Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 25, No. 2, 2007, pág. 161–164

Contribución al estudio de fluidos disipativos esféricamente simétricos

A. Di Prisco* & O. Troconis*

Resumen. Se realiza un estudio de fluidos autogravitantes, esféricamente simétricos, disipativos y localmente anisótropos en las presiones, discutiéndose la relación que existe entre el tensor de Weyl, el tensor de deformación, la anisotropía y la inhomogeneidad en la densidad de energía. Además, se analizan distintos casos particulares de fluidos esféricamente simétricos, incluyendo el caso más general en el cual todas las variables mencionadas son distintas de cero. En el caso de fluidos perfectos, o fluidos disipativos, pero localmente anisótropos en el régimen de evolución cuasiestática, la inhomogeneidad en la densidad de energía depende exclusivamente del tensor de Weyl, lo cual refuerza la hipótesis de Penrose [1], la cual considera que los sistemas autogravitantes tienden a formar inhomogeneidades, definiéndose así una flecha gravitacional del tiempo. En el trabajo se concluye que en el caso más general, si se adopta el punto de vista de Penrose entonces esta flecha gravitacional depende tanto del tensor de Weyl como de la anisotropía y la disipación.

Abstract. In this paper we study self-gravity, spherically symmetrical, dissipative and locally anisotropic in the pressure fluids; we discuss the relationship between the Weyl tensor, the deformation tensor, the anisotropy and inhomogeneities in the energy density. In addition, individual cases of spherically symmetric fluids, including the more general case in which all the variables above mentioned are different from zero, are studied. In the case of perfect fluids, or fluid dissipative but locally anisotropic in the regime of quasi-static evolution, the inhomogeneities in the energy density depends exclusively on the Weyl tensor, which reinforces the hypothesis of Penrose [1], which is based on the fact that the self-gravity systems tend to form inhomogeneities, defining so a gravitational time arrow. In the paper we conclude that in the more general case, if the perspective of Penrose is adopted, then this arrow is as dependent on the gravitational tensor of Weyl as on the anisotropy of the dissipation.

Palabras y frases claves: Relatividad General, ecuación de Einstein.
***Key words*:** General Relativity, Einstein's equation.
***PACS*:** 04.20.-q.

* Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
e-mail: adiprisc@fisica.ciens.ucv.ve, otroconis@fisica.ciens.ucv.ve

1. Introducción

El trabajo está enfocado hacia el estudio de fluidos autogravitantes, esféricamente simétricos, disipativos y localmente anisótropos en las presiones. Se discute la relación que existe entre el tensor de Weyl, el tensor de deformación (tensor de esquila), la anisotropía y la inhomogeneidad en la densidad de energía. Además, se discuten casos particulares de fluidos esféricamente simétricos.

2. Ecuaciones básicas

El elemento de línea en coordenadas tipo Schwarzschild está dado de la forma

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \tag{1}$$

Las ecuaciones de Einstein son

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu} R = 8\pi T^{\nu}_{\mu}. \tag{2}$$

Para esta distribución de materia esféricamente simétrica que representa un fluido de densidad de energía ρ, localmente anisótropo en las presiones con presión radial P_r y tangencial $P_\perp$, el cual disipa energía a través de un flujo radial de calor q y radiación incoherente ϵ, el tensor de energía-impulso al interior es

$$T^{\mu}_{\nu} = \tilde{\rho} u^{\mu} u_{\nu} - \hat{P} h^{\mu}_{\nu} + \Pi^{\mu}_{\nu} + \tilde{q}(s^{\mu} u_{\nu} + s_{\nu} u^{\mu}),$$

donde u^μ es la cuadrivelocidad, h^{μ}_{ν} es el tensor de proyección en el espacio ortogonal a u^μ y es expresado de la forma

$$h^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - u^{\mu} u_{\nu}.$$

El tensor de anisotropía es

$$\Pi^{\mu}_{\nu} = \Pi \left(s^{\mu} s_{\nu} + \frac{1}{3} h^{\mu}_{\nu} \right).$$

También se definen

$$\hat{P} = \frac{\tilde{P}_r + 2P_\perp}{3}, \qquad \tilde{\rho} = \rho + \epsilon, \qquad \tilde{P}_r = P_r + \epsilon,$$

$$\tilde{q} = q + \epsilon, \qquad \Pi = \tilde{P}_r - P_\perp.$$

Se cumplen además las relaciones

$$s^{\mu} u_{\mu} = 0, \quad s^{\mu} s_{\mu} = -1 \quad \text{y} \quad u^{\mu} u_{\mu} = 1.$$

3. Leyes de conservación y ecuaciones para Weyl. Estudio de casos particulares

Usando la notación

$$f^{\dagger} = f_{,\alpha} s^{\alpha} \qquad f^{*} = f_{,\alpha} u^{\alpha} \qquad a^{\alpha} = a s^{\alpha},$$

donde a^{α} es la cuadriaceleración, se pueden escribir a partir de las leyes de conservación $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ las ecuaciones

$$\tilde{\rho}^{*} + (\tilde{\rho} + \tilde{P}_r)\theta = \frac{2}{3}(\theta + \frac{\sigma}{2})\Pi - \tilde{q}^{\dagger} - 2\tilde{q}a - \frac{2s^1}{r}\tilde{q}, \tag{3}$$

$$\tilde{P}_r^{\dagger} + (\tilde{\rho} + \tilde{P}_r)a + \frac{2s^1}{r}\Pi = \frac{\sigma}{3}\tilde{q} - \tilde{q}^{*} - \frac{4\theta}{3}\tilde{q}, \tag{4}$$

donde (3) corresponde a la ecuación de conservación de la energía y (4) la ecuación dinámica.

Por otra parte, al usar las identidades de Bianchi y las ecuaciones de Einstein se pueden obtener la ecuación de evolución para el tensor de Weyl (E) y la ecuación diferencial espacial para el mismo, respectivamente como:

Ecuación para la evolución de Weyl:

$$(4\pi\tilde{P}_r + \frac{3m}{r^3})(\theta + \frac{\sigma}{2}) + (E - 4\pi\Pi + 4\pi\tilde{\rho})^{*} = -\frac{12\pi s^1}{r}\tilde{q}. \tag{5}$$

Ecuación diferencial espacial para Weyl:

$$(E + 4\pi\tilde{\rho} - 4\pi\Pi)^{\dagger} = \frac{3s^1}{r}(4\pi\Pi - E) + 4\pi\tilde{q}(\frac{\sigma}{2} + \theta). \tag{6}$$

A partir de (6) se puede observar que si el fluido es perfecto, es decir no es anisótropo, $\Pi = 0$, ni disipativo, $\tilde{q} = 0$, entonces la no homogeneidad en la densidad de energía $\rho^{\dagger}$ solamente depende de Weyl E, por lo que Weyl, o cantidades que dependan del mismo, representan una definición alternativa de la flecha gravitacional del tiempo, con lo cual se refuerza la hipótesis de Penrose. La misma conclusión se obtiene al estudiar el caso del fluido isótropo, disipativo, en régimen de evolución cuasi-estática.

Al estudiar el caso más general, es decir, un fluido anisótropo y disipativo, se puede observar a partir de (6) que la no homogeneidad en la densidad de energía depende del tensor de Weyl, la disipación y la anisotropía, por lo que una cantidad que dependa de estas tres variables es la definición alternativa de la flecha gravitacional del tiempo (para detalles ver [2]).

Referencias

[1] R. Penrose, In *General Relativity, An Einstein Centenary Survey.* Ed. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press), p.581-638, (1979).

[2] L. Herrrera, A. Di Prisco, J. Martín, J. Ospino, N.O. Santos, O. Troconis, *Phys. Rev. D*, **69**, 084026, (2004).

A. Di Prisco & O. Troconis
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Central de Venezuela,
Apartado 80793, Caracas 1080A, Venezuela.
e-mail: `adiprisc@fisica.ciens.ucv.ve`,
`otroconis@fisica.ciens.ucv.ve`