Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 1, 2013, pág. 25–42

Operadores pseudodiferenciales definidos en medidas de Borel

Duván Cardona*

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, A.A 25360, Cali, Colombia.

Resumen. En este trabajo se introduce un tipo de operadores pseudodiferenciales definidos en medidas de Borel. Clásicamente la definición de operadores pseudodiferenciales se extiende al espacio de las distribuciones temperadas; sin embargo, en su representación no interviene el análisis de Fourier en espacios de medidas. El objetivo principal es definir tales operadores en un ángulo diferente y establecer resultados de continuidad entre espacios normados adecuados, además de proporcionar una conexión con la teoría de operadores pseudodiferenciales con símbolos en las clases $S^m_{\rho,\delta}$ definidas en $\mathbb{R}^n$ y el toro $\mathbb{T}^n$.

Palabras claves: Operadores pseudodiferenciales, Medidas de Borel, Teorema de Radon-Nikodým, Continuidad y compacidad de operadores, Distribuciones, Operadores elípticos.
MSC2010: 47G30, 65R10.

Pseudo-differential operators defined on Borel measures

Abstract. In this paper we introduce a type of pseudo-differential operators defined on Borel measures. Classically the definition of pseudo-differential operators extends the tempered distributions space, but in its representation does not intervene the Fourier analysis in measures spaces. The main objective is to define such operators at a different angle and establish boundedness results on suitable normed spaces, in addition to providing a connection with the pseudo-differential operators theory with symbols in the classes $S^m_{\rho,\delta}$ defined on $\mathbb{R}^n$ and the torus $\mathbb{T}^n$.

Keywords: Pseudo-differential operators, Borel measures, Radon-Nikodým Theorem, Boundedness and compactness of operators, Distributions, Elliptic operators.

* Autor para correspondencia: *E-mail*: duvan.cardona@correounivalle.edu.co.
Recibido: 10 de febrero 10 de 2013, Aceptado: 20 de mayo de 2013.

1. Introducción

La teoría de operadores pseudodiferenciales surge como una técnica para tratar problemas de ecuaciones en derivadas parciales elípticos e hipoelípticos (véase [4, 9, 17]). Tales operadores, definidos inicialmente en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, fueron extendidos al espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (véase [18]). Cuando esta generalización se restringe al conjunto de las medidas de Radón identificado en el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, no explora sus propiedades en el contexto de la transformada de Fourier, y se pierde la representación usual de operador pseudodiferencial. Por este motivo es útil introducir operadores pseudodiferenciales definidos en medidas de Borel que sean adecuados a dicho marco y próximos a la teoría pseudodiferencial ya conocida, pues tal conexión facilita estudiar la continuidad de estos operadores en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Es importante tener en cuenta que desde el ángulo en el que son definidos nuestros operadores no hay bibliografía hacia la dirección que se desea explorar, esto es, continuidad en el espacio de Banach de las medidas finitas con la norma de la variación y espacios L^p de medidas (tal espacio se define como la colección de medidas cuya derivada de Radon-Nikodým es p-integrable). Sin embargo, dado que la teoría pseudodiferencial en $\mathbb{R}^n$ ha sido bien explorada en el marco de la continuidad de operadores, es de esperar que herede propiedades de acotación a los operadores en medidas.

Antes de explicar los resultados principales del documento se aclara que el concepto de medida utilizado en este manuscrito se refiere al conjunto de las funciones contablemente aditivas definidas en una σ-álgebra, según la teoría expuesta en Restrepo [11]. Los operadores pseudodiferenciales definidos en la clase de Schwartz con símbolos en las clases de Hörmander u operadores clásicos (véase [13]) tienen características importantes como la relación biunívoca entre un símbolo y su operador asociado, compacidad y continuidad en espacios L^p, existencia del operador adjunto, continuidad en espacios de Sobolev, representación integral con núcleo y ciertas aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales (véase [7, 9, 15, 17, 18]).

Estas características se reflejan en el marco de los operadores definidos en medidas. Inicialmente la correspondencia entre el símbolo y su operador asociado tiene una demostración más sencilla en comparación de su versión en los operadores clásicos (véase Proposición 3.4 y Wong [18]). De otro lado, en las Secciones 2 y 3 se recopilan algunos teoremas de continuidad L^p considerando distintos espacios de medidas gracias a la introducción del Teorema de Radon-Nikodým. El Teorema 4.7 establece una conexión entre continuidad de operadores clásicos y continuidad de operadores en medidas. La acotación de operadores en medidas se estudia inicialmente en el espacio de las medidas finitas dotado de la norma de la variación total, a diferencia de los operadores clásicos donde el símbolo requiere un grado de diferenciabiliadad en la variable ξ (véase [1, 3, 8]); los símbolos para operadores en medidas requieren condiciones más débiles (véase Sección 3). Aunque no se tiene un cálculo símbolico para los operadores introducidos, el Teorema 4.6 constituye un primer paso en esta dirección. En recientes operadores pseudodiferenciales definidos en $\mathbb{Z}$ (véase [10]) Molahajloo emplea condiciones sobre la transformada de Fourier del símbolo para obtener continuidad L^p; un resultado equivalente en medidas se obtiene en el Teorema 4.11.

Se sabe que los trabajos relacionados con el Teorema de Calderón-Vaillancourt establecen continuidad L^2 (véase [3]) de operadores clásicos; un compendio de estos teoremas se encuentra en Hwang [8], documento que inspiró al autor en la construcción del Teorema 6.2, involucrando la noción de espacio de Sóbolev de medidas (véase Sección 6). La representación integral de operadores en medidas permite estudiar su compacidad, como puede ser visto en el Teorema 5.3; a su vez, esta representación hace viable definir adjuntos formales (ver mediados de la Sección 5) y rescata la representación pseudodiferencial clásica que se pierde en la generalización al espacio de las distribuciones temperadas por parte de los operadores con símbolos de tipo (ρ, δ). Un tipo de medidas menos popular como las medidas de Carleson se estudian en Stein [15]; argumentos de dualidad en dicho espacio implican continuidad L^p de operadores definidos en dichas medidas (véase Corolario 3.10).

Entre algunas aplicaciones de la teoría de operadores pseudodiferenciales se encuentra el tratamiento de problemas en EDP. En este sentido se tienen dos observaciones: la primera es que el Teorema 6.4 permite estimar soluciones de ecuaciones integrales empleando a la vez tanto teoría pseudodiferencial clásica como operadores en medidas; la segunda, que en la Sección 7 se conecta la reciente teoría pseudodiferencial en el toro con los operadores en medidas. La teoría pseudodiferencial en el toro está bien estudiada por sus aplicaciones a ecuaciones hiperbólicas con soluciones periódicas (véase [13]); dichas soluciones en espacios de funciones pueden ser aproximadas por operadores pseudodiferenciales en medidas (véase Teorema 7.4 y Corolario 7.5). Hace parte de un trabajo futuro estudiar la convergencia de redes de operadores en medidas para obtener aplicaciones a EDP.

2. Preliminares

A lo largo del trabajo se usan herramientas elementales como la fórmula de integración por partes en $\mathbb{R}^n$, transformada de Fourier, Teorema de Plancherel y las desigualdades clásicas de Minkowski y de Young. $\mathbb{R}^n$ es considerado con la topología inducida por la norma euclidiana. A continuación se presentan algunas definiciones y detalles importantes empleados posteriormente.

Para cada $X \subset \mathbb{R}^n$, $bor(X)$ es la menor σ-álgebra que contiene los conjuntos abiertos de X; $\mathcal{B}(X)$ denota el conjunto de las medidas definidas en $bor(X)$. Considérense dos medidas λ y μ. Se dice que λ es μ-continua si $\mu(M) = 0$ implica que $\lambda(M) = 0$; a su vez, $\mathcal{B}(\mu, X)$ es la colección de medidas borelianas μ-continuas en $bor(X)$. El subconjunto de medidas borelianas σ-finitas y continuas respecto a la medida de Lebesgue se denota $\mathcal{B}_\sigma(X)$. El subconjunto de todas las medidas finitas en $bor(X)$, denotado por $\mathcal{B}_f(X)$, es un espacio de Banach con la norma de la variación $\|\mu\| = \int_X d|\mu|$. La transformada de Fourier de un elemento $\mu \in \mathcal{B}_f(X)$ está definida por $\widehat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_X e^{-i\langle x,\xi\rangle} d\mu(x)$.

Dada $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, se define la función $C(\mu)$ por

$$C(\mu)(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_{T(B)} d|\mu|,$$

donde $|B|$ es la medida de Lebesgue de B, y el sup es sobre las vecindades que contienen a x; cuando $B = B(x_0, r)$, $T(B) = \{(x,t) : |x_0 - x| < r - t\}$. El conjunto de las medidas de Carleson $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ está definido por la condición $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \Leftrightarrow \|\mu\|_{\mathcal{C}} < \infty$, donde $\|\mu\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |C(\mu)(x)|$ es la norma de Carleson. Material sobre medidas en el contexto de la transformada de Fourier puede ser consultado en Schwartz [14], y Stein [16].

El operador transformada de Fourier de una función f en $L^1(X)$ está dado por

$$(\mathcal{F}_X f)(\xi) = \int_X e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x) d\hat{x},$$

en donde dx es la medida de Lebesgue y $d\hat{x} = (2\pi)^{-n/2}dx$. Si $X = \mathbb{R}^n$, se escribe $\mathcal{F}_X f = \widehat{f}$. El operador pseudodiferencial asociado a una función $\Sigma(x,\xi)$ está definido de manera formal por $\Sigma(x,D)u(x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\Sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\hat{\xi}$; la función $\Sigma(x,\xi)$ se denomida el símbolo del operador $\Sigma(x,D)$. Lars Hörmander en 1967 introdujo la clase de símbolos $S^m_{\rho,\delta}$, definida como

$$S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) = \{\Sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) : |\Sigma|^{(m)}_{\alpha,\beta} < \infty,\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n\},$$

donde

$$|\Sigma|^{(m)}_{\alpha,\beta} = \sup_{(x,\xi)} \langle\xi\rangle^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|-m}|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x\Sigma(x,\xi)|;$$

en particular, si $\delta = 0$ y $\rho = 1$, se obtiene la clase de símbolos $S^m_{1,0} = S^m$ introducida por Kohn y Nirenberg en 1965 (véase [9]). Una motivación para haber definido esta clase de símbolos es su aplicabilidad a problemas elípticos en ecuaciones en derivadas parciales. El conjunto de los operadores con símbolos en $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, denotado $\Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, forma un álgebra; el siguiente resultado es una condición suficiente para ello.

Proposición 2.1. *Si $a(x,D) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ y $b(x,D) \in S^r_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, para cada $N \in \mathbb{N}$ el símbolo* mód S^{m+r-N} *del operador pseudodiferencial de composición $a \circ b(x,D)$ es*

$$\sum_{|\alpha|<N} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}(\partial^\alpha_\xi a)(\partial^\alpha_x b)(x,\xi).$$

La prueba de este enunciado puede ser consultada en Ruzhansky y Turunen [13].

Un símbolo $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ es elíptico de orden m si existen $A, B > 0$ de modo que $|\sigma(x,\xi)| \geq A|\xi|^m$ cuando $|\xi| \geq B$; en tal caso, existe $\tau \in S^{-m}(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\sigma \circ \tau(x,D) \equiv \tau \circ \sigma(x,D) \equiv I \quad \text{mód } S^{-\infty},$$

con $S^{-\infty} = \cap_m S^m$. El operador $\tau(x,D)$ se denomina paramétrix del operador pseudodiferencial $\sigma(x,D)$ (véase [18]). Finalmente si X y Y son dos espacios normados, $\mathcal{B}(X,Y)$ denota el conjunto de los operadores acotados de X en Y.

3. Operadores pseudodiferenciales definidos en medidas

En esta sección se introduce una clase de operadores pseudodiferenciales definidos en medidas de Borel, mostrando algunas de sus propiedades.

Definición 3.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, y considése el conjunto $\Gamma(X) = \{\sigma(x,\xi) : \xi \mapsto \sigma(x,\xi) \in L^\infty(X)\}$; cada función $\sigma \in \Gamma(X)$ es llamada símbolo; de otro lado, el operador pseudodiferencial asociado a un símbolo σ está definido por

$$T_\sigma(\mu)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\,d\mu(\xi), \quad \mu \in \mathcal{B}_f(X). \tag{1}$$

El conjunto de operadores pseudodiferenciales definidos en $\mathcal{B}_f(X)$ se denota por $\Psi_{mf}(X)$.

Ejemplo 3.2. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $\mu = \sum_{1 \le i \le n} a_i \delta_{\xi_i}$ una combinación lineal de medidas de Dirac δ_{ξ_i} (cada una centrada en un punto $\xi_i \in X$). Si σ es un símbolo, entonces

$$\begin{aligned} T_\sigma \mu(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_X e^{i\langle x, \xi \rangle} \sigma(x,\xi)\, d\mu(\xi) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \sum_{1 \le i \le n} a_i \exp(i\langle x, \xi_i \rangle) \sigma(x, \xi_i). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. Considere $\mathbb{R}$ con la medida μ dada por $d\mu = (1+\xi^2)^{-1} dx$. Si $\sigma \equiv 1$, empleando el Teorema del Residuo se demuestra que

$$T_\sigma(\mu)(x) = \check{\mu}(x) = \pi e^{-x}.$$

Proposición 3.4. *Sean σ y τ dos símbolos de modo que $T_\sigma = T_\tau$; entonces $\sigma = \tau$.*

Demostración. Para cada medida $\mu \in \mathcal{B}_f(X)$ arbitraria pero fija, $T_\sigma \mu(x) = T_\tau \mu(x)$; tomando $\mu = \delta_\xi$, la medida de Dirac centrada en ξ, del Ejemplo 3.2 se concluye que $\sigma(x,\xi) = \tau(x,\xi)$. ☑

Teorema 3.5. *Supóngase que $\sigma \in \Gamma(X)$ es tal que $\| \|\sigma(x,\cdot)\|_{L^\infty} \|_{L^p} < \infty$; entonces el operador $T_\sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_f(X), L^p)$, es decir, T_σ es un operador acotado entre los espacios $\mathcal{B}_f(X)$ y $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} |T_\sigma(\mu)(x)| &\le (2\pi)^{-n/2} \int_X |\sigma(x,\xi)| d\mu(\xi) \\ &\le (2\pi)^{-n/2} \|\sigma(x,\cdot)\|_{L^\infty} \|\mu\|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|T_\sigma(\mu)\|_{L^p} \le (2\pi)^{-n/2} C \|\mu\|,$$

con $C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\sigma(x,\cdot)\|_{L^\infty}^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$. ☑

Teorema 3.6. *Sea $X = [a,b]$ un intervalo finito en $\mathbb{R}$ y $\sigma(x,\xi)$ definida sobre $\mathbb{R} \times X$. Si existen $\eta \in X$ y $f \in L^p$ tales que $\sigma(x,\eta) \in L^p$, $\left| \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right| \le f$, entonces el operador T_σ es acotado de $\mathcal{B}_f(X)$ sobre L^p.*

Demostración. Por el Teorema del valor medio, existe ξ_η en el segmento formado por ξ y η que satisface

$$|\sigma(x,\xi) - \sigma(x,\eta)| = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}(x, \xi_\eta) \right| \cdot |\xi - \eta|;$$

por tanto,

$$
\begin{aligned}
|T_\sigma(\mu)(x)| &\leq \int_a^b |\sigma(x,\xi)-\sigma(x,\eta)|d\mu + \int_a^b |\sigma(x,\eta)|d\mu; \\
&\leq f(x)(b-a)\int_a^b d\mu + |\sigma(x,\eta)|\|\mu\|,
\end{aligned}
$$

así, usando la desigualdad de Minkowski y tomando $C = \|f\|_{L^p}(b-a) + \|\sigma(\cdot,\eta)\|_{L^p}$ se obtiene que

$$\|T_\sigma(\mu)\|_{L^p} \leq C\|\mu\|. \qquad ☑$$

Lema 3.7. *Sea $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; entonces, para todo entero positivo N y para cada ξ, η,*

$$\Lambda(\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha\Lambda)(\xi) + N\sum_{|\gamma|=N}\frac{\eta^\gamma}{\gamma!}\int_0^1 (1-\theta)^{N-1}(\partial^\gamma\Lambda)(\xi+\theta\eta)d\theta. \tag{2}$$

Demostración. La demostración puede ser consultada en Wong [18]. ☑

Usando el lema previo se obtiene continuidad para el operador T_σ empleando símbolos cuya representación en serie de Taylor converge al mismo; esto es posible cuando las derivadas están acotadas de manera adecuada. El siguiente teorema ilustra dicha situación.

Teorema 3.8. *Sean $\sigma(x,\xi)$ una función definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciable en la variable ξ y $X \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Si existe $\lambda > 0$, de modo que $\|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)} \leq \lambda^{|\alpha|}$, el operador $T_\sigma : \mathcal{B}_f(X) \to L^p$ es acotado.*

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|\xi| \leq M$ para cada $\xi \in X$. La expansión en series de Taylor de σ (véase (2)) converge a σ uniformemente. Usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se tiene

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}|T_\sigma\mu(x)| &= \left|\int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)d\mu(\xi)\right| \\
&= \left|\int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sum_\alpha \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha\sigma)(x,0)d\mu(\xi)\right| \\
&\leq \sum_\alpha \frac{M^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_X |(\partial_\xi^\alpha\sigma)(x,0)|d\mu(\xi) \\
&\leq \sum_\alpha \frac{M^{|\alpha|}}{\alpha!}|(\partial_\xi^\alpha\sigma)(x,0)|\|\mu\|;
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\|T_\sigma(\mu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sum_\alpha \frac{M^{|\alpha|}}{\alpha!}\|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}_x^n)}\right)\|\mu\|\\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sum_\alpha \frac{(M\lambda)^{|\alpha|}}{\alpha!}\right)\|\mu\|.\end{aligned}$$ ☑

Para abordar operadores pseudodiferenciales en medidas de Carleson (véase [15] para conocer propiedades generales de tales medidas) se requieren las siguientes definiciones: para ψ definida sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$, sea ψ^* la función definida como

$$\psi^*(x) = \sup_{(y,t)\in\upsilon(x)} |\psi(y,t)|,$$

donde $\upsilon(x) = \{(y,t) : |y-x| < t\}$. Denótese por $\mathcal{N}$ el espacio de Banach de las funciones borelianas ψ en $\mathbb{R}_+^{n+1}$ tal que $\psi^* \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\psi\|_{\mathcal{N}} = \|\psi^*\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. La siguiente proposición establece dualidad débil entre los espacios $\mathcal{N}$ y las medidas de Carleson (véase [15]); es fácil ver que dicha relación implica continuidad de operadores, lo cual será anunciado de forma precisa posteriormente.

Proposición 3.9. *Si $\psi \in \mathcal{N}$ y $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, entonces alguna constante $C > 0$ independiente de ψ y de μ satisface $\left|\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \psi(\xi,\tau)d\mu(\xi,\tau)\right| \leq C\|\psi\|_{\mathcal{N}}\|\mu\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$.*

Demostración. Consultar Stein [15]. ☑

Corolario 3.10. *Sea $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Si el símbolo $\sigma(x,(\xi,\tau)) \in \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ es tal que $\|\sigma(x,(\cdot,\cdot))\|_{\mathcal{N}} \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, entonces el operador T_σ es acotado de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ sobre $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Demostración. Esto es sólo una aplicación del Teorema 3.9. ☑

4. Operadores pseudodiferenciales y el Teorema de Radon-Nikodým

Un rasgo importante definido del conjunto de operadores pseudodiferenciales es que la introducción del Teorema de Radon-Nikodým establece una teoría cercana a la pseudodiferencial en espacios de funciones sobre $\mathbb{R}^n$. Dicha teoría involucra el análisis de Fourier en medidas borelianas, como se mostrará a mediados de esta sección (véase el Teorema 4.12 y la Observación 4.14).

Teorema 4.1 (Radon-Nikodým). *Sea (X,Ω,λ) un espacio de medida σ-finito. Si τ es una medida σ-finita y λ es τ-continua, entonces alguna función medible f satisface $\lambda(M) = \int_M f(\xi)d\tau(\xi)$, para cada $M \in \Omega$. En tal caso, f es única c.t.p., se llama la derivada de Radon-Nikodým de λ respecto a τ, y se escribe $fd\tau = d\lambda$.*

La demostración de este teorema puede ser consultada en Restrepo [11]. En adelante, a menos que se indique lo contrario, μ es la medida de Lebesgue y f_λ la derivada de Radon-Nikodým de λ respecto a μ.

Observación 4.2. Para una medida de Borel λ, defínase $\|\lambda\|_{L^p(X)} = \|f_\lambda\|_{L^p(X)}$. $L^p(\mathcal{B}_\sigma(X))$ es el conjunto de medidas $\lambda \in \mathcal{B}_\sigma(X)$ tal que $\|f_\lambda\|_{L^p(X)} < \infty$. De forma análoga se define $L^p(\mathcal{B}_f(X))$.

Lema 4.3. *La función $\|\lambda\|_{L^p(X)} = \|f_\lambda\|_{L^p(X)}$ es una norma en el espacio $L^p(\mathcal{B}_\sigma(X))$.*

La demostración de este resultado se omite, pues la desigualdad triangular se sigue de ser $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ una norma. Los operadores en $\Psi_{mf}(X)$ acotados pueden ser extendidos a $\mathcal{B}_\sigma(X)$ debido al siguiente teorema.

Teorema 4.4. *$L^p(\mathcal{B}_f(X))$ es un subespacio denso del espacio $L^p(\mathcal{B}_\sigma(X))$.*

Demostración. Sea $\lambda \in L^p(\mathcal{B}_\sigma(X))$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase la medida λ_n por medio de su derivada de Radon-Nikodým así: $f_{\lambda_n} = f_\lambda \cdot 1_{X\cap B(0,n)}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - f_{\lambda_n}\|^p_{L^p(X)} &= \int_X |f_\lambda - f_{\lambda_n}|^p d\mu \\ &= \int_X |f_\lambda|^p |1 - 1_{X\cap B(0,n)}|^p d\mu \\ &= \int_{X - X\cap B(0,n)} |f_\lambda|^p d\mu \to 0, \qquad \text{si} \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$ ☑

Teorema 4.5. *Supóngase que σ es un símbolo y X es un conjunto boreliano acotado o $X = \mathbb{R}^n$. Entonces para cada medida $\lambda \in \mathcal{B}_\sigma(X)$ existe una función $g_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para la cual $T_\sigma(\lambda)(x) = \sigma(x,D)g_\lambda(x)$.*

Demostración. Sea μ la medida de Lebesgue. Si X es acotado, por el Teorema de Radon-Nikodým existe f_λ tal que $d\lambda(\xi) = f_\lambda(\xi)d\mu(\xi)$. La función $f_\lambda \in L^2(X)$ puede ser extendida a $L^2(\mathbb{R}^n)$ (tómese $f \cdot 1_X$). Así, dado que la transformada de Fourier es una biyección sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe g_λ tal que $\widehat{g}_\lambda(\xi) = f_\lambda(\xi)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}T_\sigma(\lambda)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x,\xi) d\lambda(\xi) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x,\xi) \widehat{g}_\lambda(\xi) d\mu(\xi) \\ &= \sigma(x,D)(g_\lambda * \check{1}_X)(x).\end{aligned}$$

En el caso $X = \mathbb{R}^n$ la prueba es análoga; en efecto, $T_\sigma(\lambda)(x) = \sigma(x,D)(g_\lambda)(x)$. Ahora se establece una fórmula para la composición de operadores sobre $\mathbb{R}^n$ con operadores en $\Psi_{mf}(X)$. ☑

Teorema 4.6. *Sean $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$, $\tau(x,\xi) \in S^r(\mathbb{R}^n)$ y $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto boreliano acotado o $X = \mathbb{R}^n$. Si $\sigma(x,D) \in \Psi^m$ y $T_\tau \in \Psi_{mf}(X)$, entonces la composición $\sigma(x,D)T_\tau$ tiene representación pseudodiferencial.*

Demostración. Supóngase X acotado. Sea $\lambda \in \mathcal{B}_\sigma(X)$ y f_λ la derivada de Radon-Nikodým de λ respecto a la medida de Lebesgue μ. Por los Teoremas 2.1 y 4.5,

$$\sigma(x,D)T_\tau(\lambda) = \sigma(x,D)\tau(x,D)(g_\lambda * \check{1}_X) = \rho(x,D)(g_\lambda * \check{1}_X),$$

donde $\widehat{g}_\lambda = f_\lambda$, y $\rho(x,\xi) \in S^{m+r}(\mathbb{R}^n)$, cuyo símbolo mód $S^{-\infty}$ es

$$\sum_\alpha \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha \sigma)(\partial_x^\alpha \tau)(x,\xi).$$

El caso $X = \mathbb{R}^n$ puede ser tratado de forma equivalente. ☑

Teorema 4.7. *Supóngase que σ es un símbolo y $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto boreliano acotado o $X = \mathbb{R}^n$. Si el operador $\sigma(x,D)$ pertenece a $\mathcal{B}(L^p, L^r)$, $1 \leq p \leq 2$, entonces $T_\sigma \in \mathcal{B}(L^q(\mathcal{B}_\sigma(X)), L^r(\mathbb{R}^n))$, con $1/p + 1/q = 1$.*

Demostración. Denótese $\mathcal{F}^{(n)}$ la autocomposición n-ésima de la transformada de Fourier. Existe C tal que

$$\|\sigma(X,D)u\|_{L^r} \leq C\|u\|_{L^p},$$

dado que $\mathcal{F}^{(4)} = \mathcal{F}$ (véase [5]); empleando la desigualdad de Hausdorff-Young se tiene

$$\begin{aligned}
\|\sigma(X,D)(g_\lambda * \check{1}_X)\|_{L^r} &\leq C\|g_\lambda * \check{1}_X\|_{L^p} = C\|\mathcal{F}^{(4)}(g_\lambda * \check{1}_X)\|_{L^p} \\
&\leq C\|\mathcal{F}^{(3)}(g_\lambda * \check{1}_X)\|_{L^q} \leq C\|\mathcal{F}^{(2)}(g_\lambda * \check{1}_X)\|_{L^p} \\
&\leq C\|\mathcal{F}(g_\lambda * \check{1}_X)\|_{L^q} \\
&= C\|\lambda\|_{L^q(\mathcal{B}_\sigma(X))}.
\end{aligned}$$

Para mostrar el caso $X = \mathbb{R}^n$, solo cámbiese $g_\lambda * \check{1}_X$ por g_λ. ☑

Corolario 4.8. *Supóngase que $\sigma \in \Gamma(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ boreliano acotado o $X = \mathbb{R}^n$. Si el operador $\sigma(x,D)$ pertenece a $\mathcal{B}(L^2, L^2)$, entonces $T_\sigma \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{B}_\sigma(X)), L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Teorema 4.9. *Sea T_σ un operador pseudodiferencial definido en $\mathcal{B}_\sigma(X)$. Si $\sigma(x,\xi) \in L^p(\mathbb{R}^n \times X)$, entonces $T_\sigma \in \mathcal{B}(L^q(B_\sigma(X)), L^p(\mathbb{R}^n))$, donde $1/p + 1/q = 1$.*

Demostración. Sea $\sigma(x,\xi) \in L^p(\mathbb{R}^n \times X)$, y $d\lambda = f_\lambda d\mu$, siendo $d\mu$ la medida de Lebesgue; por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$|T_\sigma \lambda(x)| \leq \left(\int_X |\sigma(x,\xi)|^p \, d\mu(\xi)\right)^{1/p} \|f_\lambda\|_{L^q(X)};$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\|T_\sigma \lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\sigma(x,\xi)\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times X)} \|f_\lambda\|_{L^q(X)} \\
&= \|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times X)} \|\lambda\|_{L^q(X)}.
\end{aligned}$$
☑

Observación 4.10. Sea g una función dada, entonces $\widetilde{g}$ se define como $\widetilde{g}(x) = g(-x)$.

Teorema 4.11. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y T_σ un operador pseudodiferencial sobre $B_\sigma(X)$. Si existe $f \in L^1$ tal que*

$$|\mathcal{F}_X \sigma(x,\cdot)| \leq f,$$

entonces para $1 \leq p \leq 2$, el operador $T_\sigma \in \mathcal{B}(L^q(\mathcal{B}_\sigma(X)), L^p)$, con $1/p + 1/q = 1$.

Demostración. Por el Teorema de Fubini podemos escribir

$$\begin{aligned}
T_\sigma(\lambda)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)f_\lambda(\xi)d\mu(\xi)\\
&= (2\pi)^{-n}\int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle m,\xi\rangle}g_\lambda(m)d\mu(m)d\mu(\xi)\\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_X e^{-i\langle m-x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)d\mu(\xi)\right)g_\lambda(m)d\mu(m)\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathcal{F}}_X\sigma(x,\cdot))(x,x-m)g_\lambda(m)d\mu(m)\\
&= (2\pi)^{-n/2}\left(\widetilde{\mathcal{F}}_X\sigma(x,\cdot)*g_\lambda\right)(x);
\end{aligned}$$

además, por la desigualdad de Young se establece la conclusión

$$\begin{aligned}
\|T_\sigma\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C\|g_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|\mathcal{F}^{(4)}(g_\lambda)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\|f_\lambda\|_{L^q(X)}\\
&= C\|\lambda\|_{L^q(X)},
\end{aligned}$$

donde $C=(2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. ☑

El teorema anterior es la versión para operadores pseudodiferenciales en medidas del Teorema 3.2 presentado en Molahajloo [10]. Ambos teoremas comparten la hipótesis impuesta sobre la transformada de Fourier del símbolo σ.

Teorema 4.12. *Considérese el operador T_σ actuando sobre $\mathcal{B}_f(X)\cap\mathcal{B}(\mu,X)$, y sea $\sigma(x,\cdot)$ una función con soporte compacto en ξ; entonces existe un núcleo $K(x,z)$, dependiendo sobre σ, de modo que*

$$T_\sigma(\varphi)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)\widehat{\varphi}(y)\,d\mu(y);$$

esto es, T_σ puede ser escrito en términos de la transformada de Fourier de medidas finitas μ-continuas.

Demostración. Es claro que $\widehat{\varphi}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}f_\varphi(\xi)d\mu(\xi)=\widehat{f_\varphi}(x)$. Por tanto, usando la fórmula de inversión de Fourier y el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
T_\sigma\varphi(-x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}\sigma(-x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\langle y,\xi\rangle}\widehat{f_\varphi}(y)d\mu(y)\,d\mu(\xi)\\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}\sigma(-x,\xi)\,d\mu(\xi)\right)\widehat{f_\varphi}(y)d\mu(y)\\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}k(x,x-y)\widehat{\varphi}(y)d\mu(y),
\end{aligned}$$

donde $k(x,z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle z,\xi\rangle}\sigma(-x,\xi)\,d\mu(\xi)$. La demostración finaliza al tomar $K(x,y)=(2\pi)^{-n}k(-x,-x-y)$. ☑

Observación 4.13. La representación de T_σ en el Teorema 4.12 coincide con la establecida para operadores en $\Psi^m_{\rho,\delta}$; en efecto,

$$T_\sigma(\varphi)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\, d\mu(\xi),$$

donde $\psi(x,\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-i\langle x,\xi\rangle} K(x,\xi)$. Tal expresión interviene de forma esencial para obtener continuidad del operador T_σ; en particular, si $\psi(x,D)$ es (L^2,L^2)-acotado, entonces $T_\sigma \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^2)), L^2)$. De otro lado, estos operadores son regulares; por ejemplo, supóngase que $\sigma(x,\xi) \in S^{-\infty}$; entonces el núcleo es una función suave (véase [13]), de modo que medidas λ cuya derivada $f_\lambda \in \mathcal{S}$ satisfacen $T_\sigma(\lambda) \in C^\infty$.

Teorema 4.14. *Sea T_σ como en el Teorema 4.12. Si el núcleo $K(x,y) \in L^2(\mu\times\mu)$, entonces T_σ es un operador acotado en $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{B}_f(\mathbb{R}^n)), L^2)$.*

Demostración. Como se sabe, que si el núcleo $K(x,y) \in L^2(\mu\times\mu)$, entonces la aplicación

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

es un operador acotado de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$, cuya norma es menor que $\|K\|_{L^2(\mu\times\mu)}$ (véase [2]). Por tanto, usando el Teorema de Plancherel obtenemos

$$\begin{aligned} \|T_\sigma(\varphi)\|_{L^2} &\le \|K\|_{L^2(\mu\times\mu)} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = \|K\|_{L^2(\mu\times\mu)} \|\widehat{f}_\varphi\|_{L^2} \\ &= \|K\|_{L^2(\mu\times\mu)} \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{B}_f(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$ ☑

El siguiente teorema plantea una condición necesaria para el Teorema 4.14.

Teorema 4.15. *Sea $\sigma(x,\cdot)$ una función ξ-soportada en $\mathbb{R}^n$. Supóngase que existen $\Lambda(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ y $N > 0$, tales que*

$$(1+|x+y|^2)^{-N} \|\partial_\xi^\beta \sigma(x,\cdot)\|_{L^1} \le \Lambda(x,y),$$

para cada $|\beta| \le 2N$. Entonces el núcleo $K(x,y)$ definido en 4.12 pertenece a $L^2(\mu\times\mu)$.

Demostración. La prueba es análoga al razononamiento que se sigue, debido al Teorema 6.2. ☑

Teorema 4.16. *Sea $\lambda \in \mathcal{B}_f(X)$ tal que $\mu(X) > 0$; entonces,*

$$\frac{1}{\mu(X)^{1/q}} \|\lambda\| \le \|\lambda\|_{L^p(X)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sin embargo, para $p = 1$, $\|\lambda\| = \|\lambda\|_{L^p(X)}$. Esto implica que todo operador pseudodiferencial acotado sobre $(\mathcal{B}_f(X), \|\cdot\|)$ es acotado en $L^p(\mathcal{B}_f(X))$.

Demostración. Si $d\lambda = f_\lambda d\mu$, entonces $d|\lambda| = |f_\lambda| d\mu$ (véase [11]). Usando la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\|\lambda\| = \int_X d|\lambda| \le \|f_\lambda\|_{L^p(X)} \mu(X)^{1/q}.$$ ☑

Existe un gran contenido bibliográfico sobre continuidad y compacidad L^p de operadores pseudodiferenciales definidos en $\mathbb{R}^n$ (véase [7, 8, 13, 15], el Teorema de Calderón-Vaillancourt y los trabajos de Richard Beals y Charles Fefferman en esta dirección); de otro lado, algunos resultados en esta sección sugieren que la continuidad de operadores sobre medidas puede ser estudiada desde este punto de vista.

5. Compacidad y operador adjunto

Sea H un espacio de Hilbert separable. Un operador $T : H \to H$ es un operador de Hilbert-Schmidt si para alguna base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, $\|T\|_{HS}^2 = \sum \|Te_n\|_H^2 < \infty$. La definición es independiente de la elección de la base, y $\|\cdot\|_{HS}$ es una norma; además, el operador T es compacto.

Teorema 5.1. *Sean $H = L^2(\Omega, \mu)$ y $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$. Entonces el operador*

$$f \mapsto Kf(x) = \int_\Omega K(x, y)f(y)d\mu(y) \tag{3}$$

es un operador de Hilbert-Schmidt, y por tanto compacto.

La demostración puede ser consultada en Conway [2].

Lema 5.2. *$L^2(\mathcal{B}_\sigma(X))$ es un espacio de Hilbert con producto interno*

$$\langle \lambda, \varphi\rangle = \int_X f_\lambda(\xi)\bar{f}_\varphi(\xi)\, d\mu(\xi).$$

Demostración. Esto es consecuencia de que $L^2(X)$ sea un espacio de Hilbert cuando X es Lebesgue-medible. ☑

Teorema 5.3. *Sea $\sigma(x, \xi) \in L^2(\mu \times \mu)$; entonces el operador $T_\sigma : L^2(\mathcal{B}_\sigma(X)) \to L^2(X)$ es compacto.*

Demostración. Tomando como referencia la ecuación (3) se escribe $T_\sigma(\varphi) = Kf_\varphi$, donde $f_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ y $K(x, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x, \xi)$. Usando el Teorema 5.1, la compacidad de K implica que el conjunto $\{T_\sigma(\varphi) : \|\varphi\|_{L^2(B_\sigma(X))} \leq 1\}$ es relativamente compacto en $L^2(X)$, lo cual concluye la prueba. ☑

A continuación se define el adjunto de operadores definidos de $L^2(\mathcal{B}_\sigma(X))$ sobre $L^2(X)$. Considérense las formas bilineales

$$\langle\, ,\, \rangle_1 : L^2(X) \times L^2(\mathcal{B}_\sigma(X)) \to \mathbb{C},$$
$$\langle\, ,\, \rangle_2 : L^2(\mathcal{B}_\sigma(X)) \times L^2(X) \to \mathbb{C},$$

definidas por

$$\langle u, \varphi\rangle_1 = \int_X u(x)\bar{f}_\varphi(x)d\mu(x),$$
$$\langle \lambda, u\rangle_2 = \int_X f_\lambda \bar{u}(x)d\mu(x) = \int_X \bar{u}(x)d\lambda(x).$$

Es fácil ver que se satisface $\langle \varphi, u\rangle_2 = \overline{\langle u, \varphi\rangle}_1$.

El adjunto de T_σ, denotado por T_σ^*, es el operador definido por la igualdad

$$\langle T_\sigma(\lambda), \varphi\rangle_1 = \langle \lambda, T_\sigma^*(\varphi)\rangle_2.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\langle T_\sigma(\lambda), \varphi\rangle_1 &= \int_X T_\sigma(\lambda) f_\varphi(x) d\mu(x)\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_X \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x,\xi) f_\lambda(\xi) \bar{f}_\varphi(x) d\mu(\xi) d\mu(x)\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_X \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x,\xi) f_\lambda(\xi) \bar{f}_\varphi(x) d\mu(x) d\mu(\xi)\\
&= \langle \lambda, T_\sigma^*(\varphi)\rangle_2;
\end{aligned}$$

por tanto,

$$T_\sigma^*(\varphi)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_X e^{-i\langle x,\xi\rangle} \overline{\sigma(\xi, x)} d\varphi(\xi).$$

6. Espacios de Sóbolev de medidas

Se sabe que la relación $\sim$ definida por $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ λ-c.t.p. es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones λ-medibles. La aplicación $\lambda \to [f_\lambda]_\sim = [\frac{d\lambda}{d\mu}]_\sim$ es inyectiva. Por tanto, se puede conocer el grado de regularidad de una medida λ en términos de la diferenciabilidad de su derivada f_λ; con esta idea, a continuación se introduce un espacio de Sobolev de medidas. Sean $\lambda \in \mathcal{B}_\sigma(X)$, μ-continua y $f_\lambda = \frac{d\lambda}{d\mu}$ la derivada de Radon-Nikodým de λ. Se define para $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$ el espacio de Sóbolev $H^{m,p}(\mathcal{B}_\sigma(X))$, determinado por las medidas λ cuya derivada $f_\lambda \in C^m$ y $\partial_\xi^\alpha f_\lambda \in L^p(X)$ para cada multiíndice α con $|\alpha| \leq m$.

Teorema 6.1. *$H^{m,p}(\mathcal{B}_\sigma(X))$ es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_{H^{m,p}(X)}$ definida por*

$$\|\lambda\|_{H^{m,p}(X)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\partial_\xi^\alpha f_\lambda\|_{L^p(X)}.$$

Ahora se establece un resultado de continuidad para operadores en estos espacios, para lo cual se requiere la siguiente identidad:

$$L_\xi^N e^{i\langle x,\xi\rangle} = e^{i\langle x,\xi\rangle},$$

donde $L_\xi = \frac{1}{1+|x|^2}(I - \Delta)$, Δ es el operador de Laplace en $\mathbb{R}^n$ y $N \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.2. *Sean $X = \mathbb{R}^n$, $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$ tales que $Np > \frac{n}{2}$. Sea $\sigma(x,\xi)$ un símbolo tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| \partial_\xi^\beta \sigma(x,\cdot) \right\|_{L^q(X)} < \infty,$$

para $|\beta| \leq 2N$ y $1/p + 1/q = 1$. Entonces el operador pseudodiferencial T_σ es acotado de $H^{2N,p}(\mathcal{B}_\sigma(X))$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se puede suponer que σ es ξ-soportado en X y concluir por un argumento de densidad. Empleando fórmula de integración por partes,

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{\frac{n}{2}}(1+|x|^2)^N T_\sigma\lambda(x) = \\
&= \int_X (I-\Delta)^N(e^{i\langle x,\xi\rangle})\sigma(x,\xi)f_\lambda(\xi)d\mu(\xi) \\
&= \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}(I-\Delta)^N[\sigma(x,\xi)f_\lambda(\xi)]d\mu(\xi) \\
&= \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\binom{N}{j}\Delta^j[\sigma(x,\xi)f_\lambda(\xi)]d\mu(\xi) \\
&= \int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\binom{N}{j}\sum_{|\alpha|=j}\binom{j}{\alpha}\partial_\xi^{2\alpha}[\sigma(x,\xi)f_\lambda(\xi)]d\mu(\xi) \\
&= \sum_{j=0}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\sum_{\beta\leq 2\alpha}(-1)^j\binom{N}{j}\binom{j}{\alpha}\binom{2\alpha}{\beta}\int_X e^{i\langle x,\xi\rangle}\partial_\xi^{2\alpha-\beta}\sigma(x,\xi)\cdot\partial_\xi^{\beta}f_\lambda(\xi)d\mu(\xi);
\end{aligned}
$$

por tanto, usando desigualdad de Minkowski, se satisface

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{\frac{n}{2}}(1+|x|^2)^N|T_\sigma\lambda(x)| = \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\sum_{\beta\leq 2\alpha}\binom{N}{j}\binom{j}{\alpha}\binom{2\alpha}{\beta}\int_X |\partial_\xi^{2\alpha-\beta}\sigma(x,\xi)|\cdot|\partial_\xi^{\beta}f_\lambda(\xi)|d\mu(\xi) \\
&\qquad \leq \sum_{j=0}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\sum_{\beta\leq 2\alpha}\binom{N}{j}\binom{j}{\alpha}\binom{2\alpha}{\beta}\|\partial_\xi^{2\alpha-\beta}\sigma(x,\cdot)\|_{L^q(X)}\|\partial_\xi^{\beta}f_\lambda\|_{L^p(X)}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, alguna constante positiva C satisface

$$|T_\sigma\lambda(x)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{C}{(1+|x|^2)^N}\sum_{0\leq|\beta|\leq 2N}\|\partial_\xi^{\beta}f_\lambda\|_{L^p(X)}.$$

Por tanto, $\|T_\sigma(\lambda)\|_{L^p} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}C\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^{Np}}\right)^{1/p}\|\lambda\|_{H^{2N,p}(X)}$. ☑

La condición sobre el símbolo en 6.2 o algunas variaciones son usuales. Hwang (véase [8]) toma como referencia condiciones similares para encontrar continuidad L^2 de operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$ en el contexto del Teorema de Calderón-Vaillancourt.

Se establece a continuación un *estimativo a priori* de la ecuación pseudodiferencial $T_\sigma(\lambda) = g$, con $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ elíptico y $g \in H^{0,2}(\mathbb{R}^n)$ ($H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{R}$, es la familia usual de espacios de Sóbolev de funciones en $\mathbb{R}^n$). Esto requiere el siguiente lema (para la demostración consultar Hörmander [7], Ruzhansky y Turunen [13] o Stein [15]).

Lema 6.3. *Sea $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\sigma(x,D) : H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \to H^{r-m,p}(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado, para $1 \leq p < \infty, r \in \mathbb{R}$.*

Teorema 6.4. *Considérese el problema pseudodiferencial* $T_\sigma(\lambda) = g$, *esto es,*

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x,\xi) d\lambda(x) = g(x),$$

$\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n)$ *elíptico,* $g \in H^{0,2}(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, *y* $\lambda \in \mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. *Entonces* $\lambda \in H^{m,2}(\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Existe un operador paramétrix del operador pseudodiferencial $\tau(x,D) \in \Psi^{-m}$ de $\sigma(x,D)$, y también $r(x,D) \in \Psi^{-\infty}$, que satisface $\tau \circ \sigma(x,D) = I - R(x,D)$. De otro lado, por el Teorema 4.5 existe $g_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_\sigma(\lambda) = \sigma(x,D)(g_\lambda)$. Esto implica que $g_\lambda(x) - r(x,D)g_\lambda = \tau(x,D)(g)$. Tomando norma $\|\cdot\|_{H^{m,2}(\mathbb{R}^m)}$ en ambos lados y aplicando desigualdad triangular, se tiene

$$\|g_\lambda\|_{H^{m,2}(\mathbb{R}^n)} \leq \|r(x,D)g_\lambda\|_{H^{m,2}(\mathbb{R}^m)} + \|\tau(x,D)g\|_{H^{m,2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando el Lema 6.3, existen constantes $A, B > 0$ independientes de g y g_λ tales que

$$\|g_\lambda\|_{H^{m,2}(\mathbb{R}^n)} \leq A\|g_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + B\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

En la prueba del Teorema 4.5 se demuestra que $\widehat{g}_\lambda = f_\lambda$. Teniendo en cuenta que $(1 + |\xi|^2)^{m/2} g_\lambda(\xi) \in L^2$, puesto que $g_\lambda \in H^{m,2}$, se sigue que $\partial_\xi^\alpha f_\lambda \in L^2$ para todo $|\alpha| \leq m$. Finalmente, $\lambda \in H^{m,2}(\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n))$. ☑

7. Operadores pseudodiferenciales definidos en el toro y operadores pseudodiferenciales definidos en medidas

En esta sección establecemos una relación entre operadores pseudodiferenciales definidos en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (véase [13]) y los operadores en medidas introducidos en la Sección 2. Se supone que el lector está familiarizado con la teoría pseudodiferencial en el toro; de no ser así, se puede consultar Ruzhansky y Turunen [13]. Un motivo para explorar la acotación de operadores en $\mathbb{T}^n$ es su aplicabilidad a ecuaciones hiperbólicas (véase [13, Capítulo 4] y [17]) pues permite hacer diferentes estimativos *a priori* de las soluciones.

Definición 7.1 (Símbolos toroidales). Sean $m \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. La clase toroidal de símbolos $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de las funciones $\sigma(x,\xi)$ infinitamente diferenciables respecto a x para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, que satisfacen

$$\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} |\overset{\alpha}{\underset{\xi}{\triangle}} \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \langle\xi\rangle^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} < \infty,$$

donde $\triangle$ es el operador de diferencias definido en [13].

Definición 7.2 (Operadores pseudodiferenciales toroidales). Para $\sigma(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$ se denota $Op(\sigma)$ al operador pseudodiferencial asociado a σ definido por

$$Op(\sigma)(f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x,\xi) \widehat{f}(\xi);$$

la serie es convergente cuando $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 7.3. *Sea $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$; entonces el operador $Op(\sigma) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es un operador continuo.*

La demostracion de este enunciado puede ser consultada en Ruzhansky y Turunen [13].

Teorema 7.4. *Sea $\sigma(x, \xi)$ definida en $\mathbb{R}^{2n}$ de modo que su restricion a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$ pertenece a la clase $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Para cada función $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ existe una sucesión de medidas λ_m de modo que*

$$\lim_{m\to\infty} T_\sigma(\lambda_m)(x) = Op(\sigma)(f)(x), \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Demostración. Sea $(X_m)_m$ un cubrimiento creciente de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$, esto es, $X_m \subset X_{m+1}$, cada X_m es acotado y $\cup_m X_m = \mathbb{R}^n$. Sea λ_m la combinacion de medidas de Dirac definidas por

$$\lambda_m = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n \cap X_m} \widehat{f}(\eta)\delta_\eta.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} T_\sigma(\lambda_m)(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \sigma(x, \xi) d\lambda_m(\xi) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n \cap X_m} e^{i\langle x,\eta\rangle} \sigma(x, \eta)\widehat{f}(\eta). \end{aligned}$$

Cláramente,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} T_\sigma(\lambda_m)(x) &= \lim_{m\to\infty} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n \cap X_m} e^{i\langle x,\eta\rangle} \sigma(x, \eta)\widehat{f}(\eta) \\ &= Op(\sigma)(f)(x). \end{aligned}$$ ☑

Corolario 7.5. *Sea $\sigma(x, \xi)$ como en el Teorema 7.4. Para cada función $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ existe una sucesión de medidas λ_m de modo que*

$$\lim_{m\to\infty} \| T_\sigma(\lambda_m) - Op(\sigma)(f) \|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = 0.$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} \|T_\sigma(\lambda_m) - Op(\sigma)(f)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} &\leq \|T_\sigma(\lambda_m) - Op(\sigma)(f)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \mu(\mathbb{T}^n) \\ &= \|T_\sigma(\lambda_m) - Op(\sigma)(f)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}, \end{aligned}$$

donde $\mu(\mathbb{T}^n) = 1$ es la medida de Lebesgue de $\mathbb{T}^n = [0, 1[^n$. Haciendo tender m a infinito y aplicando el Teorema 7.4 se concluye la prueba. ☑

Ejemplo 7.6 (Ecuación de Schrödinger)**.** Sea $u(t, x)$, con $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$, la solución de la ecuación de Schrödinger sobre el toro. Esto es, u satisface

$$iu_t + \Delta_x u = 0, \quad u|_{t=0} = f.$$

Esta ecuación puede ser resuelta empleando transformada de Fourier; más aún, la representación de Fourier de la solución es

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle} e^{-it|\eta|^2} \widehat{f}(\eta) = Op(\sigma_t(x,\eta))(f)(x), \tag{4}$$

donde $\sigma_t(x,\eta) = e^{-it|\eta|^2}$. El Teorema 7.4 indica que u puede ser calculada como límite de funciones en términos de operadores pseudodiferenciales definidos en medidas. En efecto,

$$u(t,x) = \lim_{m\to\infty} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-it|\xi|^2} d\lambda_m(\xi), \tag{5}$$

con λ_m como en el Teorema 7.4. En este caso, la solución $u(t,x)$ está relacionada con la red de operadores pseudodiferenciales $\{Op(\sigma_t)\}_t$, como se observa en la ecuación (4). A su vez, la ecuación (5) se puede escribir así: $\lim_{m\to\infty} T_{\sigma_t}(\lambda_m)(x) = Op(\sigma_t)(f)(x)$, mostrando que, de conocer estimativos de la red de operadores $\{T_{\sigma_t}\}_t$, se obtendrían estimativos *a priori* de la la solución $u(t,x)$. Estudiar la convergencia de redes de operadores pseudodiferenciales en medidas es una tarea que debe ser explorada posteriormente.

8. Consideraciones finales

En este artículo se define un tipo de operadores pseudodiferenciales en medidas de Borel. Desde la teoría pseudodiferencial, tanto en $\mathbb{R}^n$ como en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ se logró una conexión con operadores en medidas. Se definen espacios de medidas adecuados para estudiar continuidad L^p, para lo cual se dan algunas condiciones sobre el símbolo del operador; aunque estos requerimientos son más débiles que en la teoría usual, se requiere diferenciabilidad del símbolo cuando se desea acotación en espacios de Sóbolev de medidas. La representación de tales operadores como operadores integrales con núcleo u operadores pseudodiferenciales clásicos no solo permite abordar la compacidad de los mismos, sino que involucra el análisis de Fourier en medidas. Gran parte del trabajo se ha podido desarrollar al introducir el Teorema de Radon-Nikodým, que es un teorema de representación de medidas. En trabajos futuros se espera estudiar una generalización de estos operadores a medidas definidas en espacios de Banach usando representación de medidas vectoriales (véase [6]). Otra cuestión que debe ser investigada es la convergencia de redes de tales operadores, a fin de obtener estimativos de soluciones a ecuaciones hiperbólicas periodicas.

Referencias

[1] Ashiro R., Nagase M. and Vaillancourt R., "Pseudo-differential operators in $L^p(\mathbb{R}^n)$ spaces", *Cubo* 6 (2004), no. 3, 91–129.

[2] Conway J., *A Course in Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Calderón A. and Vaillancourt R., "On the boundedness of pseudo-differential operators", *J. Math. Soc. Japan* 23 (1971), 374–378.

[4] Dieudonné J., "Recent development in the theory of linear partial differential equations", *Internat. J. Math. Math. Sci.* 3 (1980), no. 1, 1–14.

[5] Duoandikoetxea J., *Fourier Analysis, 29.* American Mathematical Society, Providence, 2000.

[6] Guzmán M., "Representación de medidas vectoriales", *Rev. Soc. Colombiana de Mat.* 44 (2010), no. 2, 129–147.

[7] Hörmander L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III,* Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[8] Hwang I., "The L^2-boundedness of pseudo-differential operators", *Trans. Amer. Math. Soc.* 302 (1987), no. 1, 55–76.

[9] Kohn J. and Nirenberg L., "An Algebra of pseudo-differential operators", *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), 269–305.

[10] Molahajloo S., "Pseudo-differential Operators on $\mathbb{Z}$", *Oper. Theory Adv. Appl.* 205 (2010), no. 1, 213–221.

[11] Restrepo G., *Teoría de la Integración,* Universidad del Valle, Colombia, 2004.

[12] Rodriguez C., "P-Estimates for Operators on $\mathbb{Z}^n$", *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* 1 (2010), no. 2, 367–375.

[13] Ruzhansky M. and Turunen V., *Pseudo-differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics,* Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications 2, Birkhäüser-Verlag, Basel, 2010.

[14] Schwartz L., *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures,* Oxford University Press, London, 1973.

[15] Stein E., *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[16] Stein E., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[17] Taylor M., *Partial differential equations III. Non linear equations,* Springer-Verlag, New York, 2011.

[18] Wong M.W., *An Introduction to pseudo-differential operators.* World Scientific Publishing, New Jersey, 1991.