

## ***Solución analítica del problema directo de la tomografía de capacitancia eléctrica para un fluido bifásico con una inclusión circular***

SILVIA REYES<sup>a\*</sup>, ANDRÉS FRAGUELA<sup>b</sup>, VÍCTOR A. CRUZ<sup>a</sup>,  
EMMANUEL A. ROMANO<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, C. P. 69000, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

<sup>b</sup> Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, C. P. 72570, Puebla, México.

### **Resumen.**

En este artículo se expone un modelo matemático al problema de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica (TCE), para el caso de un fluido bifásico dieléctrico con una inclusión circular. Se resuelve el problema directo, que consiste en obtener una expresión analítica para las capacitancias mutuas. La solución del problema directo servirá para validar cualquier método de solución al problema inverso, para calibrar los equipos de medición actualmente existentes y además para construir un método de discretización adaptiva para resolver el problema inverso de la TCE.

**Keywords:** Problema directo, problema inverso, tomografía de capacitancia eléctrica.

**MSC2010:** 35R30, 35R06, 35R05

## ***Analytical solution of the direct problem of electrical capacitance tomography for two-phase fluid with a circular inclusion***

**Abstract.** In this article is disclosed a mathematical model to the problem of Electrical Capacitance Tomography (ECT), for the case of a dielectric biphasic fluid with a circular inclusion. We solve the direct problem, which consists in obtaining an analytic expression for the mutual capacitances. The solution of the direct problem will serve to validate any method of inverse problem solution, to calibrate the existing measurement equipment and also to build an adaptive discretization method to solve the inverse problem of the ECT.

**Palabras claves:** Direct problem, inverse problem, electrical capacitance tomography.

---

\* Autor para correspondencia: *E-mail:* sreyes@mixteco.utm.mx

Recibido: 14 de septiembre de 2012, Aceptado: 25 de octubre de 2012.

## 1. Introducción

La TCE es una herramienta no invasiva que permite obtener una imagen de la distribución de las componentes en un proceso industrial donde intervienen mezclas de sustancias dieléctricas, utilizando un sensor formado por un arreglo circular de  $N$  electrodos  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , que actúan como superficies equipotenciales, equidistribuidos en el exterior de un tubo aislante por el cual fluye la mezcla y colocado alrededor de la sección transversal a examinar; se fija uno de ellos (llamado de referencia) y se miden las capacitancias mutuas entre dicho electrodo y los restantes. Si el electrodo  $i$ -ésimo,  $i = 1, \dots, n$ , se toma como electrodo de referencia, se denota mediante  $C_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$ , la capacitancia mutua entre el electrodo  $j$ -ésimo,  $j = 1, 2, \dots, N$ , y el electrodo de referencia [1, 7, 8, 9].

El problema directo de la TCE consiste en hallar el valor de las capacitancias mutuas, suponiendo conocida la imagen de la distribución de las componentes de la mezcla. El problema inverso de la TCE consiste en hallar la imagen de la distribución de las componentes de la mezcla, a partir del conocimiento de los valores de las capacitancias mutuas. En este artículo planteamos un modelo matemático para el problema de la TCE, en el caso particular en que se tiene un fluido bifásico dieléctrico, donde una de las componentes es considerada como una inclusión circular.

Las tres causas principales que nos motivan para realizar la presente investigación son: obtener una expresión analítica que permita calibrar los equipos de medición, validar cualquier método de solución al problema inverso y construir un método de discretización adaptiva para el problema inverso de la tomografía de capacitancias; para ello se necesita tener una relación funcional entre las capacitancias, pues sabemos que el problema inverso de la tomografía de capacitancias es mal planteado en el sentido de Hadamard, y hasta el momento no se tienen criterios de discretización para este problema. Una discretización óptima para el problema inverso de la tomografía de capacitancias debe considerar que los equipos de medición cometen un error al momento de medir, y por lo tanto el mallado debe tener un área mínima límite en cada punto [4, 5, 6].

## 2. Planteamiento del problema

Se considera una tubería compuesta de un material dieléctrico, con permitividad constante conocida denotada por  $\varepsilon_2$ ; por el interior de dicha tubería pasa un fluido compuesto por dos dieléctricos de permitividad constante  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon_1$ , respectivamente, uno de los cuales ocupa toda la región  $\Omega_1$  y el otro se considera como una inclusión; de manera que al realizar una tomografía se tendría una sección transversal descrita por

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R_0, z_0 = (a, 0)\}; \\ \Omega_1 &= \{z \in \mathbb{C} : R_0 < |z - z_0| \text{ y } |z| < R_1, z_0 = (a, 0)\}; \\ \Omega_2 &= \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}; \\ \Omega_3 &= \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_3\},\end{aligned}$$

donde  $\Omega_* = \Omega_0 \cup \Omega_1$  representa la región por donde fluye la mezcla,  $\Omega_2$  el tubo que contiene la mezcla, y  $\Omega_3$  la región que ocupa una sustancia amortiguadora usada durante el proceso de extracción del crudo, y que sirve para evitar interferencias de potenciales exteriores [2] (ver Figura 1).

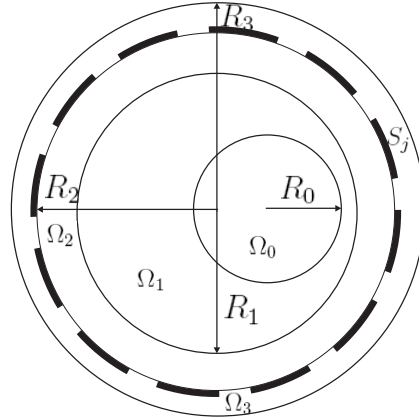


Figura 1. Sección transversal de un flujo bifásico con una inclusión circular.

Si se consideran los electrodos como superficies equipotenciales, y en el electrodo  $i$ -ésimo se provoca un potencial igual a uno y cero en los restantes, al potencial generado  $U^{(i)}$  por el desplazamiento eléctrico se le asocian los potenciales  $U_k^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , en las regiones  $\Omega_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  y  $3$ .

Una relación funcional entre las capacitancias mutuas medidas y la distribución de las permitividades  $\varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  y  $3$ , en la sección transversal satisface la siguiente relación:

$$C_{ij} = K \left\{ \varepsilon_3 \int_{S_j^+} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial n_2} ds - \varepsilon_2 \int_{S_j^-} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial n_2} ds \right\}, \quad (1)$$

donde mediante  $S_j^+$  y  $S_j^-$  se denota el mismo arco  $S_j$  como parte de la frontera de  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ , respectivamente [3].

En este trabajo de investigación se considera un flujo bifásico que corresponde a dos círculos no necesariamente concéntricos, en los que se tienen materiales de diferente permitividad. Esto lleva a que el potencial  $U^{(i)}$  satisfaga la ecuación de Laplace en las cuatro regiones en las que se separa la región,  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ :

$$I = \begin{cases} \Delta U_k = 0, & \text{en } \Omega_k, k = 0, 1, 2, 3; \\ U_k = U_{k+1}, & \text{en } R_k, k = 0, 1; \\ \varepsilon_k \frac{\partial U_k}{\partial n_k} = \varepsilon_{k+1} \frac{\partial U_{k+1}}{\partial n_k}, & \text{en } R_k, k = 0, 1; \\ U_3 = 0, & \text{en } R_3; \\ U_2 = U_3 = \psi_N^{(i)}(\theta), & \text{en } R_2, \end{cases}$$

donde  $n_k$  es el vector unitario normal exterior a  $R_k$ ,  $k = 0, 1$  y  $\psi_N^{(i)}(\theta)$  está dada por

$$\psi_N^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} < \theta \leq \frac{2\pi i}{N}; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El problema que se resuelve en este artículo consiste en hallar una expresión analítica para la función  $U^{(i)}$  en  $\Omega$ , ya que a partir de ella se encuentra una expresión analítica para las capacitancias mutuas, lo cual significa resolver el problema directo de la TCE para el caso planteado.

### 3. Solución del problema

En esta sección se detalla la forma y solución del problema planteado, el cual consiste en hallar una expresión de las dos integrales que intervienen en la fórmula de las capacitancias mutuas dada en (1).

Notemos que se puede desacoplar la función  $U_3^{(i)}$  del sistema  $I$ , ya que satisface el problema de Dirichlet:

$$II = \begin{cases} \Delta U_3^{(i)} = 0, & \text{en } \Omega_3; \\ U_3^{(i)} = 0, & \text{en } R_3; \\ U_3^{(i)} = \psi_N^{(i)}(\theta), & \text{en } R_2. \end{cases}$$

Dado que la función  $U_3^{(i)}$  es armónica, se puede buscar en forma de serie de Fourier, por lo que también se busca la serie de Fourier de la función  $\psi_N^{(i)}(\theta)$ , y al resolver este problema se obtiene que

$$U_3^{(i)} = -\frac{\ln R_3}{N \ln \frac{R_2}{R_3}} + \frac{\ln r}{N \ln \frac{R_2}{R_3}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R_2^{-k} (r^{-k} - R_3^{-2k} r^k)}{k\pi (R_2^{-2k} - R_3^{-2k})} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \operatorname{sen} k \left( \frac{\pi(2i-1)}{N} + \theta \right),$$

y por lo tanto,

$$\int \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial n_2} ds = \frac{2\pi}{N^2 \ln \frac{R_2}{R_3}} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(R_3^{-2k} + R_2^{-2k})}{k^2 (R_2^{-2k} - R_3^{-2k})} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{2k\pi(2i-1)}{N} \cos \frac{n\pi}{N}. \quad (2)$$

Hasta esta parte se tiene el valor de la primera integral en la fórmula (1). Para hallar el valor de la segunda integral, se procede bajo los siguientes pasos:

**Paso 1.** Buscar una transformación conforme  $f : \bar{\Omega}_0 \cup \Omega_1 \rightarrow \{w \in \mathbb{C} / |w| < 1\}$  tal que

$$f(\Omega_0) = \Omega_0^* = \{w \in \mathbb{C} / |w| < \rho_0\} \quad \text{y} \quad f(\Omega_1) = \Omega_1^* = \{w \in \mathbb{C} / \rho_0 < |w| < \rho_1 = 1\}.$$

**Paso 2.** Usando esta transformación conforme, se resuelve el problema auxiliar:

$$III = \begin{cases} \Delta V_0 = 0, & \text{en } \Omega_0^*; \\ \Delta V_1 = 0, & \text{en } \Omega_1^*; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial V_0}{\partial n_0^*} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_0^*}, & \text{en } |w| = \rho_0; \\ V_0 = V_1, & \text{en } |w| = \rho_0; \\ V_1 = H, & \text{en } |w| = \rho_1, \end{cases}$$

en las variables transformadas  $\rho$  y  $\varphi$ , donde  $H = h(g(w))$ ,  $h$  es la función desconocida e igual a  $U_2^{(i)}$  en  $r = R_1$ ,  $g(w) = f^{-1}(w)$  y  $f$  es la transformación conforme.

**Paso 3.** También usando la transformación conforme se resuelve el problema auxiliar:

$$IV = \begin{cases} \Delta U_2^{(i)} = 0, & \text{en } \Omega_2; \\ U_2^{(i)} = \psi_N^{(i)}, & \text{en } r = R_2; \\ U_2^{(i)} = h, & \text{en } r = R_1, \end{cases}$$

en las variables originales  $r$  y  $\theta$ .

**Paso 4.** Una vez resueltos los problemas auxiliares *III* y *IV* en función de  $h$ , se deben encontrar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de  $h$  usando la condición de contorno

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial \rho} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \rho},$$

que debe satisfacerse en  $\rho = 1$ .

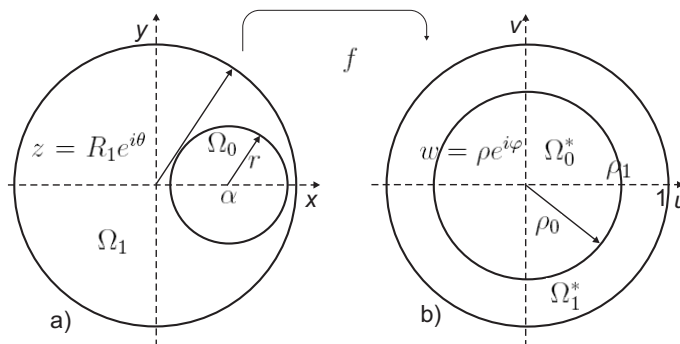
**Paso 5.** Una vez obtenido  $h$  se debe usar la expresión para  $U_2^{(i)}$  obtenida en *III* a fin de calcular

$$\int_{S_j} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial r} ds.$$

### 3.1. Transformación conforme

Considérese la Figura 2. Se busca una transformación conforme  $f : \bar{\Omega}_0 \cup \Omega_1 \rightarrow \{w \in \mathbb{C} / |w| < 1\}$  tal que  $f(\Omega_0) = \Omega_0^* = \{w \in \mathbb{C} / |w| < \rho_0\}$  y  $f(\Omega_1) = \Omega_1^* = \{w \in \mathbb{C} / \rho_0 < |w| < \rho_1 = 1\}$ .

Para ello, se consideran los círculos  $|z| = R_1$  y  $|z - a| = r$ , donde  $0 < \alpha < R_1 - r$ ,  $\alpha, r \in \mathbb{R}$ , y se considera  $|z - a| = k|z - b|$  con  $k > 0$ , la ecuación del círculo de centro  $z_0 = \left| \frac{a-bk^2}{1-k^2} \right|$  y radio  $\rho = \left| \frac{k|a-b|}{1-k^2} \right|$ , donde los puntos son inversos uno del otro.



**Figura 2.** Transformación conforme de la región a) en la región b).

Si se fijan  $a$  y  $b$ , y se varía  $k$ , la ecuación  $|z - a| = k|z - b|$  describe una familia de círculos que no se intersecan. Así que se pueden pensar los círculos  $|z| = R_1$  y  $|z - \alpha| = r$  en el plano  $z$  como miembros de esta familia, con la condición de que  $a$  y  $b$  sean elegidos de forma que sean puntos inversos con respecto a ambos círculos.

Por otra parte, como  $a$  y  $b$  son simétricos respecto a los círculos  $|z| = R_1$  y  $|z - a| = r$ , se cumple que  $ab = R_1^2$  y  $(a - \alpha)(b - \alpha) = r^2$ . Resolviendo para  $a$  y  $b$  se encuentra:

$$b = \frac{R_1^2}{a}, \quad a = \frac{1}{2\alpha} (R_1^2 + \alpha^2 - r^2 - A),$$

donde  $A^2 = (R_1^2 + \alpha^2 - r^2)^2 - 4\alpha^2 R_1^2$ , y la elección del signo de  $A$  es tomando  $a$  dentro y  $b$  fuera de ambos círculos; es decir, se debe tomar la raíz que haga que  $|a| < R_1$ .

Una transformación de Möbius lleva circunferencias en circunferencias y también transforma el simétrico de  $a$  respecto a  $|z| = R_1$ , que es  $\frac{R_1^2}{a}$ , en el simétrico de cero respecto a  $|w| = 1$ , que es  $\infty$ ; es decir, esta transformación tiene un cero en  $a$  y un polo en  $\frac{R_1^2}{a}$ , lo que obliga a que la transformación de Möbius sea de la forma

$$f(z) = \frac{M(z - a)}{az - R_1^2};$$

esta transformación mapea la anterior familia de círculos, que no se intersecan, en una familia de círculos concéntricos.

Se elige la constante  $M = -R_1$  de manera que  $|z| = R_1$  es transformado en  $|w| = 1$ ; por lo tanto, la transformación buscada,

$$f(z) = \frac{R_1(z - a)}{R_1^2 - az}, \quad (3)$$

mapea el círculo  $|z| = R_1$  en  $|w| = 1$  y  $|z - \alpha| = r$  sobre  $|w| = \rho_0$ , donde  $\rho_0 = \frac{R_1}{a} \sqrt{\frac{a - \alpha}{b - \alpha}}$ .

### 3.2. Solución del problema auxiliar en las variables transformadas $\rho$ y $\varphi$

Se define  $V_k(w) = U_k^{(i)}(g(w))$ . Por propiedades de las transformaciones conformes, si se cumple que  $U_k(z)$ ,  $k = 0$  y  $1$ ,  $U_k$  satisface el problema

$$V = \begin{cases} \Delta U_k^{(i)} = 0, & \text{en } \Omega_k, k = 0, 1; \\ U_0^{(i)} = U_1^{(i)}, & \text{en } R_0; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial U_0^{(i)}}{\partial n_0} = \varepsilon_1 \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial n_0}, & \text{en } R_0; \\ U_1^{(i)} = h, & \text{en } R_1; \end{cases}$$

entonces, para  $V_k^{(i)}$ , con  $k = 0, 1$ , se satisface:

$$VI = \begin{cases} \Delta V_k^{(i)} = 0, & \text{en } \Omega_k^*, k = 0, 1; \\ V_0^{(i)} = V_1^{(i)}, & \text{en } \rho_0; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial V_0^{(i)}}{\partial n_0^*} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_0^*}, & \text{en } \rho_0; \\ V_1^{(i)} = H, & \text{en } \rho_1, \end{cases}$$

donde  $H(\omega) = h(g(w))$  y  $w = \rho e^{i\varphi}$ .

La solución del problema (VI) se halla en forma de serie de Fourier:

$$V_0^{(i)} = A_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left[ A_k^{(0)} \cos k\varphi + B_k^{(0)} \operatorname{sen} k\varphi \right],$$

$$V_1^{(i)}(w) = A_0^{(1)} + B_0^{(1)} \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{(1)} \rho^k + B_k^{(1)} \rho^{-k} \right] \cos k\varphi + \left[ C_k^{(1)} \rho^k + D_k^{(1)} \rho^{-k} \right] \operatorname{sen} k\varphi \right\}. \quad (4)$$

Así que se eligen los coeficientes de manera que se satisfagan las condiciones de contorno en  $\rho_0$  y  $\rho_1$ . Suponiendo además que la condición de contorno  $H(e^{i\varphi}) = h(g(e^{i\varphi})) = H(\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)$  es de la forma

$$H(e^{i\varphi}) = a_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k^{(*)} \cos k\varphi + b_k^{(*)} \operatorname{sen} k\varphi \right], \quad (5)$$

se obtiene un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas, de lo cual resulta que los coeficientes son:

$$A_0^{(0)} = A_0^{(1)} = a_0^{(*)}, \quad B_0^{(1)} = 0,$$

$$A_k^{(0)} = \frac{2\varepsilon_1 a_k^{(*)}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)},$$

$$B_k^{(0)} = \frac{2\varepsilon_1 b_k^{(*)}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)},$$

$$A_k^{(1)} = \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) a_k^{(*)}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)},$$

$$B_k^{(1)} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \rho_0^{2k} a_k^{(*)}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)},$$

$$C_k^{(1)} = \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) b_k^{(*)}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)},$$

$$D_k^{(1)} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \rho_0^{2k} b_k^{(*)}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)}.$$

Por lo tanto la expresión para  $V_1^{(i)}$  dada en la fórmula (4) es

$$V_1^{(i)}(\rho, \varphi) = a_0^{(*)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \rho^k + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \rho_0^{2k} \rho^{-k}}{\varepsilon_1(\rho_0^{2k} + 1) - \varepsilon_0(\rho_0^{2k} - 1)} \left\{ a_k^{(*)} \cos k\varphi + b_k^{(*)} \operatorname{sen} k\varphi \right\}. \quad (6)$$

### 3.3. Solución del problema auxiliar en las variables originales $r$ y $\theta$

Se resuelve el problema IV en las variables originales. Como  $z = re^{i\theta}$  y  $U_2^{(i)}$  es armónica en el anillo, se busca en la forma

$$U_2^{(i)}(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k r^k + B_k r^{-k} \right] \cos k\theta + \left[ C_k r^k + D_k r^{-k} \right] \operatorname{sen} k\theta \right\}. \quad (7)$$

Además, se tiene el desarrollo en serie de Fourier de la función  $\psi_N^{(i)}(\theta)$ :

$$\psi_N^{(i)}(\theta) = \frac{1}{N} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \left[ \operatorname{sen} \frac{k\pi(2i-1) + Nk\theta}{N} \right]. \quad (8)$$

Nótese que si  $H(e^{i\varphi}) = h(g(e^{i\varphi}))$ , y si

$$f(R_1 e^{i\theta}) = \frac{R_1 e^{i\theta} - a}{R_1 - a e^{i\theta}} = e^{i\varphi}, \quad (9)$$

entonces,

$$h(R_1(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)) = \operatorname{Re} \left\{ a_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^* - i b_k^*] f^k(R_1 e^{i\theta}) \right\}, \quad (10)$$

donde  $f^k$  representa la potencia  $k$ -ésima de  $f$ . Utilizando las expresiones (8), (9) y (10), se obtiene un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, el cual se resuelve usando el teorema integral de Cauchy para obtener que:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{\ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \right) - \frac{\ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \left\{ a_0^* + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_p^* \left( \frac{a}{R_1} \right)^p \right\}, \\ B_0 &= \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \left\{ a_0^* + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_p^* \left( \frac{a}{R_1} \right)^p - \frac{1}{N} \right\}, \\ A_k &= S R_2^{-k} \left\{ \frac{R_1^{-2k}}{k\pi} 2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} - \frac{R_2^{-k}}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} a_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} \right\}, \\ B_k &= S \left\{ \frac{1}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} a_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} - \frac{2R_2^{-k}}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} \right\}, \\ C_k &= S R_2^{-k} \left\{ \frac{R_1^{-2k}}{k\pi} 2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} - \frac{R_2^{-k}}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} b_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} \right\}, \\ D_k &= S \left\{ \frac{1}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} b_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} - \frac{2R_2^{-k}}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $S = \frac{1}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}}$ .



### 3.4. Coeficientes de Fourier de $h$

Para determinar los coeficientes  $a_k^*$  y  $b_k^*$  se consideran las condiciones en  $r = R_1$  y en  $\rho = 1$  siguientes:

$$VI = \begin{cases} U_1^{(i)} = U_2^{(i)}, & \text{en } R_1; \\ V_1^{(i)} = V_2^{(i)}, & \text{en } \rho = 1; \\ \varepsilon_1 \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial r}, & \text{en } R_1; \\ \varepsilon_1 \frac{\partial V_0^{(i)}}{\partial \rho} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \rho}, & \text{en } \rho = 1, \end{cases}$$

donde  $V_2^{(i)}(w) = U_2^{(i)}(g(w))$  siempre que  $R_2 < \frac{R_2^2}{a}$ , para que el polo de  $f$  esté fuera de  $\Omega_2$  y así se pueda extender la aplicación conforme a dicha región; sin embargo, esto siempre se cumple, ya que  $\frac{R_1^2}{a} > 1$ ; luego existen valores de  $R_2$  para los cuales se cumple la suposición  $R_2 < \frac{R_2^2}{a}$ .

Nótese que

$$\varepsilon_1 \frac{V_1^{(i)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\varepsilon_1 (1 - \rho_0^{2k}) + \varepsilon_0 (\rho_0^{2k} + 1)}{\varepsilon_1 (\rho_0^{2k} + 1) + \varepsilon_0 (1 - \rho_0^{2k})} \{a_k^* \cos k\varphi + b_k^* \sin k\varphi\}. \quad (11)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $g(w) = z$ , la ecuación dada en (7) se puede escribir como

$$U_2(g(w))^{(i)}(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r(w) + Re \sum_{k=1}^{\infty} \{ (A_k - iC_k) (g(w))^k + (B_k + iD_k) (g(w))^{-k} \}, \quad (12)$$

por lo que al derivar la ecuación (12) se tiene

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \varepsilon_2 \frac{B_0}{R_1} \left( \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} + \varepsilon_2 Re \sum_{k=1}^{\infty} k e^{i\varphi} \{ (A_k - iC_k) (g(e^{i\varphi}))^{k-1} - (B_k + iD_k) (g(e^{i\varphi}))^{-k-1} \} g'(e^{i\varphi}). \quad (13)$$

A partir de las expresiones (11) y (13) se obtiene:

$$\frac{B_0}{R_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} (g(e^{i\varphi}))^{k-1} g'(e^{i\varphi}) d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} (g(e^{i\varphi}))^{-k-1} g'(e^{i\varphi}) d\varphi = 0; \quad (14)$$

$$\varepsilon_2 \frac{B_0}{R_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} \cos n\varphi d\varphi + \varepsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \int_0^{2\pi} \cos n\varphi e^{i\varphi} (g(e^{i\varphi}))^{k-1} g'(e^{i\varphi}) d\varphi - \varepsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \int_0^{2\pi} \cos n\varphi e^{i\varphi} (g(e^{i\varphi}))^{-k-1} g'(e^{i\varphi}) d\varphi = n\pi \varepsilon_1 a_n^* \frac{\varepsilon_1 (1 - \rho_0^{2k}) + \varepsilon_0 (\rho_0^{2k} + 1)}{\varepsilon_1 (\rho_0^{2k} + 1) + \varepsilon_0 (1 - \rho_0^{2k})}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_2 \frac{B_0}{R_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} \operatorname{sen} n\varphi d\varphi + \varepsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\varphi e^{i\varphi} (g(e^{i\varphi}))^{k-1} g'(e^{i\varphi}) d\varphi - \\ & \varepsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\varphi e^{i\varphi} (g(e^{i\varphi}))^{-k-1} g'(e^{i\varphi}) d\varphi = n\pi\varepsilon_1 b_n^* \frac{\varepsilon_1 (1 - \rho_0^{2k}) + \varepsilon_0 (\rho_0^{2k} + 1)}{\varepsilon_1 (\rho_0^{2k} + 1) + \varepsilon_0 (1 - \rho_0^{2k})}. \end{aligned} \tag{16}$$

Se resuelve el sistema dado en (14), (15) y (16) usando teoría de residuos, el teorema integral de Cauchy, la transformación conforme y la teoría de funciones analíticas, y se calculan las integrales que intervienen para obtener:

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{1}{N} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_p^* \left( \frac{a}{R_1} \right)^p, \\ a_n^* &= \frac{\varepsilon_2}{\pi\varepsilon_1 n \frac{\varepsilon_1(1-\rho_0^{2n})+\varepsilon_0(1+\rho_0^{-2n})}{\varepsilon_1(1+\rho_0^{2n})+\varepsilon_0(1-\rho_0^{2n})}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \gamma_{n,k} A_k - (\delta_{n,k}^{(1)} + \delta_{n,k}^{(2)}) B_k \right], \\ b_n^* &= \frac{\varepsilon_2}{\pi\varepsilon_1 n \frac{\varepsilon_1(1-\rho_0^{2n})+\varepsilon_0(1+\rho_0^{-2n})}{\varepsilon_1(1+\rho_0^{2n})+\varepsilon_0(1-\rho_0^{2n})}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \gamma_{n,k} C_k - (\delta_{n,k}^{(1)} + \delta_{n,k}^{(2)}) D_k \right], \end{aligned} \tag{17}$$

donde

$$\gamma_{n,k} = \frac{\pi n a^k}{k!} \left( \frac{R_1}{a} \right)^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (n-j+1) \dots (n-j+k-1) \left( - \left( \frac{a}{R_1} \right)^2 \right)^{n-j}, \tag{18}$$

$$\delta_{n,k}^{(1)} = \frac{\pi n a^k}{k R_1^{2k}} \left( \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dw^n} \left( w + \frac{R_1}{a} \right)^k \Big|_{w=0} \right), \tag{19}$$

y

$$\delta_{n,k}^{(2)} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}} \left( w + \frac{R_1}{a} \right)^k \left( \frac{1}{w^{n+1}} - w^{n-1} \right) \Big|_{w=\frac{-a}{R_1}}. \tag{20}$$

### 3.5. Expresión de las capacitancias mutuas

De las expresiones obtenidas en (17) se obtiene una expresión para  $H$ . Lo cual quiere decir que a partir de los coeficientes de Fourier de  $H$  ya obtenidos y de la expresión para  $U_2^{(i)}$  en términos de esos coeficientes de Fourier se obtiene la expresión de las integrales  $\int_{S_j} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial r}$ .

De todo lo expuesto anteriormente se concluye que los coeficientes de Fourier de la función  $U_2^{(i)}$ , expresada en la fórmula (7), están dados de manera implícita en el siguiente sistema

de ecuaciones en  $a_0^*$  y  $b_0^*$  :

$$VII = \begin{cases} A_0 = \frac{1}{N}, \\ B_0 = 0, \\ A_k = \frac{R_2^{-k}}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}} \left\{ \frac{2R_1^{-2k}}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} - \frac{R_2^{-k}}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} a_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} \right\}, \\ B_k = \frac{1}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}} \left\{ \frac{1}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} a_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} - \frac{2R_2^{-k}}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} \right\}, \\ C_k = \frac{R_2^{-k}}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}} \left\{ \frac{2R_1^{-2k}}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} - \frac{R_2^{-k}}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} b_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} \right\}, \\ D_k = \frac{1}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}} \left\{ \frac{1}{2k!} \sum_{p=1}^{\infty} b_p^* \left( \frac{d^k}{dz^k} f^p \right) \Big|_{z=0} - \frac{2R_2^{-k}}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi(2i-1)}{N} \right\}, \end{cases}$$

donde  $a_n^*$  y  $b_n^*$  están dados en (17).

**Teorema 3.1.** La solución  $U_2^{(i)}$  del problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta U_2^{(i)} &= 0, & \text{en } \{z : R_1 < |z| < R_2\}; \\ U_2^{(i)} &= \psi_N^{(i)}, & \text{en } r = R_2; \\ U_2^{(i)} &= h, & \text{en } r = R_1, \end{aligned}$$

donde  $\psi_N^{(i)}$  está dada en la fórmula (8) y  $h$  en la fórmula (10), se expresa en la forma

$$U_2^{(i)}(r, \theta) = \frac{1}{N} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ [A_k r^k + B_k r^{-k}] \cos k\theta + [C_k r^k + D_k r^{-k}] \operatorname{sen} k\theta \},$$

donde los coeficientes se expresan en el sistema VII.

**Teorema 3.2.** Las capacitancias mutuas  $C_{ij}$  que corresponden a un fluido bifásico, donde una de las fases es un círculo de radio  $R_1$  y la otra fase es una inclusión circular de radio  $0 < r < R_1 - \alpha$  ubicada en el punto  $(\alpha, 0)$ , con  $0 \leq \alpha < R_1$ , se calculan en la forma

$$C_{ij} = K \left\{ \varepsilon_3 \int_{S_j^+} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial n_2} ds - \varepsilon_2 \int_{S_j^-} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial n_2} ds \right\},$$

donde los coeficientes vienen descritos en el Teorema 3.1.

El Teorema 3.2 brinda la fórmula explícita de las capacitancias mutuas para el caso de un fluido bifásico dieléctrico con una inclusión circular. Esta fórmula sirve para calibrar los equipos de medición, para validar los métodos de solución al problema inverso para este caso y para proponer un método de discretización de la región de estudio a fin de resolver el problema inverso de manera numérica.

**Agradecimientos.** Agradecemos el apoyo de PROMEP, a través del proyecto PROMEP/103.5/11/8968, para la realización de esta investigación.

## Referencias

- [1] Fragueta A., Oliveros J., Cervantes L., Morín M. y Gómez S., “Un algoritmo no iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica”, *Revista Mexicana de Física* 51 (2005), no. 3, 236–242.

- [2] Williams R.A. and Beck M.S., *Process Tomography: Principles, Techniques and Applications*, Butterworth Heinemann, Oxford, 1995.
- [3] Fragueta A., Gómez S. and Oliveros J., “A new method for the solution of the inverse problem of electrical capacitance tomography and its application to image reconstruction of multiphase flows”, in *Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice* Cambridge, UK (2005), 1–11.
- [4] Kallinderis E., “Adaptive hybrid grid methods”, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering* 189 (2000), 1231–1245.
- [5] Shaofan L. and Wing Kam L., *Meshfree Particle Methods*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [6] Thompson M.W. and Soni B., *Handbook of grid generation*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [7] Zhao J., Fu W., Li T. and Wang S., “An image reconstruction algorithm based on a revised regularization method for electrical capacitance tomography”, *Meas. Sci. Technol.* 13 (2002), 638–640.
- [8] Gamio J.C., “A comparative analysis of single and multiple electrode excitation methods in electrical capacitance tomography”, *Meas. Sci. Technol.* 13 (2002), 1799–1809.
- [9] Gamio J.C., Yang Q.W. and Stott A.L., “Analysis of nonideal characteristics of an ac-based capacitance transducer for tomography”, *Meas. Sci. Technol.* 12 (2001), 1076–1082.