuación de difusión no local con fuente

MAURICIO BOGOYA*, ALBERTO FORERO

Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

Resumen. Estudiamos el modelo semidiscreto para un problema de difusión no local con fuente

$$(u_i)'(t) = \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)} \right) - \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)} \right) + f(u_i(t)),$$

con dato inicial $u_i(0) = u_0(x_i) > 0$. Probamos la existencia y unicidad de las soluciones. Además, se demuestra que las soluciones del problema discreto convergen a las del continuo cuando el parámetro de la malla va a cero. Analizamos el fenómeno de explosión de las soluciones. Para algunas fuentes f se obtiene la razón de explosión. Finalmente se presentan algunos experimentos numéricos.

Palabras claves: difusión no local, condiciones de Neumann, semidiscretización, explosión.

MSC2010: 35K57, 35B40

A semidiscrete model for a non-local diffusion equation with a source

Abstract. We study a discrete model for a non-local diffusion problem with a source, namely

$$(u_i)'(t) = \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)} \right) - \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)} \right) + f(u_i(t)),$$

with initial datum $u_i(0) = u_0(x_i) > 0$. We prove the existence and uniqueness of the solution. Moreover, we show that solutions of discrete problem converge to the continuous ones when the mesh parameter goes to zero. We also study the blow-up phenomena of solutions. For some sources f , we obtain the blow-up rate. Finally, we perform some numerical experiments.

Keywords: nonlocal diffusion, Neumann boundary conditions, semidiscretization, blow-up.

* Autor para correspondencia: E-mail: mbogoyal@unal.edu.co

Recibido: 17 de mayo de 2012, Aceptado: 20 de agosto de 2012.

1. Introducción

Sea $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa, suave, simétrica $J(-r) = J(r)$, estrictamente creciente en $[-1, 0]$, de soporte compacto y con $\int_{\mathbb{R}} J(r)dr = 1$. Ecuaciones de la forma

$$u_t(x, t) = J * u - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} J(x - y)u(y, t)dy - u(x, t), \quad (1)$$

y variaciones de esta han sido recientemente usadas para modelar procesos de difusión (véase [2, 5, 7, 12]). En [7], si $u(x, t)$ representa la densidad en un punto x y en un tiempo t , y $J(x - y)$ representa la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x , entonces $(J * u)(x, t)$ es la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde las otras posiciones; y en forma análoga, $-u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} J(y - x)u(x, t)dy$ es la razón con la cual los individuos en la posición x viajan a cualquier otra posición. Estas consideraciones en ausencia de fuentes externas inmediatamente llevan a que la densidad $u(x, t)$ satisfaga la ecuación (1). La ecuación (1) es llamada ecuación de difusión no local, ya que la difusión de la densidad $u(x, t)$ no depende solamente de x , sino que depende además de una vecindad de x . La ecuación (1) comparte algunas propiedades con la ecuación clásica del calor $u_t = \Delta u$, tales como el principio del máximo y la propiedad de propagación de velocidad infinita si J tiene soporte compacto.

Otra ecuación clásica que ha sido usada para modelos de difusión es la ecuación de medios porosos (*E.M.P.*), $u_t = \Delta(u^m)$ con $m > 1$. Esta ecuación también muestra muchas propiedades análogas con la ecuación del calor, pero tiene una diferencia fundamental, y es que *E.M.P.* tiene la propiedad de propagación finita de la velocidad; esto significa que si la condición inicial $u(\cdot, 0)$ tiene soporte compacto, entonces la solución $u(\cdot, t)$ tiene soporte compacto para todo $t > 0$. Esta propiedad lleva al desarrollo de frontera libre, el cual consiste en la separación de la región donde la solución es positiva, $u > 0$, y de la región donde $u = 0$. La ecuación de medios porosos ha sido ampliamente estudiada (ver [1, 11]).

Un modelo de difusión no local, donde la difusión en un punto depende de la densidad, fue introducido y estudiado por Cortázar, Elgueta y Rossi en [6]. En este modelo la distribución de probabilidad de saltar de y a x es dada por $J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) \frac{1}{u(y,t)}$ cuando $u(y, t) > 0$, y 0 en otro lugar. En este caso la rapidez con la cual los individuos viajan a la posición x desde otros lugares es $\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy$, y la rapidez con la cual ellos viajan de x a otros lugares es $-u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{y-x}{u(x,t)}\right) dy$. Después de estas consideraciones, se obtiene que la densidad u satisface la ecuación

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy - u(x, t). \quad (2)$$

En [6] se estudia la existencia y unicidad, y un principio de comparación; además, se obtiene un comportamiento similar a la ecuación de medios porosos, donde las soluciones

presentan la propiedad de propagación finita de la velocidad, lo cual origina el estudio de frontera libre.

Luego, Bogoya, Ferreira y Rossi en [4] estudian el problema con condiciones de frontera de Neumann asociado a (2),

$$u_t(x, t) = \int_{-L}^L J\left(\frac{x-y}{u(y, t)}\right) dy - J\left(\frac{x-y}{u(x, t)}\right) dy \quad (3)$$

en $[-L, L] \times [0, \infty)$ con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

En [4] se obtiene para (3) la existencia y unicidad de las soluciones, un principio de comparación y el comportamiento asintótico de las soluciones, las cuales convergen al valor medio del dato inicial. Además, se estudia el modelo discreto asociado a (3),

$$(u_i)'(t) = \sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)}\right) - \sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)}\right), \quad (4)$$

obteniendo la existencia y unicidad, un principio de comparación y el comportamiento asintótico de las soluciones. Además se demuestra que las soluciones de (4) convergen a las soluciones de (3) cuando el parámetro h de la malla va a cero. Finalmente se desarrollan algunos experimentos numéricos.

Luego, Bogoya en [3] estudia la generalización del problema (3) en $N \geq 1$ dimensiones, teniendo en cuenta una fuente; más aún, el problema que estudia es

$$u_t(x, t) = \int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y, t)}\right) u^{1-N\alpha}(y, t) dy - \int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x, t)}\right) u^{1-N\alpha}(x, t) dy + f(u(x, t)) \quad (5)$$

en $\Omega \times [0, T)$, con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera suave, f es una función creciente positiva que representa la fuente externa del modelo y α es un parámetro con $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$.

En [3] se estudia la existencia y la unicidad de las soluciones de (5) y un principio de comparación. Para algunas hipótesis sobre f se demuestra que las soluciones explotan en tiempo finito T . Además, para algunas funciones particulares como $f(u) = u^p$, $p \geq 1$, $f(u) = e^u$, $f(u) = (1 + u) \ln^p(1 + u)$, $p \geq 1$, se obtiene la tasa de explosión de las soluciones.

1.1. El Problema

Consideremos el problema (5) para el caso unidimensional. Haciendo $\Omega = [-L, L]$ se tiene el siguiente problema:

$$u_t(x, t) = \int_{[-L, L]} J\left(\frac{x-y}{u(y, t)}\right) dy - \int_{[-L, L]} J\left(\frac{x-y}{u(x, t)}\right) dy + f(u(x, t)), \quad (6)$$

en $[-L, L] \times [0, T)$, con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. En este modelo se asume que ningún individuo puede salir o entrar del dominio $[-L, L]$. Como el flujo de individuos que entran

o salen al dominio es nulo, se tienen entonces las condiciones de frontera de Neumann. La función f representa la fuente.

El objetivo de este trabajo es estudiar el modelo semidiscreto asociado a (6). Consideramos una descomposición uniforme del intervalo $[-L, L]$ con $x_i = ih$, $i = -N, \dots, N$, donde aproximando las integrales en (6) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(u_i)'(t) = \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)} \right) - \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)} \right) + f(u_i(t)), \quad (7)$$

con $h > 0$, dato inicial $u_i(0) = u_0(x_i)$ para $i = -N, \dots, N$ y f una función que satisface:

(H₀) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función tipo Lipschitz, con constante de Lipschitz $K > 0$;

(H₁) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función creciente, con $f(0) \geq 0$, $f(s) > 0$ para todo $s > 0$;

$$(H_2) \int_a^\infty \frac{1}{f(s)} ds < \infty.$$

Nosotros estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones de (7), así como un principio de comparación válido para las soluciones. Demostraremos que las soluciones del problema discreto (7) convergen a las soluciones del problema continuo (6) cuando el parámetro de la malla va a cero.

Para el modelo numérico diremos que la solución de (7) explota en tiempo finito T_h si existe un tiempo $T_h > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T_h} \|u_h(t)\|_\infty = \lim_{t \rightarrow T_h} \max_j u_j(t) = \infty.$$

Además, estudiaremos el fenómeno de explosión para las soluciones de (7). Para algunas fuentes específicas obtendremos la tasa de explosión de las soluciones del modelo discreto. Demostraremos que el tiempo de explosión del modelo discreto converge al tiempo de explosión del modelo continuo. Finalizaremos con algunos experimento numéricos.

Para un mejor entendimiento del fenómeno de explosión para modelos continuos y discretos ver [8, 9, 10].

2. Existencia y unicidad

Como en el caso continuo, la existencia y unicidad del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (7) es una consecuencia del Teorema de Punto Fijo de Banach. Hacemos notar que la solución de (7) la estamos representando por el vector

$$u_h(t) = (u_{-N}(t), \dots, u_0(t), \dots, u_N(t)).$$

Usaremos el análogo discreto del espacio L^1 , el espacio $l_h^1 = \{(u_i)\}$, dotado de la norma

$$\|u_i\|_{l_h^1} = \sum_{i=-N}^N h|u_i|.$$

Fijamos $t_0 > 0$ y consideramos el espacio de Banach $X_{t_0}^h = C([0, t_0]; l_h^1)$, con la norma

$$\|w\| = \max_{0 \leq t \leq t_0} \sum_{i=-N}^N h|w_i|(t).$$

Sea $(X_{t_0}^h)^+$ el subespacio cerrado en $X_{t_0}^h$, definido por

$$(X_{t_0}^h)^+ = \{w \in C([0, t_0]; l_h^1) \mid w_i \geq 0, \text{ para todo } i = -N, \dots, N\}.$$

Integrando la ecuación (7) a ambos lados con respecto a t sobre el intervalo $[0, t]$, para $0 \leq t \leq t_0$, se obtiene un operador $T_{w_0}^h : (X_{t_0}^h)^+ \rightarrow (X_{t_0}^h)^+$ definido para todo $i = -N, \dots, N$, por

$$(T_{w_0}^h(w))_i(t) = \int_0^t \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{w_j(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{w_i(t)} \right) \right) ds + \int_0^t f(w_i(t)) ds + (w_0)_i. \quad (8)$$

Inicialmente estudiaremos (7) para una función f que satisfaga H_0 , y luego por un argumento de convergencia lo extenderemos a una función f que satisfaga H_1 .

A continuación enunciamos un lema que es una herramienta útil para nuestro estudio.

Lema 2.1. Sean $(w_0)_i, (z_0)_i$ funciones no negativas tales que $(w_0)_i, (z_0)_i \in l_h^1$ y $w, z \in X_{t_0}^h$. Para todo $h > 0$ y para toda función f que satisfaga H_0 , existe una constante C positiva tal que

$$\|T_{w_0}^h(w) - T_{z_0}^h(z)\| \leq Ct_0 \|w - z\| + \|w_0 - z_0\|_{l_h^1}. \quad (9)$$

Demostración. La demostración es análoga a la dada en el Lema 3.1 de [4]. Mostraremos algunos aspectos importantes solamente. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N}^N h |T_{w_0}^h(w) - T_{z_0}^h(z)| &\leq \int_0^t \sum_{i=-N}^N h \left| \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{w_j(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{z_j(t)} \right) \right) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=-N}^N h \left| \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{w_i(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{z_i(t)} \right) \right) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=-N}^N h |f(w_i(t)) - f(z_i(t))| ds + \sum_{i=-N}^N h |(w_0)_i - (z_0)_i|. \end{aligned}$$

Ahora, como f es una función tipo Lipschitz con constante de Lipschitz $K > 0$, tenemos que

$$\sum_{i=-N}^N h |f(w_i(t)) - f(z_i(t))| \leq K \sum_{i=-N}^N h |w_i(t) - z_i(t)|. \quad (10)$$

Siguiendo la misma demostración de [4], tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N}^N h|T_{w_0}^h(w) - T_{z_0}^h(z)| &\leq C_1 \int_0^t \left(\sum_{k=-2N}^{2N} \frac{1}{|k|} \right) \left(\sum_{j=-N}^N h|z_j(s) - w_j(s)| \right) ds \\ &+ K \int_0^t \sum_{i=-N}^N h|w_i(t) - z_i(t)| ds + \sum_{i=-N}^N h|(w_0)_i - (z_0)_i|. \end{aligned} \quad (11)$$

Después de tomar el máximo sobre t en $[0, t_0]$, tenemos que

$$\| |T_{w_0}^h(w) - T_{z_0}^h(z)| \| \leq \tilde{C}t_0 \| |w - z| \| + \| |w_0 - z_0| \|_{l_h^1},$$

donde $\tilde{C} = C + K$. □

Teorema 2.2. *Para toda $u_0 \in l_h^1$ positiva y para toda función f que satisfaga H_0 , existe una única solución de (7) en $(X_{t_0}^h)^+$.*

Demostración. Sea $(T_{w_0}^h(w))_i$ el operador definido en (8). Veamos que $(T_{w_0}^h(w))_i$ aplica $(X_{t_0}^h)^+$ en $(X_{t_0}^h)^+$. Como $w \in (X_{t_0}^h)^+$, tenemos que $(w_0)_i \geq 0$, y por consiguiente

$$\begin{aligned} (T_{w_0}^h(w))_i(t) &= \int_0^t \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{w_j(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{w_i(t)} \right) \right) ds + (w_0)_i + \int_0^t f(w_i(t)) ds \\ &\geq \int_0^t \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{w_j(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{w_i(t)} \right) \right) ds + \int_0^t f(w_i(t)) ds \\ &\geq \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{w_j(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{w_i(t)} \right) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debida a la monotonía de J . Por lo tanto, $(T_{w_0}^h(w))_i \in (X_{t_0}^h)^+$ para cada $w \in (X_{t_0}^h)^+$.

Ahora, si en el Lema 2.1 tomamos $w_0 = z_0$ y $z = 0$, se obtiene que $T_{w_0}^h$ es una contracción para $Ct_0 < 1$. Luego por el Teorema de Punto Fijo de Banach existe un único punto fijo de $(T_{w_0}^h(w))_i$ en $(X_{t_0}^h)^+$, que es la solución de (7). □

Como consecuencia de lo anterior se tienen las siguientes observaciones, las cuales serán de gran utilidad más adelante.

Observación 2.3. Las soluciones de (7) dependen continuamente del dato inicial, en el siguiente sentido: Si u_i y v_i son soluciones de (7) con datos iniciales $u_i(0)$, $v_i(0)$, respectivamente, entonces existe una constante \tilde{C} , tal que

$$\max_{0 \leq t \leq t_0} \| |u_i(t) - v_i(t)| \|_{l_h^1} \leq \tilde{C} \| |u_i(0) - v_i(0)| \|_{l_h^1}.$$

Observación 2.4. u_i , con $i = -N, \dots, N$ es solución de (7) si y sólo si

$$u_i(t) = \int_0^t \sum_{j=-N}^N h \left(J \left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)} \right) - J \left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)} \right) \right) ds + \int_0^t f(u_i(t)) ds + (u_0)_i.$$

A continuación enunciaremos un principio de comparación que es válido para funciones continuas.

Teorema 2.5 (Principio de Comparación). *Sean $u_i(t)$, $v_i(t)$ soluciones continuas de (7) con datos iniciales $u_i(0)$, $v_i(0)$ respectivamente, y f una función que satisface H_0 . Si $u_i(0) \leq v_i(0)$ para todo $i = -N, \dots, N$, entonces $u_i(t) \leq v_i(t)$ para todo $i = -N, \dots, N$ y $t > 0$.*

Demostración. Sean $u_i(0)$, $v_i(0)$ los datos iniciales de las soluciones continuas de (7) tales que $u_i^c(0) = w_i(0) + c$, $v_i^d(0) = z_i(0) + d$ con $w_i(0) < z_i(0)$ y $0 < c < d$. Como $u_i^c(0) \leq v_i^d(0)$, existe $\delta > 0$ tal que $u_i^c(0) + \delta < v_i^d(0)$. Argumentaremos por contradicción. Supongamos que existe un tiempo $t_0 > 0$ y $i \in \{-N, \dots, N\}$ tales que $u_i^c(t_0) = v_i^d(t_0)$ y $u_i^c(t) \leq v_i^d(t)$ para todo $i \in \{-N, \dots, N\}$, $t < t_0$. Definimos el conjunto $B = \{i \mid u_i^c(t_0) = v_i^d(t_0)\}$. Se tiene que B es un conjunto no vacío y cerrado. Sea $k \in B$; tenemos entonces que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u_k^c - v_k^d)(t_0 + h) - (u_k^c - v_k^d)(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u_k^c - v_k^d)(t_0 + h)}{h} \geq 0;$$

por lo tanto,

$$0 \leq (u_k^c - v_k^d)'(t_0) = \sum_{j=-N}^N \left[hJ \left(\frac{h(k-j)}{u_j^c(t_0)} \right) - hJ \left(\frac{h(k-j)}{v_j^d(t_0)} \right) \right] + \sum_{j=-N}^N \left[hJ \left(\frac{h(k-j)}{u_k^c(t_0)} \right) - hJ \left(\frac{h(k-j)}{v_k^d(t_0)} \right) \right] + f(u_k^c(t_0)) - f(v_k^d(t_0)) \leq 0,$$

lo cual implica que $u_j^c(t_0) = v_j^d(t_0)$, para $j \in \{-N, \dots, k, \dots, N\}$. Por consiguiente B es abierto. Se sigue que $B = \{-N, \dots, N\}$, y por consiguiente $u_k^c = v_k^d$ para todo $k = -N, \dots, N$ y para todo $t > 0$; pero esto es una contradicción, ya que $d > c$. Por consiguiente, tenemos que $u_i^c(t) < v_i^d(t)$ para todo $i = -N, \dots, N$ y para todo $t \in [0, t_0]$. Para el caso general, consideremos sucesiones c_n y d_n estrictamente decrecientes tal que $0 < c_n < d_n$ y $d_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sean $u_i^{c_n}(t)$ y $v_i^{d_n}(t)$ soluciones con datos iniciales $u_i^{c_n}(0) = w_i(0) + c_n$, $v_i^{d_n}(0) = z_i(0) + d_n$, respectivamente. Por el argumento de arriba se tiene que $u_i^{c_n}(t) < v_i^{d_n}(t)$. Además, $u_i^{c_n} < u_i^{c_{n+1}}$ y $v_i^{d_n} < v_i^{d_{n+1}}$. Más aún, $\lim_{n \rightarrow 0} u_i^{c_n}(t) \leq \lim_{n \rightarrow 0} v_i^{d_n}(t)$, y por la Observación 2.3 tenemos que $u_i(t) \leq v_i(t)$ para todo $i = -N, \dots, N$ y $t > 0$. □

A continuación extenderemos nuestro análisis a funciones f que satisfagan H_1 .

Teorema 2.6. *Supongamos que f satisface (H_1) . Para toda función positiva $u_0 \in l_h^1[-L, L]$, existe un tiempo $\tilde{T} > 0$ y una única solución de (7) en $C([0, \tilde{T}], l_h^1)$.*

Demostración. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones tipo Lipschitz crecientes tales que $f_n \leq f_{n+1}$. Asumamos que $f_n(s) = f(s)$ en $[0, n]$. Sea $(u_n(t))_i$ la única solución de (7) con dato inicial $(u_n(0))_i$ y fuente f_n . Asumimos que los datos iniciales satisfacen $(u_n(0))_i < (u_{n+1}(0))_i$ y $(u_n(0))_i$ converge uniformemente a $u(0)_i$. Por el principio de comparación, Teorema 2.5, se tiene que $(u_n(t))_i \leq (u_{n+1}(t))_i$; por lo tanto, existe u_i , que puede ser ∞ en algunos puntos, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)_i = u_i$. Sea $\tilde{T} = \sup \{t \mid \max_i u_i(t) < \infty\}$, con $\tilde{T} > 0$. De la Observación 2.4, para cada solución $(u_n(t))_i$, si hacemos tender n a infinito, y aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona, se sigue que u_i es la única solución de (7) para $-N \leq i \leq N$ y $t \in [0, \tilde{T}]$, con dato inicial $u_i(0)$ y fuente $f(u_i)$. \square

Hacemos notar que el Principio de Comparación, Teorema 2.5, también se tiene para funciones f que satisfagan H_1 .

El análisis de la consistencia del modelo numérico está dado por el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sea $u(x, t)$ la solución de (6) de clase C^1 y $u_i(t)$ la solución de (7). Entonces, existe una constante $\hat{C} > 0$ independiente de h tal que*

$$\| \|u(x_i, t) - u_i(t)\| \| \leq \hat{C}h, \quad \forall t \in [0, \tilde{T}]. \quad (12)$$

Demostración. La demostración es análoga a la dada en el Teorema 3.3 de [4]. Mostraremos algunos aspectos importantes solamente. Sea $u(x, t)$ solución de (6) y $u_h(x, t)$ solución de (7) con dato inicial $u_i(0) > 0$; el principio de comparación muestra que la solución es positiva para cualquier tiempo. Así, existe $\delta > 0$ tal que

$$u(x, t), u_h(x, t) \geq \delta > 0. \quad (13)$$

Afirmamos que el esquema de aproximación es consistente. Efectivamente, para esto observemos que si $g \in C^1$, entonces se tiene que

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} g(y) dy = hg(x_j) + O(h^2). \quad (14)$$

Igualmente se puede notar que, como $J, u \in C^1$, la función $g(y) = J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) \in C^1$. Sea $v_i(t) = u(x_i, t)$; tenemos entonces que

$$(v_i)'(t) = \sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{v_j(t)}\right) - \sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{v_i(t)}\right) + f(v_i(t)) + \sum_{j=-N}^N O(h^2).$$

Razonando de la misma forma que en [4], y como f es una función de tipo Lipschitz, tenemos que

$$\int_0^t (u_i - v_i)'(t) \leq Ct \|u - v\|_{l_1^h} + C_1 t \|u - v\|_{l_1^h} + Kt \|u - v\| + C_2 th.$$

Tomando el máximo sobre t en $[0, \tilde{T}]$ y haciendo $\tilde{C} = C + C_1 + K$, tenemos que

$$\| \|u - v\| \| \leq \tilde{C}t_0 \| \|u - v\| \| + C_2 t_0 h,$$

donde \tilde{C} y C_2 no dependen de h . Para $\tilde{C}\tilde{T} = \frac{1}{2}$, se tiene finalmente que

$$\| \|u(x_i, t) - u_i(t)\| \| \leq \hat{C}h. \quad \square$$

3. Análisis de explosión

En esta sección estudiaremos el fenómeno de explosión para las soluciones de (7).

Teorema 3.1. *Sea f una función convexa, que satisface las condiciones (H_1) , (H_2) . Sea u_h la solución de (7) con dato inicial u_0 tal que $\sum_{i=-N}^N u_i(0) > 0$; entonces u_h explota en tiempo finito $T_h > 0$.*

Demostración. Sea $m(t)$ la masa total, definida por $m(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u_i(t)$. Derivando $m(t)$ con respecto a la variable t , tenemos que

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{1}{2N+1} \left(\sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)} \right) - \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)} \right) + \sum_{i=-N}^N f(u_i(t)) \right) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f(u_i(t)). \end{aligned}$$

Por (H_1) y por la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$m'(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f(u_i(t)) \geq f \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u_i(t) \right) = f(m(t));$$

por lo tanto,

$$m'(t) \geq f(m(t)). \tag{15}$$

Como $m(0) > 0$ y $f(u) > 0$ para $u > 0$, tenemos que $m'(t) > 0$, y además $m(t) > 0$ para todo $t > 0$.

Haciendo el cambio de variables $r = m$, y aplicando (H_2) , concluimos que $\infty > \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dr}{f(r)} \geq t$. Por lo tanto, la solución u de (7) explota en tiempo finito $T_h > 0$. \square

Corolario 3.2. *Sea u_h la solución de (7) con $f(u) = u^p$, $p > 1$; $f(u) = e^u$; $f(u) = (1+u) \ln^p(1+u)$, $p > 1$. Entonces u_h explota en tiempo finito.*

A continuación analizaremos la razón de explosión de la solución de (7).

Sea $u_k(t) = \max_i u_i(t)$. Por (7) tenemos que

$$(u_k)'(t) = \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(k-j)}{u_j(t)} \right) - \sum_{j=-N}^N hJ \left(\frac{h(k-j)}{u_k(t)} \right) + f(u_k(t)) \leq f(u_k(t)). \tag{16}$$

Integrando la última desigualdad de t a T_h , obtenemos que

$$\int_{u_k(t)}^{u_k(T_h)} \frac{d(u_k)}{f(u_k(s))} \leq \int_t^{T_h} ds. \tag{17}$$

Sea $F(u_k(T_h)) = \int_{u_k(T_h)}^{\infty} \frac{d(u_k)}{f(u_k(s))}$. Como $u_k(T_h) = \infty$, tenemos que u_k explota en tiempo finito T_h ; además, $F(u_k(T_h)) = 0$.

Por lo tanto, de (17) tenemos que

$$F(u_k(t)) \leq T_h - t. \tag{18}$$

Además, integrando la desigualdad (15) de t a T_h , tenemos que

$$\int_{m(t)}^{m(T_h)} \frac{ds}{f(s)} \geq T_h - t. \tag{19}$$

El siguiente teorema da la razón de explosión para la solución de (7). $f \sim g$ significa que existen constantes finitas positivas c_1 y c_2 tal que $c_1 f \leq g \leq c_2 f$.

Teorema 3.3. *Sea u_h la solución de (7), que explota en tiempo finito T_h . Tenemos:*

1. Si $f(u) = u^p$ con $p > 1$, entonces $\max_i u_i(t) \sim \frac{1}{(T_h - t)^{\frac{1}{p-1}}}$.
2. Si $f(u) = e^u$, entonces $\max_i u_i(t) \sim -\ln(T_h - t)$.
3. Si $f(u) = (1 + u) \ln^p(1 + u)$ con $p > 1$, entonces $\max_i u_i(t) \sim e^{(T_h - t)^{\frac{1}{1-p}}} - 1$.

Demostración.

1. Sea $f(u) = u^p$ con $p > 1$. Por (13), tenemos que

$$\int_{u_k(t)}^{\infty} \frac{ds}{s^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{u_k(t)}^b \frac{ds}{s^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{s^{1-p}}{1-p} \Big|_{u_k(t)}^b \right] = \frac{1}{(p-1)(u_k(t))^{p-1}} \leq T_h - t; \tag{20}$$

además, obtenemos que $u_k(t) \geq \frac{C_p}{(T_h - t)^{\frac{1}{p-1}}}$, con $C_p = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}}$.

Para obtener la otra desigualdad, de (19) tenemos que $m(t) \leq \frac{C_p}{(T_h - t)^{\frac{1}{p-1}}}$; por lo

tanto, $u_k(t) \leq \frac{C_p(2N + 1)}{(T_h - t)^{\frac{1}{p-1}}}$.

De las desigualdades (17) y (18) podemos concluir que $\max_i u_i(t) \sim \frac{1}{(T_h - t)^{\frac{1}{p-1}}}$.

En forma análoga se obtienen las afirmaciones 2. y 3. ☑

Observación 3.4. Las razones de explosión del modelo discreto (7) son las mismas para el modelo continuo (6). Esto se puede apreciar en [3].

Para finalizar la sección, tenemos el siguiente resultado, que relaciona los tiempos de explosión.

Teorema 3.5. Sean T y T_h los tiempos de explosión de las soluciones u y u_h de (6) y (7), respectivamente. Entonces, se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Demostración. Sean T and T_h los tiempos de explosión para las soluciones u y u_h , respectivamente.

Como $\int_{\mathbb{R}} J(z)dz = 1$, tenemos que $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(x, t)}\right) dy$, y su discretización está dada por

$$u_i(t) = \sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)}\right) + \sum_{N_j} hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)}\right) + O(h), \tag{21}$$

donde $N_j = \{j \in \mathbb{N} \mid j \neq -N, \dots, N\}$.

Como $\sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_j(t)}\right) \geq 0$, de (7) obtenemos que

$$(u_i)'(t) \geq - \sum_{j=-N}^N hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)}\right) + f(u_i).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$(u_i)'(t) \geq -u_i(t) + \sum_{N_j} hJ\left(\frac{h(i-j)}{u_i(t)}\right) + O(h) + f(u_i(t)) \geq -u_i(t) + f(u_i(t)).$$

Integrando esta última desigualdad de t a T_h , obtenemos que

$$\int_t^{T_h} \frac{du_i}{-u_i(t) + f(u_i(t))} \geq \int_t^{T_h} dt = T_h - t. \tag{22}$$

Sea $f(s) \gg s$, y supóngase que se satisface (H_2) . Tenemos entonces que $\int_{u_i(t)}^{\infty} \frac{ds}{f(s) - s} <$

∞ . Además, para $u_k(t) = \max_j u_j(t)$ tenemos que $\int_{u_k(t)}^{\infty} \frac{ds}{f(s) - s} < \infty$. Para $u_k(t)$ suficientemente grande, dado $\epsilon > 0$ podemos elegir $\beta > 0$ lo suficientemente grande tal que

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{ds}{f(s) - s} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para el caso continuo, como u explota en tiempo finito T , eligiendo $0 < \tau < \frac{\epsilon}{2}$, tal que $\max_x u(x, T - \tau) \geq 2\beta$, y por Teorema 2.7, tenemos que

$$\max_{0 < t < T - \tau} \sum_{i=-N}^N h|u - u_h|(t) \leq Ch \leq \beta. \tag{23}$$

Sea $u_k(T - \tau) \geq \beta$; obtenemos así que

$$|T_h - (T - \tau)| \leq \int_{u_k(T-\tau)}^{\infty} \frac{1}{f(s) - s} ds \leq \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{f(s) - s} ds < \frac{\epsilon}{2};$$

entonces, si h es lo suficientemente pequeño, concluimos que

$$|T_h - T| = |T_h - T + \tau - \tau| \leq |T_h - (T - \tau)| + |\tau| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \checkmark$$

4. Experimentos numéricos

En esta sección mostramos algunos experimentos numéricos, apoyándonos en Matlab, con la rutina ODE23s, haciendo $L = 2$, $N = 100$.

Las gráficas primera y tercera de la Figura 1 presentan la solución de (7) para $f(u) = e^u$, con datos iniciales $u_0 = \max\{0, 2 + x_i\}$ y $u_0 = \max\{0, -x_i\}$ respectivamente, en las cuales podemos observar que los tiempos de explosión están al alrededor de $t_h = 0,018$ y $t_h = 0,15$, respectivamente. En las gráficas segunda y cuarta se presentan los perfiles de la solución en diferentes tiempos.

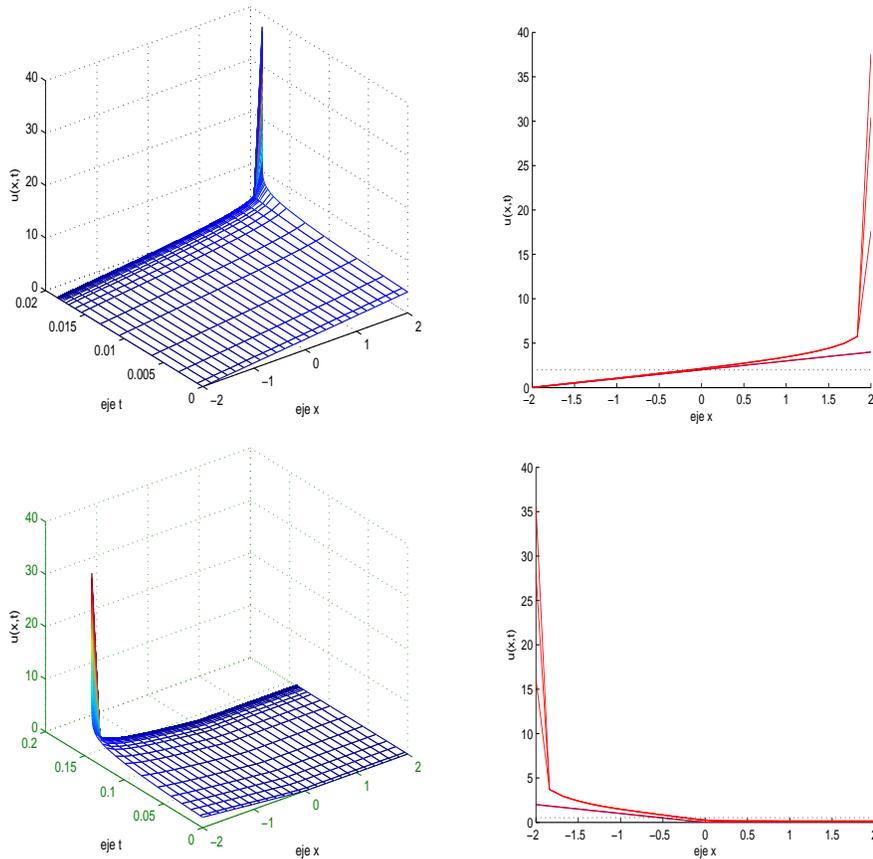


Figura 1. $f(u) = e^u$.

En la Figura 2, las gráficas primera y tercera presentan la solución de (7) para $f(u) = u^2$, con datos iniciales $u_0 = \max\{0, 2+x_i\}$ y $u_0 = \max\{0, -x_i\}$, respectivamente, en las cuales podemos observar que los tiempos de explosión están alrededor de $t_h = 0,25$ y $t_h = 0,52$, respectivamente. En las gráficas segunda y cuarta se presentan los perfiles de la solución en diferentes tiempos.

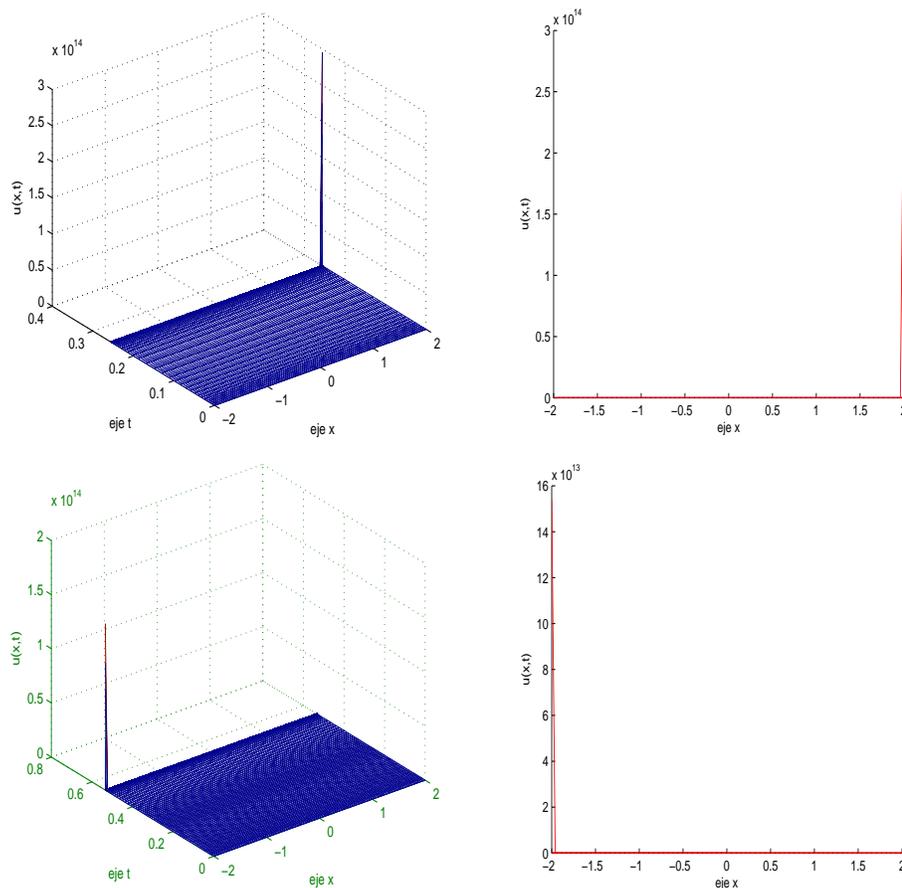


Figura 2. $f(u) = u^2$.

Referencias

- [1] Aronson D.G., “The porous medium equation”, *Nonlinear Diffusion Problems*, Lecture Notes in Math. 1224 (1986), 1–46.
- [2] Bates P.W., Fife P.C., Ren X. and Wang X., “Travelling waves in a convolution model for phase transitions”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 138 (1997), no. 2, 105–136.
- [3] Bogoya M., “Blow up for a nonlocal nonlinear diffusion equation with source”, *Rev. Colombiana Mat.* 46 (2012), no. 1, 1–13.

- [4] Bogoya M., Ferreira R. and Rossi J.D., “Neumann boundary conditions for a nonlocal nonlinear diffusion operator. Continuous and discrete models”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 135 (2007), no. 12, 3837–3846.
- [5] Chen X., “Existence, uniqueness and asymptotic stability of travelling waves in non-local evolution equations”. *Adv. Differential Equations* 2 (1997), no. 1, 125–160.
- [6] Cortázar C., Elgueta M. and Rossi J.D., “A non-local diffusion equation whose solutions develop a free boundary”, *Ann. Henri Poincaré* 6 (2005), no. 2, 269–281.
- [7] Fife P., “Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions”, *Trends in nonlinear analysis*. 153–191, Springer, Berlin, 2003.
- [8] Groisman P. and Rossi J.D., “Asymptotic behaviour for a numerical approximation of a parabolic problem with blowing up solutions”, *J. Comput. Appl. Math.* 135 (2001), no. 1, 135–155.
- [9] Galaktionov V.A. and Vázquez J.L., “The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 8 (2002), no. 2, 399–433.
- [10] Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P. and Mikhailov A.P., *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English transl.: Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1995.
- [11] Vázquez J.L., “An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation”, *Shape optimization and free boundaries*(Montreal, PQ, 1990), 347–389, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 380, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [12] Wang X., “Metastability and stability of patterns in a convolution model for phase transitions”, *J. Differential Equations* 183 (2002), 434–461.