Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 25, No. 2, 2007, pág. 151–154

Vectores de Killing y cantidades conservadas para espacio-tiempos cuasiesféricos

J. Carot*, Y. Parra**, L. A. Núñez*** & U. Percoco***

Resumen. En este trabajo se estudian los espacio-tiempos con deformación de tipo B, con simetría axial y cuasi-esféricos. Se obtiene un elemento de línea tal que admite vectores de Killing de la familia 1 propuesta por J. Flores et al. [1]. Se encuentran las cantidades conservadas asociadas a estos vectores de Killing y por tanto una primera integral de las ecuaciones de las geodésicas que describen una partícula libre inmersa en este tipo espacio-tiempo.

Abstract. The warped space-time type B with axial symmetry and quasi-spherical is explored. This produces a line element that admits killing vector of the family 1-type proposed by J. Flores et al. [1]. The associated conserved amounts with these vectors are found and therefore a first integral of the geodesic equations which describe fres particle inmerse in such space-time is obtained.

1. Introducción

La idea en este trabajo es usar, desde un contexto general, la estructura de todas los vectores de Killing de los espacio-tiempos con deformación de tipo B. De hecho, usar la clasificación dada en [1] como un método para encontrar todos los vectores de Killing de los espacio-tiempos con deformación de tipo B, en particular, para espacio-tiempo con simetría axial y cuasi-esféricos.

Palabras y frases claves: Relatividad general.
***Key words*:** General Relativity.
***PACS*:** 04.20.-q

* Grupo de Relatividad y Cosmología, Departamento de Física, Illes Balears Campus UIB, Cra. Valldemossa pk 7.5 E-07122, Palma Mallorca, España. *e-mail*: `jcarot@uib.es`

** Laboratorio de Física Teórica, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida 5101, Venezuela. *e-mail*: `jparra@ula.ve`

*** Centro de Física Fundamental, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida 5101, Venezuela, *e-mail*: `nunez@ula.ve`, `upercoco@ula.ve`

Por otro lado, los vectores de Killing están asociados a cantidades conservadas noetherianas. Es decir, si X^a es un campo vectorial de Killing y $\gamma(s)$ una geodésica que describe el movimiento de una partícula de prueba inmersa en un campo gravitatorio, entonces se tiene que la cantidad $J = X_a P^a$ es la primera integral de γ a lo largo de la geodésica $\gamma(s)$ [3]. En la sección 2 estudiaremos las ecuaciones de las geodésicas y escribiremos las cantidades conservadas asociadas a los vectores de Killing de espacio-tiempos cuasiesféricos.

2. Espacio-tiempos cuasi-esféricos

Una subfamilia muy importante de espacio-tiempos con simetría axial son los espacio-tiempos Warped B_T. A continuación estudiaremos un ejemplo de este tipo de espacio-tiempos. En coordenadas esféricas usuales se puede escribir el elemento de línea:

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\frac{Q(t,r)^2}{P(t,r)^2}dt^2 + \frac{1}{2}P(t,r)^2 dr^2 + r^2(1+af(\theta))^2 d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (1)$$

Del [1] citamos un resultado conocido sobre los vectores de Killing de los espacio-tiempos Warped B. Por simplicidad estudiaremos la primera familia

$$\vec{X}(t,r,\theta,\phi) = \vec{X_1}(t,r) + \vec{X}_2(\theta,\phi), \quad (2)$$

y será un campo vectorial de Killing de (M,g) si X_1 son los campos vectoriales de Killing de (M_1,h_1), X_2 son los campos vectoriales de Killing más h un campo homotético propio de (M_2,h_2). Además, X_1 debe ser un campo vectorial de Killing, satisfaciendo la condición $X_1^r = -\frac{\lambda r}{2}$, con $\lambda \neq 0$ el factor homotético de X_2.
Más particularmente, debido al hecho de que la variedad M_2 es de dimension 2 y que el escalar de curvatura no es constante, se tiene que X_2 es

$$\vec{X_2} = h1(\theta,\phi)\partial_\theta + (c + h2(\theta,\phi))\partial_\phi, \quad (3)$$

y debido a las ecuaciones de Killing $X_1^t = X_1^t(t)$.
De este resultado podemos dar una clasificación de métricas en base a la forma de $f(\theta)$ mediante el escalar de curvatura de la variedad M_2. Esto es, queremos estudiar métricas cuasiesféricas y por tanto, estamos interesados en el caso que R_2 no es constante y por lo tanto excluimos la solución

$$f(\theta) = \frac{-2\cos(2\theta) - 2 - 2c1 + b\cos(2\theta) + b}{2ac1 - ab\cos(2\theta) - ab}. \quad (4)$$

Ahora nos concentramos en la variedad M_2, es decir, calculamos en las homotecias la métrica que define el elemento de línea

$$ds_2^2 = (1+af(\theta))^2 d\theta^2 + \operatorname{sen}\theta^2 d\phi^2 = g(\theta)^2 d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (5)$$

donde $R_2 \neq$ constante. Entonces esta variedad debe admitir que

$$\overrightarrow{X_2} = h1(\theta,\phi)\partial_\theta + (c + h2(\theta,\phi))\partial_\phi. \tag{6}$$

De $\pounds_x g_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ se tienen las ecuaciones

$$2h1(\theta,\phi)g(\theta)g(\theta)_{,\theta} + 2h1(\theta,\phi)_{,\theta}\, g(\theta)^2 = \lambda g(\theta)^2, \tag{7}$$

$$h1(\theta,\phi)_{,\phi}\, g(\theta)^2 + 2h2(\theta,\phi)_{,\theta}\operatorname{sen}^2(\theta) = 0, \tag{8}$$

$$2h1(\theta,\phi)\cot(\theta) + 2h2(\theta,\phi)_{,\phi} = \lambda. \tag{9}$$

Se encuentra así que

$$h1(\theta,\phi) = \tan(\theta)\left(\frac{\lambda}{2} - c1\right), \qquad h2(\theta,\phi) = c1\phi + c2 \tag{10}$$

y $g(\theta) = c3\operatorname{sen}^\alpha(\theta)\cos(\theta)$, donde

$$\alpha \equiv \frac{2c1}{(\lambda - 2c1)} \quad \text{y} \quad \beta \equiv \frac{\lambda}{2\,(\lambda - 2c1)}.$$

Entonces podemos escribir el elemento de línea de la variedad M_2 como

$$ds_2^2 = \cos^2(\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}(\theta)d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2, \tag{11}$$

si $\epsilon = (c3)^2 = 1$.

Si calculamos la curvatura se tiene que no es constante mientras λ sea diferente de cero. En conclusion, el vector de Killing que satisface $\pounds_x g_{ab} = 0$ en M_4 se escribe como

$$\overrightarrow{X} = \partial_t - \frac{\lambda r}{2}\partial_r + \tan(\theta)\left(\frac{\lambda}{2} - c1\right)\partial_\theta + (c1\phi + c2)\,\partial_\phi, \tag{12}$$

con elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -\frac{1}{2}c^2dt^2 + \frac{1}{2}b^2r^2e^{2\lambda t}dr^2 + r^2\left(\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}(\theta)d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right). \tag{13}$$

A continuación estudiaremos las simetrías no noetherianas (vectores de Killing) y sus correspondientes cantidades conservadas con el fin de integrar las ecuaciones de la geodésica del sistema mencionado anteriormente.

3. Geodésicas y cantidades conservadas

Para este elemento de línea se tiene que las ecuaciones de la geodésica, además de tener una cantidad conservada asociada con el momentum angular debido a al vector de Killing axial ∂_ϕ contenido en (12), tiene las cantidades conservadas

$$J = X^aP_a = X^tP_t + X^rP_r + X^\theta P_\theta + X^\phi P_\phi, \tag{14}$$

donde P^a es el momentum conjugado. Por lo tanto se tiene que

$$J = -\frac{1}{2}c^2 t_s - \frac{\lambda b^2 r^3 e^{2\lambda t} r_s}{4} + \left(\frac{\lambda}{2} - c1\right) r^2 \cos(\theta)\operatorname{sen}^{3\alpha}(\theta)\theta_s + (c1\phi + c2)\, r^2 \operatorname{sen}^2\theta\phi_s, \quad (15)$$

la cual es conservada respecto al parámetro afín. Esta cantidad es la primera integral de la ecuación de la geodésica.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha obtenido un elemento de línea cuasiesférico que admite vectores de Killing de la familia 1 propuesta por J. Flores et al. [1]. Se encontraron las cantidades conservadas asociadas a estos vectores de Killing, y por tanto una primera integral de las ecuaciones de las geodésicas que describen una partícula libre inmersa en este tipo espacio-tiempo. Una posible integración de las godésicas con base en esta cantidad conservada está en desarrollo.

Estos resultados son consecuencia de imponer que espacios de simetría axial (Warped B) y cuasiesféricos admitan vectores de Killing de variables separadas. En futuros trabajos se estudiaran las consecuencias que generan sobre estos tipos de espacio-tiempos isometrías de la familia 2, homotecias, afines y colineaciones de Ricci.

Referencias

[1] J. Flores, Y. Parra & U. Percoco, *J. Math. Phys.*, **45**, 3546, 2004.

[2] G.H. Katzin, J. Levine & W.R. Davis, "Curvature Collineations: A Fundamental Symmetry Property of the Space-Times of General Relativity Defined by the Vanishing Lie Derivative of the Riemannian Curvature Tensor", *J. Math. Phys.*, **10**, 617-629, (1969).

[3] G.H. Katzin & J. Levine, *J. Math. Phys.*, **22**, 1878, (1981).

[4] S. Hojman, L. Núñez, A. Patiño & H. Rago, *J. Math. Phys.*, **27**, 281, (1985).

[5] M. García-Sucre, U. Percoco & L. Núñez, *Can. J. Phys.* **69**, 1217, (1992).

J. Carot
Grupo de Relatividad y Cosmología,
Departamento de Física,
Illes Balears Campus UIB,
Cra. Valldemossa pk 7.5 E-07122,
Palma Mallorca, España.
e-mail: `jcarot@uib.es`

Y. Parra
Laboratorio de Física Teórica,
Departamento de Física,
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes,
Mérida 5101, Venezuela.
e-mail: `jparra@ula.ve`

L. Núñez & U. Percoco
Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física,
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes,
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: `nunez@ula.ve`, `upercoco@ula.ve`