Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 1, 2013, pág. 43–51

Algunos resultados de funciones semiuniversales

Jesús F. Tenorio*
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, 69000, Huajuapan de León, Oaxaca, México.

Resumen. En este artículo presentamos algunos resultados relacionados con funciones semiuniversales. Obtenemos teoremas de punto fijo para productos, conos y suspensiones sobre continuos.
Palabras claves: Cono, continuo, función semiuniversal, producto, propiedad del punto fijo, suspensión.
MSC2010: 54F15, 54C10, 54H25, 54B10.

Some results about semiuniversal mappings

Abstract. In this paper we present some results concerning semiuniversal mappings. We obtain fixed point theorems for products, cones and suspensions over continua.
Keywords: Cone, continuum, fixed point property, product, semiuniversal mapping, suspension.

1. Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo que está contenido en algún espacio topológico. En 1997, Marsh [14] definió algunas generalizaciones o variantes de lo que se conoce como función universal. Recordemos este concepto definido por Holsztyński [6] en 1964. Una función continua $f : X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y, es *universal* si para cada función continua $g : X \to Y$, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Una de las variantes de función universal definidas en [14] por Marsh es la siguiente. Se dice que la función continua $f : X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y es *semiuniversal* si para cada subcontinuo K de X tal que $f(K) = f(X)$ y para cada función continua $g : K \to X$, existe un punto $x \in K$ tal que $f(x) = f(g(x))$.

En [2] (véase también [14]) se presenta un estudio acerca de las propiedades que satisfacen las funciones semiuniversales, y esas propiedades se comparan con las de las funciones universales. Por ejemplo lo siguiente, que nos indica que ambos conceptos son independientes.

* *E-mail*: jtenorio@mixteco.utm.mx
Recibido: 30 de enero de 2013, Aceptado: 9 de abril de 2013.

(A) Existe una función semiuniversal que no es universal [2, Ejemplo 7, p. 96].

(B) Existe una función universal que no es semiuniversal [2, Ejemplo 11, p. 97].

Otra propiedad que contrasta estos conceptos es la suprayectividad, respecto a lo cual tenemos lo siguiente:

(C) Si $f : X \to Y$ es una función universal entre espacios topológicos, entonces f es suprayectiva [7, Proposición 1, p. 433].

(D) Existe una función semiuniversal que no es suprayectiva [2, Ejemplo 7, p. 96].

La propiedad del punto fijo también es un comparativo entre la universalidad y semiuniversalidad de una función. Recordemos que un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* si para cada función continua $f : X \to X$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. En tal caso se dice que p es un *punto fijo* para f. Se ha demostrado lo siguiente:

(E) Si $f : X \to Y$ es una función universal entre espacios topológicos, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo [7, Proposición 2, p. 433].

(F) Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva y semiuniversal entre espacios topológicos, entonces Y no necesariamente tiene la propiedad del punto fijo [2, Afirmación 14, p. 99].

Sin embargo, tenemos lo siguiente:

(G) Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si la función identidad $id : X \to X$ es universal [7, Proposición 3, p. 433].

(H) Si un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo, entonces la función identidad $id : X \to X$ es semiuniversal [2, Proposicón 18, p. 100], y el recíproco se cumple cuando X es un continuo [2, Observación 19, p. 100].

Si bien el análisis anterior nos muestra la independencia que puede existir entre las funciones universales y las semiuniversales, también encontramos propiedades que tienen en común estas funciones, de acuerdo con lo siguiente:

(I) Toda función continua y suprayectiva $f : Y \to [0, 1]$, donde Y es un espacio topológico conexo, es universal [7, Proposición 8, p. 434].

(J) Toda función continua $f : Y \to [0, 1]$, donde Y es cualquier espacio topológico, es semiuniversal [2, Proposición 21, p. 100].

Hacemos notar que las propiedades (I) y (J) no son exclusivas del intervalo cerrado $[0, 1]$, pues también son válidas si en lugar del intervalo $[0, 1]$ ponemos cualquier continuo X que sea encadenable ([7, Teorema 3, p. 437] y [2, Teorema 24, p. 101]). De hecho, de manera más general veremos que las propiedades (I) y (J) se cumplen para cualquier continuo X

con semimargen suprayectivo cero. Más aún, se ha demostrado que un continuo X tiene semimargen suprayectivo cero si y solo si toda función continua de un continuo Y sobre X es universal, y esto, a su vez, es equivalente a que toda función continua de un continuo Y sobre X es semiuniversal [14, Teorema 5, p. 1190] (véase también [2, Teorema 25, p. 102]). En este artículo demostramos una equivalencia más a estas últimas condiciones, a saber, que la primera proyección del producto $X \times X$ sobre X es semiuniversal (Teorema 2.6).

Por otra parte, nuestra segunda aportación en este artículo la encontramos en el Teorema 2.11, donde demostramos que si las proyecciones de un producto finito de continuos irreducibles sobre cada uno de los factores son semiuniversales, entonces el producto tiene la propiedad del punto fijo. Recomendamos al lector la lectura de [15] y [8] para conocer resultados acerca de productos de funciones universales.

Finalmente, demostramos que, bajo algunas condiciones, como la semiuniversalidad de una cierta proyección, se obtiene que el cilindro, el cono y la suspensión sobre un continuo poseen la propiedad del punto fijo. Esto lo encontramos en los Teoremas 2.18, 2.19 y 2.20 de este escrito, respectivamente. Cabe mencionar que con los Teoremas 2.18 y 2.19 extendemos, respectivamente, los Teoremas 8 y 7 demostrados por Marsh [14], puesto que omitimos una de las hipótesis que Marsh requiere en sus resultados. El Teorema 2.20 lo obtenemos de manera análoga al Teorema 2.19.

2. Los resultados

Para presentar nuestro primer teorema, comenzamos recordando las siguientes clases de continuos, definidas en 1997 por Marsh [14].

Definición 2.1. Un continuo X *pertenece a la Clase*(U) (respectivamente X *pertenece a la Clase*(SU)) si para cualquier continuo Y y cualquier función continua y suprayectiva $f : Y \to X$, se tiene que f es universal (respectivamente f es semiuniversal).

Como lo hicimos notar en (I) y (J), tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Por [7, Proposición 8, p. 434] y por [2, Proposición 21, p. 100] queda garantizado, respectivamente, que el intervalo cerrado $[0, 1]$ pertenece a la Clase(U) y a la Clase(SU).

Por otro lado, una noción muy importante de la teoría de continuos es la de semimargen suprayectivo cero de un continuo, que fue definido en 1977 por Lelek [12]. Denotamos con Δ_X la diagonal de $X \times X$, esto es $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$, π_1 y π_2, la primera y segunda proyección sobre X, respectivamente.

Definición 2.3. Un continuo X tiene *semimargen suprayectivo cero* (respectivamente, *margen cero*), si para todo subcontinuo $Z \subset X \times X$ tal que $\pi_1(Z) = X$ (respectivamente, $\pi_1(Z) = \pi_2(Z)$), se tiene que $Z \cap \Delta_X \neq \emptyset$.

Se escribe $\sigma_0^*(X) = 0$ para indicar que X tiene semimargen suprayectivo cero y $\sigma(X) = 0$ cuando X tienen margen cero.

Observación 2.4. Davis [3] demostró que si $\sigma(X) = 0$, entonces $\sigma_0^*(X) = 0$.

Ejemplo 2.5. Se sigue de [12, 1.2, p. 36] que el intervalo cerrado $[0,1]$ tiene semimargen suprayectivo cero. De manera más general, en vista de que los continuos encadenables ([16, p. 234]) tienen margen cero (hecho demostrado por Lelek [11, p. 210]), se sigue de la Observación 2.4 que cualquier continuo encadenable tiene semimargen suprayectivo cero.

Los Ejemplos 2.2 y 2.5 nos muestran que el intervalo cerrado $[0,1]$ es un continuo con semimargen suprayectivo cero, y que además pertenece tanto a la Clase(U) como a la Clase(SU). Esto no es una coincidencia, en vista de que se ha demostrado que las tres clases de continuos son equivalentes. En el siguiente teorema encontramos este resultado en el cual las equivalencias (1), (2) y (3) fueron demostradas por Marsh [14, Teorema 5, p. 1190] (véase también [2, Teorema 25, p. 102]) y la equivalencia (4) es la primera aportación en el presente artículo.

Teorema 2.6. *Sea X un continuo. Son equivalentes:*

(1) $\sigma_0^*(X) = 0$.

(2) *X está en la Clase(U).*

(3) *X está en la Clase(SU).*

(4) *La proyección $\pi_1 : X \times X \to X$ es una función semiuniversal.*

Demostración. De acuerdo con la definición de Clase(SU) tenemos, evidentemente, que (3) implica (4). Ahora probamos que (4) implica (1). Para esto, sea Z un subcontinuo de $X \times X$ tal que $\pi_1(Z) = X$. Consideremos la función continua $g : Z \to X \times X$ definida por $g(x,y) = (y,x)$, para cada $(x,y) \in Z$. Entonces, como π_1 es semiuniversal, existe un punto $(x,y) \in Z$ tal que $\pi_1(x,y) = \pi_1(g(x,y))$. Es decir, $x = \pi_1(g(x,y)) = y$. Se sigue que $Z \cap \Delta_X \neq \emptyset$. Con esto, $\sigma_0^*(X) = 0$. ☑

Observación 2.7. Se sigue del Teorema 2.6 y del Ejemplo 2.5 que todo continuo con margen cero pertenece a la Clase(SU); en particular, todo continuo encadenable, como el intervalo cerrado $[0,1]$, pertenece a la Clase(SU).

Ahora vamos a mostrar un teorema de punto fijo para un espacio producto. Como herramienta principal para demostrar este teorema usamos la semiuniversalidad de ciertas funciones y algunas propiedades de corte en espacios producto.

Dado un espacio conexo X y dados A y B subconjuntos cerrados de X, se dice que un subconjunto $F \subset X$ *separa a X entre A y B* si existen conjuntos M y N tales $X \setminus F = M \cup N$, $A \subset M$, $B \subset N$, $\overline{M} \cap N = \emptyset$ y $M \cap \overline{N} = \emptyset$. Este concepto lo podemos encontrar en [10, p. 154] (también se puede consultar en [15]).

Relacionada con la noción de *separar* se encuentra la de *cortar débilmente* en un espacio (véase [15, Lema 1, p. 1850]). Esta última definición es debida a Marsh [13].

Definición 2.8. Sea X un espacio conexo y sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos de X. Un subconjunto cerrado $F \subset X$ *corta débilmente a X entre A y B* si para cualquier subcontinuo C de X tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$, se tiene que $C \cap F \neq \emptyset$.

Para poder demostrar nuestro resultado de punto fijo en un producto nos ayudamos del teorema siguiente, que es debido a Holsztyński [8, Teorema 4.1, p. 166]. El lector puede consultar la demostración en esta referencia original, o bien en [18, Lema 3.15, p. 36]. Enunciamos explícitamente el resultado para seguir con la notación empleada en este escrito.

Teorema 2.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sean X_i un continuo con más de un punto, a_i, $b_i \in X_i$, $a_i \neq b_i$ y E_i un subconjunto cerrado y no vacío de $\prod_{i=1}^{n} X_i$. Si E_i separa a $\prod_{i=1}^{n} X_i$ entre $(\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{a_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$ y $(\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{b_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \neq \emptyset$.*

Como consecuencia del Teorema 2.9 obtenemos lo siguiente.

Teorema 2.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sean X_i un continuo con más de un punto, a_i, $b_i \in X_i$, $a_i \neq b_i$ y F_i un subconjunto cerrado y no vacío de $\prod_{i=1}^{n} X_i$. Si F_i corta débilmente a $\prod_{i=1}^{n} X_i$ entre $(\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{a_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$ y $(\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{b_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Pongamos $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, y para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i = (\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{a_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$ y $B_i = (\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{b_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$. Sean $F_1, \ldots, F_n$ subconjuntos cerrados no vacíos de X, como se indica en las hipótesis. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea U_i un subconjunto abierto de X tal que $F_i \subset U_i$ y $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$. Por [15, Lema 1, p. 1850], para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $E_i \subset U_i$ que separa a X entre A_i y B_i. Puesto que $\bigcap_{i=1}^{n} E_i = \emptyset$, tenemos una contradicción con el Teorema 2.9. Así, $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$. ☑

Previo a nuestro teorema de punto fijo, recordemos que un continuo X es *irreducible* si existen puntos $p, q \in X$, con $p \neq q$, tales que si A es un subcontinuo de X que contiene a p y q, entonces $A = X$. Escribimos $X = \mathrm{irr}(p, q)$ para decir que X es irreducible entre los puntos p y q. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, denotamos por $\pi_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_i$ la i-ésima proyección sobre el factor X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 2.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i es un continuo irreducible y cada proyección $\pi_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_i$ es semiuniversal, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Pongamos $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ y sea $f : X \to X$ una función continua. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$F_i = \{p \in X : \pi_i(p) = \pi_i(f(p))\}.$$

Es claro que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i es cerrado en X. Además, puesto que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi_i(X) = X_i$ y π_i es semiuniversal, existe $p_i \in X$ tal que $\pi_i(p_i) = \pi_i(f(p_i))$. Luego, $p_i \in F_i$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F_i \neq \emptyset$.

Por otra parte, consideremos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, puntos $a_i, b_i \in X_i$ tales que $X_i = \mathrm{irr}(a_i, b_i)$, y los conjuntos $A_i = (\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{a_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$ y $B_i = (\prod_{j=1}^{i-1} X_j) \times \{b_i\} \times (\prod_{j=i+1}^{n} X_j)$.

Veamos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ocurre que:

(**d**) F_i corta débilmente a X entre A_i y B_i.

Para probar (**d**), fijemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ y tomemos un subcontinuo $C \subset X$ tal que $C \cap A_i \neq \emptyset$ y $C \cap B_i \neq \emptyset$. Ya que $a_i, b_i \in \pi_i(C)$, entonces $\pi_i(C) = X_i$. Consideremos la función restricción $f|_C : C \to X$. Entonces, por la semiuniversalidad de π_i, existe un punto $p \in C$ tal que $\pi_i(p) = \pi_i(f(p))$. Así, $p \in C \cap F_i$. Por lo que $C \cap F_i \neq \emptyset$ y (**d**) queda probado.

Se sigue de (**d**) y del Teorema 2.10 que $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$. En consecuencia, existe un punto fijo para f. Concluimos que $\prod_{i=1}^n X_i$ tiene la propiedad del punto fijo. ☑

Las hipótesis del Teorema 2.11 están bien justificadas, como lo vemos a continuación.

Observación 2.12. Consideremos el continuo conocido como "círculo con una espiral", $X = S^1 \cup S$, donde S^1 es el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y S es la espiral dada, en coordenadas polares, por $S = \{(r, \theta) : r = 1 + \frac{1}{1+\theta} \text{ y } \theta \geq 0\}$ ([9, p. 51] o bien [17, Ejemplo 5.14, p. 59]). No es difícil verificar que $X = \mathtt{irr}(p, q)$, para $p = (2, 0) \in S$ y algún $q \in S^1$. Por otro lado, se sabe, y es fácil de probar, que X no tiene la propiedad del punto fijo ([17, Ejemplo 5.14, p. 59]). Luego, por el hecho (G) la identidad $id : X \to X$ no es universal. De donde X no pertenece a la Clase(U). Se sigue del Teorema 2.6 que la proyección $\pi_1 : X \times X \to X$ (y $\pi_2 : X \times X \to X$) no es semiuniversal.

Cabe notar, en vista del Teorema 2.11, que si consideramos las proyecciones $\pi_1 : X \times [0, 1] \to X$ y $\pi_2 : X \times [0, 1] \to [0, 1]$, para $X = S^1 \cup S$, entonces se tiene que π_1 no es semiuniversal, mientras que π_2 sí lo es.

En esta última parte del artículo demostramos otros resultados de punto fijo, ahora para el cilindro, el cono y la suspensión de un continuo. Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 2.13. Sea X un espacio topológico.

1. El *cilindro de* X es el espacio $X \times [0, 1]$.
2. El *cono sobre* X, denotado por $Cono(X)$, es el espacio cociente $(X \times [0, 1])/(X \times \{1\})$, obtenido del cilindro de X identificando $X \times \{1\}$ a un punto v_X llamado el *vértice de* $Cono(X)$.
3. La *suspensión sobre* X, denotada por $Sus(X)$, es el espacio cociente $(X \times [-1, 1])/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$, obtenido del espacio $X \times [-1, 1]$ identificando $X \times \{-1\}$ y $X \times \{1\}$ a puntos (diferentes) v_X^{-1} y v_X^1, respectivamente, llamados los *vértices de* $Sus(X)$.

Se sabe que cuando X es un continuo, se tiene que el cilindro, el cono y la suspensión sobre X son continuos. Para estos y otros hechos relacionados con espacios cociente el lector puede consultar el Capítulo III de [16].

Observación 2.14. Para un espacio X, se tiene que el subespacio $X \times [0, 1)$ del cilindro de X es homeomorfo a $Cono(X) \setminus \{v_X\}$. Por esta razón, un punto de $Cono(X)$ distinto del vértice se puede denotar por (x, t), donde $x \in X$ y $t \in [0, 1)$. Con argumentos similares, un punto en $Sus(X)$ diferente de los vértices se puede denotar por (x, t), donde $x \in X$ y $t \in (-1, 1)$.

Dado un espacio X y su cilindro $X \times [0,1]$, denotamos por $\pi_X : X \times [0,1] \to X$ la proyección al factor X. En el cono y en la suspensión sobre un espacio también podemos tener una proyección sobre X. En vista de la Observación 2.14, definimos la proyección $\pi_X : Cono(X) \setminus \{v_X\} \to X$, por $\pi_X(x,t) = x$ para cada $(x,t) \in X \times [0,1)$ y, similarmente, la proyección $\pi_X : Sus(X) \setminus \{v_X^{-1}, v_X^{1}\} \to X$, por $\pi_X(x,t) = x$, para cada $(x,t) \in X \times (-1,1)$.

Por otro lado, un concepto importante para los espacios conexos es el que se conoce como s-conexidad. Fue introducido por Marsh [13] en 1983.

Definición 2.15. Sea X un continuo y sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos de X. El continuo X es *s-conexo entre A y B* si para cualquier subconjunto cerrado $F \subset X$ que corta débilmente a X entre A y B, existe una componente K de F que corta débilmente a X entre A y B. El continuo X es *s-conexo* si para cualquier par de subcontinuos A y B de X, se tiene que X es s-conexo entre A y B.

La noción de s-conexidad ha sido utilizada, desde su aparición, como una herramienta en las demostraciones de teoremas de punto fijo. Cabe mencionar que los espacios en los que se han probado dichos teoremas han sido con estructuras diversas, como en hiperespacios, productos de continuos y conos y suspensiones sobre continuos. El lector puede consultar [13, 1, 15, 4, 5] donde se presentan estos teoremas, y donde además se podrán analizar las técnicas empleadas en sus demostraciones.

Respecto a la s-conexidad en cilindros, conos y suspensiones se ha demostrado lo que anotamos en la siguiente observación.

Observación 2.16. Dado un continuo X, se tiene lo siguiente:

(a) El cilindro $X \times [0,1]$ es s-conexo entre los conjuntos $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$, [5, Teorema 3.3].

(b) Los espacios $Cono(X)$ y $Sus(X)$ son s-conexos [5, Teorema 3.1].

La siguiente definición es debida a Marsh [14].

Definición 2.17. Decimos que una función $f : X \to Y$ es *semiuniversal con respecto a una clase* $\mathcal{H}$ de subcontinuos de X si para cada $K \in \mathcal{H}$ tal que $f(K) = f(X)$, y para cada función continua $g : K \to X$, existe un punto $p \in K$ tal que $f(p) = f(g(p))$.

Antes de presentar nuestros últimos resultados hacemos las siguientes observaciones.

El Teorema 2.18 es el Teorema 8 de [14] sin la hipótesis de que $X \times [0,1]$ es s-conexo. No hay necesidad de esta hipótesis, pues, por una parte, solo se requiere que $X \times [0,1]$ sea s-conexo entre los conjuntos $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$, y por otra, esto siempre ocurre como se indica en la Observación 2.16-(a).

El Teorema 2.19 es el Teorema 7 de [14], con la omisión en las hipótesis de que $Cono(X)$ es s-conexo. Es superfluo suponer esta condición, pues esto siempre ocurre, como vemos en la Observación 2.16-(b).

Finalmente, el Teorema 2.20 lo obtenemos de manera análoga al Teorema 2.19.

Debido a la similitud que existe entre las demostraciones de los tres resultados siguientes, omitimos dos y solamente presentamos una de ellas.

Teorema 2.18. *Sea X un continuo. Si la proyección $\pi_X : X \times [0,1] \to X$ es semiuniversal con respecto a los subcontinuos de $X \times [0,1]$ que cortan débilmente a $X \times [0,1]$ entre $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$, entonces $X \times [0,1]$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : X \times [0,1] \to X \times [0,1]$ una función continua. Sea $\pi_2 : X \times [0,1] \to [0,1]$ la proyección sobre el intervalo cerrado $[0,1]$. Consideremos el conjunto

$$H = \{z \in X \times [0,1] : \pi_2(f(z)) = \pi_2(z)\}.$$

Como π_2 es universal (véase el Ejemplo 2.2), se tiene que H no es vacío.

Además, es fácil ver que H corta débilmente a $X \times [0,1]$ entre $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$. Se sigue de la Observación 2.16-(a) que algún subcontinuo K de H corta débilmente a $X \times [0,1]$ entre $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$. Luego $\pi_X(K) = X$.

Ahora, por hipótesis, π_X es semiuniversal con respecto a K. Entonces, existe un punto $p \in K$ tal que $\pi_X(p) = \pi_X(f(p))$.

Por otra parte, como $p \in K \subset H$, se tiene que $\pi_2(p) = \pi_2(f(p))$. Se concluye que p es un punto fijo para f. ☑

Teorema 2.19. *Sea X un continuo. Si la proyección $\pi_X : Cono(X) \setminus \{v_X\} \to X$ es semiuniversal con respecto a los subcontinuos del $Cono(X)$ que cortan débilmente al $Cono(X)$ entre $X \times \{0\}$ y el vértice $\{v_X\}$, entonces el $Cono(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 2.20. *Sea X un continuo. Si la proyección $\pi_X : Sus(X) \setminus \{v_X^{-1}, v_X^1\} \to X$ es semiuniversal con respecto a los subcontinuos de la $Sus(X)$ que cortan débilmente a $Sus(X)$ entre los vértices $\{v_X^{-1}\}$ y $\{v_X^1\}$, entonces la $Sus(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

El autor agradece las observaciones y comentarios hechos por los revisores, con los cuales se mejoró la presentación de este artículo.

Referencias

[1] Bustamante J., Escobedo R. y Macías-Romero F., "A fixed point theorem for Whitney blocks", *Topology Appl.* 125 (2002), 315–321.

[2] Charatonik J.J. y Escobedo R., "On semiuniversal mappings", *Continuum Theory, Lectures Notes in Pure and Appl. Math.* 230 (2002), 95-111.

[3] Davis J.F., "The equivalence of zero span and zero semispan", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 90 (1984), 133–138.

[4] Escobedo R., López M. de J. y Macías S., "On the hyperspace suspension of a continuum", *Topology Appl.* 138 (2004), 109–124.

[5] Escobedo R., López M. de J. y Tenorio J.F., "Universality of maps on suspensions over products of span zero continua". To appear in *Houston J. Math.*, (2013), 1–10.

[6] Holsztyński W., "Une généralisation du théorème de Brouwer sur les points invariants", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 12 (1964), 603–606.

[7] Holsztyński W., "Universal mappings and fixed point theorems", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 15 (1967), 433–438.

[8] Holsztyński W., "Universality of mappings onto the products of snake-like spaces. Relation with dimension", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 16 (1968), 161–167.

[9] Illanes A., Nadler S.B. Jr., "Fundamentals and Recent Advances", *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 216*, Marcel Dekker, New York, (1999).

[10] Kuratowski K., *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, 1968.

[11] Lelek A., "Disjoint mappings and the span of spaces", *Fund. Math.* 55 (1964), 199–214.

[12] Lelek A., "On the surjective span and semispan of connected metric spaces", *Colloq. Math.* 37 (1977), 35–45.

[13] Marsh M.M., "s-Connected spaces and the fixed point property", *Topology Proc.* 8 (1983), 85–97.

[14] Marsh M.M., "Some generalizations of universal mappings", *Rocky Mountain J. Math.* 27 (1997), 1187–1198.

[15] Marsh M.M., "Products of span zero continua and the fixed point property", *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), 1849–1853.

[16] Nadler S.B. Jr., "Continuum Theory: An Introduction", *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.*, vol. 158, Marcel Dekker, New York, (1992).

[17] Nadler S.B. Jr., "The fixed point property for continua, Aportaciones Matemáticas", *Sociedad Matemática Mexicana, Textos, vol.* 30, (2005).

[18] Tenorio J.F., *Productos tipo disco y funciones inducidas a suspensiones de productos de continuos*, Thesis (Ph.D.), Benemérita Universidad Autonónoma de Puebla, México, 2007.