

Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto

GUSTAVO A. MARMOLEJO A.^{a,*}, MARÍA TERESA GONZÁLEZ A.^b

^a Universidad de Nariño, Departamento de Matemáticas y Estadística, Pasto, Colombia.

^b Universidad de Salamanca, Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, España.

Resumen. Discriminar la función que la visualización desempeña en los textos escolares es un asunto de interés en la comprensión de los fenómenos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues, como se resalta en este documento, el tipo de función privilegiado en un libro de texto determina el papel que los lectores van a desempeñar y asigna a las representaciones empleadas estatus de naturaleza distinta. En este artículo, por un lado, describimos una metodología de análisis que permite caracterizar los textos escolares según la función que desempeña la visualización en la comprensión o desarrollo de tareas de áreas de superficies planas. Por otro lado, la aplicación del método propuesto se ilustra mediante el análisis de un texto escolar de matemáticas para estudiantes de grado quinto. Se encontraron tres clases de función visual en los libros de texto: heurística, informativa e inductiva. En algunos casos, estas funciones se articulan entre ellas; en otros, solo una de ellas determina el rol desempeñado por la visualización.

Palabras claves: Función visual, libros de texto, áreas de superficies planas.

MSC2010: 97GXX, 97CXX, 97DXX

The role of visualization in the construction of area of two-dimensional figures. An analysis methodology and its application to a textbook

Abstract. Discriminating the role that visualization plays in school textbooks is a matter of interest in understanding the phenomena underlying the teaching and learning of mathematics, because, as it is outlined in this document, the type of function privileged in a textbook determines the readers role and

* Autor para correspondencia: E-mail: usalgamav@gmail.com.
Recibido: 27 de julio de 2012, Aceptado: 1º de abril de 2013.

assigns different in nature status to the employed representation. In this article we describe, on one hand, a methodology for analyzing textbooks that permits to characterize them using the role of visualization in the understanding or the development of the mathematical notion of area of plane surfaces. On the other hand, the application of the proposed method is illustrated by means of analysis of mathematics textbook designed for the fifth grade. There were three kinds of visual function found in textbooks: heuristic, informative and inductive, in some cases, these functions are interrelated, in others only one of them determines the role played by the visualization.

Keywords: Visual function, textbooks, plane surfaces area.

1. *Introducción*

Desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días los manuales escolares se han impuesto como el material didáctico de mayor uso en la planeación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas [45]. Han desempeñado un papel determinante en la articulación de las exigencias curriculares nacionales en la praxis educativa, al reflejar, al menos en parte, las intenciones de los planes de estudio presentes en los documentos oficiales [45], por lo que se convierten en una fuente para identificar el contenido cubierto [42] y la forma como se presenta en el aula escolar [7]. En pocas palabras, el libro de texto “ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados” [24, p. 389].

Esto constituye un aspecto importante que explica el marcado interés que en los últimos años ha demostrado la investigación en educación matemática, al centrar su atención en el papel que desempeñan los manuales escolares en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Como lo indica una exhaustiva revisión de la literatura especializada, estos estudios tienden a centrar su atención en cómo se presenta el contenido matemático. En este sentido, algunas investigaciones han entresacado los aspectos que deben ser considerados en el análisis de dichos materiales didácticos; es el caso de Dormolen [12], quien resalta como aspectos a considerar aquellos de naturaleza algorítmica, lógica, metodológica y comunicativa. También hay estudios centrados en cómo los libros presentan los conceptos matemáticos y su relación con su significado en contextos matemáticos y cotidianos [22]; mientras que otros se interesan por caracterizar los tipos de representación privilegiados en los manuales escolares desde perspectivas semióticas. Es el caso de Li Chen y An [27] quienes comparan los tipos de representación privilegiadas en manuales chinos, japoneses y estadounidenses para introducir la enseñanza de las fracciones, en concreto, la operación de división. En un sentido similar, Cordero, Cen y Suárez [9] estudian, desde una perspectiva semiótica y socioepistemológica, la relación funcionamiento y forma de las gráficas en los libros de texto. Como conclusión, estos investigadores establecen tres aspectos a considerar en la forma de presentar las gráficas en los manuales: métodos de uso de graficación, comprensiones de las gráficas y funcionalidad. Así mismo, señalan que la relación funcionamiento y forma de las gráficas en los libros de texto es de naturaleza dialéctica y se resignifica constantemente para dar lugar a funcionamientos y formas nuevas.

Desde un punto de vista diferente destacan las investigaciones que ponen en evidencia el

tipo de matemáticas que se moviliza en los textos escolares; así, Chevallard [6] centra su atención en los aspectos relativos a la transposición didáctica que se refleja en los libros de texto. Otros estudios analizan, desde una perspectiva histórica, la evolución de algunos conceptos matemáticos en los textos históricos o en textos escolares. Se imponen en esta tendencia los trabajos de Sierra, González y López [47, 48] y González [23]. En ellos se caracterizan las transformaciones que han sufrido los conceptos de límite y continuidad, tanto en libros históricos como en los textos escolares, siendo estos últimos los libros utilizados en España a lo largo del siglo XX. En la misma línea destaca el trabajo de Schubring [46].

Igualmente, en el campo de la educación matemática existen reportes centrados en las características físicas de los libros y la estructura de las lecciones que determinan la presentación de un contenido matemático. Por ejemplo, Alajmi [2] afirma que los textos de USA y Kuwait son, en volumen, más grandes que los japoneses, consecuencia de una gran cantidad de repeticiones de conceptos que aparecen en los textos de esos dos países; mientras que, por ejemplo, los textos japoneses no consideran las fracciones sino hasta el tercer grado, los de USA y Kuwait inician su enseñanza desde el primer grado. Además, las fracciones en los libros japoneses se encuentran articuladas con el tema de la medición.

Hay otros estudios sobre los procesos y exigencias cognitivas que subyacen a la presentación del contenido matemático, línea en la que se inscribe la presente investigación; destacan los estudios realizados por Delaney, Charlambous, Hsu y Mesa [11], Li [26], Lithner [28], Cabassut [5] y Mesa [37]. El primero, explora las potenciales demandas cognitivas (memorización, procedimientos sin conexiones y procedimientos con conexiones) y las expectativas de desempeño (respuesta única, explicación, justificación y evaluación) presentes en tareas y ejemplos propuestos en los manuales escolares. Por su parte, Li establece diferencias entre los requerimientos cognitivos (práctica procedimental, entendimiento conceptual, resolución de problemas y requerimientos especiales) que aparecen en textos escolares de diferentes países. En esta tendencia también están los trabajos de Lithner y Cabassut, en los que la preocupación recae en los razonamientos presentes en la resolución de ejercicios de cálculo y en el análisis del papel que desempeñan los argumentos de verosimilitud y de necesidad en ejemplos de prueba respectivamente. En Mesa [37] se caracterizan las concepciones del concepto de función presentes en los manuales, y en Mesa [38] se pone en evidencia que estos materiales didácticos ejercen control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática.

Sin embargo, aún son incipientes los estudios que exploren el papel que desempeña la visualización en la construcción de conocimiento matemático privilegiada en los textos escolares. Los pocos trabajos identificados hasta el momento centran su atención en la visualización asociada a representaciones o a aspectos visuales de naturaleza diferentes a los aquí tratados. Por ejemplo, Yerushalmy [51] explora el rol de las representaciones visuales en libros de texto interactivos, y considera de manera exclusiva la visualización vinculada a los gráficos cartesianos; Marmolejo y González [33], por su parte, describen los elementos y estrategias usados por los textos para ejercer control sobre las formas de ver imperantes en las figuras geométricas.

El interés de esta investigación recae en el papel que juega la visualización en la construcción de conocimiento matemático; en particular, consideraremos cómo los manuales escolares de matemáticas suscitan la enseñanza del área de figuras planas. La principal razón que explica la elección del área de superficies planas como objeto de estudio es

que las exigencias cognitivas que caracterizan su enseñanza en los primeros grados de la educación básica coinciden, en gran parte, con los elementos que, según Duval [15], deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza de la visualización vinculada a las figuras geométricas.

Pretendemos en el presente estudio utilizar elementos que nos aporten respuestas a las siguientes cuestiones: ¿Qué funciones desempeña la visualización asociada a las figuras geométricas en uno de los manuales de matemáticas de mayor uso en Colombia al construir el área de superficies planas?; ¿Qué papel asignan a sus lectores las funciones visuales privilegiadas en dicho manual?; ¿Cuál es el estatus¹ que desempeñan las figuras respecto del estudio del área de superficies planas en este manual? Así, pues, presentaremos un modelo de análisis de libros de texto que aporta importantes elementos para dar respuesta a las anteriores preguntas, en otras palabras, que permite caracterizar las tareas incluidas en los textos escolares según la función que desempeña la visualización al construir el objeto métrico de interés en este documento.

2. Visualización asociada a las figuras geométricas

La visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótica² que se considere [17]. Nuestro interés recae sobre la visualización vinculada al registro semiótico de las figuras, en particular en las representaciones figurales de naturaleza bidimensional. Adaptando la definición de visualización asumida por Duval [14], consideramos esta actividad cognitiva no solo como el reconocimiento o discriminación de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, además de aquellas que se imponen al primer golpe de vista, o como la discriminación de las modificaciones de naturaleza configural y las extrapolaciones susceptibles que se pueden aplicar sobre la figura en estudio. Además hay que tener en cuenta tres aspectos adicionales: por un lado, la variabilidad dimensional [13] y los cambios de focalización bidimensional [29] que se han de aplicar en la figura al realizar la actividad propuesta, y por otro lado, el flujo visual [35], es decir, al realizar una actividad cómo se interrelacionan o conectan los distintos cambios en la manera de ver que se aplica en la figura en cuestión.

En el estudio y enseñanza de las matemáticas la visualización desempeña distintos tipos de función, es decir, son variadas las maneras en que esta actividad cognitiva tiende a soportar o guiar el desarrollo de un problema planteado o permitir la comprensión del despliegue de un procedimiento dado. La literatura especializada considera que la visualización permite dar miradas sinópticas o realizar verificaciones subjetivas [16] o suscitar la exploración heurística de situaciones complejas [3]; puede ser asumida como un legítimo elemento de prueba matemática [10] o como una actividad cognitiva que permite extraer datos y relaciones matemáticas [44]. Así mismo, se supone que puede generar un sentimiento de autoprueba e inmediatez [21].

¹Este término alude a las diferentes maneras en que puede ser considerada una figura en la resolución de un problema o en la comprensión de un procedimiento desarrollado Duval(2003).

²“Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas... *permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos* (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) *que tienen el valor de significantes*” [15, p. 34]. Las figuras geométricas, los gráficos cartesianos, los esquemas, la escritura aritmética y algebraica, las tablas son algunas de las representaciones semióticas de mayor uso en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

En este estudio asumimos que las figuras son importantes soportes intuitivos que dotan de sentido y significado el aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia, consideramos que la principal función que desempeña la visualización vinculada a las figuras en el estudio de las matemáticas se relaciona con que estas representaciones coadyuvan en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración. Las figuras, pues, permiten que en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración se recurra a la abducción, consistente en delimitar de inicio la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse: “Así, de entrada, la figura ha de evitar la exploración de todos los caminos posibles captando la atención solo sobre aquellos susceptibles de conducir a la solución o sobre los que ya ha conducido a ella” [15, p. 153].

En dicho sentido la visualización permite ilustrar proposiciones, relaciones e ideas; suscitar preguntas a tener en cuenta en el desarrollo de una actividad matemática; ayudar a discernir entre las distintas maneras de proceder aquellas que habrán de tenerse en cuenta en el desarrollo de un procedimiento; inspirar bosquejos globales de estrategias que van más allá de lo meramente procedimental y, finalmente, ajustar nuestras ‘malas’ intuiciones para poder armonizarlas con el razonamiento.

Sin embargo, diversos estudios ponen en evidencia que hacer de estas representaciones potentes herramientas intuitivas en la resolución de problemas matemáticos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo [25, 32, 41]. Por el contrario, es necesario considerar, entre variados aspectos, que en las actividades que se proponen a los estudiantes la función que desempeña la visualización no siempre contribuye o ayuda en la comprensión y desarrollo de la actividad matemática a realizar. Es el caso de la función de ilustración, en ella “la figura aparece como una simple aprehensión sinóptica de las propiedades en juego” [39, p. 20]. Por tanto, la función de la visualización en este caso no desencadena ningún tipo de procedimiento que guíe la resolución de la problemática planteada. Por el contrario, la figura “es una presentación redundante de lo enunciado” [39, p. 20] donde cualquier manera de ver en ella es totalmente inoperante para la resolución o comprensión de la actividad propuesta.

Mesquita [39] resalta que variadas funciones pueden coexistir en ciertos tipos de actividades, más no en todas, y que para la comprensión o desarrollo de la mayoría de ellas, las figuras no son un soporte a la intuición; por el contrario, pueden constituirse en una trampa para ella, pues “suscitan la constatación de ciertas relaciones, sin permitir su justificación” [39, p. 20]; incluso puede que las relaciones discriminadas sean falsas. En el mismo sentido, es importante considerar que “en la mayoría de las actividades solicitantes de una aprehensión discursiva³, la figura no tiene un rol más que descriptivo” [39, p. 20]. Así mismo, que en el desarrollo o comprensión de una actividad matemática la función intuitiva es intrínseca a la representación figural y está asociada generalmente a su aprehensión operatoria [39, p. 20]. Al privilegiarse en la figura una forma de Aprehensión Operatoria⁴ los procesos de resolución pueden ser desplegados de forma inmediata. Ahora bien, si dichos procesos son matemáticamente correctos, la figura juega un rol intuitivo efectivo. En cambio, si no lo son, entonces la intuición suele ser peligrosa o engañosa. Todo lo anterior debería obligar a utilizar las figuras con cierto nivel de precaución.

Las figuras geométricas constituyen un registro de representación multifuncional presente en la actividad matemática a través de los distintos estatus que puede llegar a desem-

³Reconocimiento de unidades figurales y variabilidad dimensional intrafigural.

⁴Transformación heurística de las figuras.

peñar. Una figura tiene un estatus de instanciación o de representación cuando “alguna cosa aparece como una aplicación o como una ilustración de alguna cosa en general” [14, p. 66], o cuando “lo que es presentado toma el lugar de algo que no es actualmente perceptible o que es perceptivamente inexequible” [14, p. 66]. Un tercer estatus es el de objeto, en este caso, la figura “da lugar a una comparación con otra figura, sea dentro de una misma configuración, sea respecto a otra figura que sirve de referencia o de patrón para la comparación” [14, p. 63]. La figura en este caso “se representa a sí misma, y las relaciones geométricas utilizadas para su construcción pueden ser reutilizadas, parcial o totalmente es posible leer las relaciones y hacer observaciones, como sobre un objeto real” [39, p. 21].

En las actividades de Geometría pueden estar presentes los diferentes estatus; en consecuencia, según sea el caso, las operaciones y los tratamientos admisibles son diferentes [39]. La dificultad radica en que “el estatus de la figura no sea explícitamente bien interpretado; es el contexto el que permite determinarlo, de forma objetiva y, en principio, no ambigua” [39, p. 21-22]. Por otra parte, es necesario resaltar que una misma figura no puede tener diferentes estatus al mismo tiempo; teniendo en cuenta que cada uno introduce ambivalencias de naturaleza distinta, son totalmente incompatibles.

En relación al estatus de objeto, elemento de interés en el presente estudio, son tres las ambivalencias que suelen introducirse al asumir una figura de esa manera. La primera, relacionada con el proceso de comparación [14], el cual puede ser realizado a través de procesos de estimación (lo que conduce a escoger una de las tres siguientes posibilidades: más grande, más pequeño o igual) o de medida (selección de un número). En el caso de la estimación puede ser controlada o corregida por operaciones físicas de medida que implican un conteo o la lectura de un número. Pero, “esta utilización es matemáticamente no pertinente para comparar figuras entre ellas el resultado de operaciones físicas de medida no puede intervenir más que sobre la “limpieza” o la precisión de la *producción de un trazo*, jamás sobre la justificación de un resultado” [14, p. 61]. Las otras dos ambigüedades tienen que ver, por un lado, con el hecho que al recurrir a instrumentos de medida es necesario considerar que dichos procesos “no conciernen más que a las formas 1D y no a las formas 2D. Y, por otro lado, que la figura puede ser considerada como una figura concreta que se representa a sí misma o, por el contrario, una de naturaleza genérica y abstracta que representa a toda una clase de problemas asociados a ella”.

3. *Funciones visuales en los textos escolares. Una metodología de análisis*

Para el diseño del instrumento de análisis aquí tratado se consideraron 2.561 tareas presentes en 35 manuales escolares de matemáticas de seis editoriales (tres colombianas y 3 españolas). Dichas tareas forman parte de los capítulos de Geometría y Medición donde los textos escolares seleccionados suscitan, explícita o implícitamente, reflexiones sobre la magnitud área y su medida. Las unidades de información consideradas en el estudio están compuestas por las definiciones, los ejemplos y las actividades propuestas por el texto para que el estudiante las realice.

3.1. Criterios de selección:

Fueron tres los criterios considerados en el estudio al seleccionar tanto los países y las editoriales como los libros de texto y los grados asumidos en este estudio, a saber:

- Que los textos escolares fuesen usados en países hispanohablantes con condiciones geográficas y socioeconómicas diferentes.
- Que los libros de texto pertenecieran a tres de las editoriales de mayor trascendencia en los países considerados. Para la selección de las editoriales se aplicó una encuesta informal a profesores de matemáticas de educación básica que laboran en instituciones educativas de la provincia de Salamanca (Castilla y León) y del suroccidente colombiano (San Juan de Pasto y Santiago de Cali).
- Se tuvieron en cuenta aquellos grados donde las políticas educativas españolas y colombianas señalan que se debe desarrollar la enseñanza del objeto matemático en estudio. Así, fueron siete los grados seleccionados en España: 1^o de primaria a 1^o de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y ocho los considerados en Colombia: 1^o a 8^o de educación básica. Teniendo en cuenta, por un lado, que el propósito de la investigación es comparar los textos según el grado de escolaridad, y por otro que en España no hay alusión a la enseñanza del área de figuras bidimensionales en el 2^o de la ESO, y además que en los libros colombianos de grado séptimo el estudio del área de superficies planas no se realiza a través del registro semiótico de las figuras geométricas, sino por medio de los gráficos cartesianos, se optó por no analizar tanto los textos colombianos del grado equivalente al 2^o de la ESO (grado octavo), como los libros de texto españoles correspondientes al grado séptimo (1^o de la ESO). De acuerdo a lo anterior, se seleccionaron inicialmente un total de 36 manuales. Considerando que uno de los libros de texto españoles (grado primero) no trata, ni explícita, ni implícitamente el área de superficies planas, se consideraron finalmente un total de 35 manuales escolares para el desarrollo de esta investigación.

En cada uno de los libros de texto estudiados en la investigación se fotografiaron todas las páginas que conforman las secciones donde se suscita el estudio de la geometría y la medición. Se generó, pues, un archivo electrónico por cada sección registrada, según la editorial y el grado en el que aparecen. El análisis se realizó directamente de los archivos electrónicos. Las unidades de análisis consideradas en la investigación y su caracterización según las categorías de análisis establecidas en la investigación se registraron en columnas de doble entrada en una hoja de Excel.

La metodología de análisis fue inductiva, es decir, las categorías de análisis fueron extraídas directamente de los textos escolares. Su construcción consideró dos momentos: uno, discriminación de las funciones visuales presentes en los libros, y dos, prueba de la confiabilidad y validez del instrumento. En lo que sigue describimos en detalle cada uno de estos momentos.

3.2. Discriminación de las funciones que desempeña la visualización en los manuales escolares

Para dar respuesta a la pregunta “¿qué tipo de función desempeña la visualización en aquellos espacios donde los textos escolares seleccionados en la investigación propician el

estudio del área de superficies planas?” se procedió, por un lado, a seguir las indicaciones dadas en las definiciones de los libros de texto y en los procedimientos desarrollados para abordar los ejemplos propuestos en los libros, y por otro, a resolver las actividades propuestas por los manuales a los estudiantes. Tanto la discriminación de los elementos que caracterizan el tipo de visualización movilizado en el desarrollo de una tarea⁵ como la presencia de elementos que controlan la forma de ver privilegiada en ella⁶ hicieron posible identificar, en primera instancia, siete funciones visuales (sinóptica, verificativa, ilustrativa, exploratoria, descriptiva, discriminativa e informativa) en las tareas de áreas de superficies planas presentes en los libros de texto. Posteriormente se procedió a revisar cada una de las tareas de los libros, con el objetivo de discriminar la función o funciones visuales imperantes en su desarrollo o comprensión. Debido al alto número de combinaciones de funciones visuales encontradas, y con el propósito de facilitar el análisis de los datos y su interpretación, se procedió a redefinir algunas de las definiciones y, posteriormente, a fusionarlas en tres grandes grupos: heurística, informativa e inductiva. A continuación se definen cada una de las funciones identificadas en los libros de texto:

Función heurística: función que se cumple cuando la visualización, a partir de la información estrictamente perceptual de la figura, genera ideas o suscita (o posibilita) maneras de proceder que apoyan o guían la comprensión del tema que se expone o de la tarea propuesta y su desarrollo. Según el apoyo heurístico que suscita la visualización en las tareas que se presentan en los textos escolares, esta función puede darse de cuatro maneras distintas:

- a) *Instantánea:* asociada con las características perceptivas de la figura en estudio y los factores de visibilidad asociados a ella. Unos y otros permiten identificar de golpe la manera de proceder en el desarrollo o comprensión de la tarea propuesta. Es el caso de la actividad presentada en la Figura 1. En ella se solicita calcular la medida del área de una figura, pero, su forma no permite aplicar ninguna de las fórmulas que previamente han sido objeto de reflexión en el manual escolar (fórmulas de área para figuras cuadradas, rectangulares, triangulares y romboidales, entre otras). En consecuencia, es necesario, transformarla en otra figura cuya forma sí lo permita.

Determinar el área de la siguiente figura:

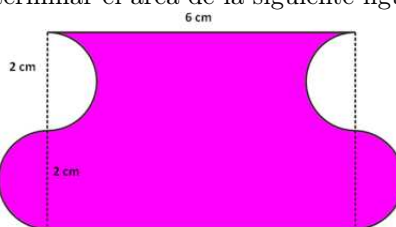


Figura 1. Problema planteado como ejercicio en casa [2, p. 226].

⁵Operaciones, cambios figurales, cambios dimensionales, cambios de focalización y flujo visual. Para mayor detalle ver Marmolejo y González [34].

⁶Despliegue de procedimientos, presentación de contenido, el uso de “figuras” que aluden a objetos o acciones físicas y elementos que mejoran la visibilidad de la forma de ver a considerar (presencia de fondo cuadrículado, concavidad o convexidad en el contorno de una figura, introducción de colores, punteado, etc.). Para mayor detalle ir a Marmolejo y González [33].

Quien resuelve esta tarea no necesita realizar exploraciones sobre la figura para determinar ni la forma de la figura de llegada, ni la naturaleza de las operaciones a aplicar; por el contrario, es a través de las características del contorno, junto con la presencia de ciertos segmentos punteados sobre la figura, como se suscita la aplicación de rotaciones sobre las partes semicirculares que destacan en ella, para su transformación en una figura rectangular con igual cantidad de área.

- b) *Exploratoria*: cuando las características perceptivas de la figura en estudio no privilegian ningún tipo de transformación que conduzca a la resolución de la problemática planteada, y es indispensable operar sobre la figura para llegar a una solución de la problemática expuesta. En la Figura 2 se muestra una tarea donde es necesario explorar perceptivamente la figura en cuestión, pero, en este caso, la figura no guía la visualización a considerar; por el contrario, quien resuelve la tarea debe realizar búsquedas o aplicar transformaciones al azar sobre ella hasta dar con la manera de ver que suscite la respuesta al cuestionamiento propuesto.

¿Qué fracción del área del rombo ocupa la zona coloreada?

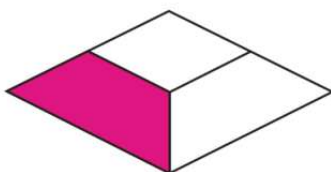


Figura 2. Problema planteado como ejercicio en casa [2, p. 227].

- c) *Verificativa*: cuando permite comprobar de manera subjetiva que los argumentos o afirmaciones que van presentándose en el desarrollo de una tarea son válidos; así mismo, cuando permite comprobar que la tarea ha quedado adecuadamente desarrollada. En la actividad abajo presentada (Figura 3) es necesario recurrir a las características perceptuales de dos figuras para comprender por qué es posible calcular el área del rombo mediante la multiplicación de las longitudes de una de sus diagonales y la mitad de la otra.

Para calcular el área de un rombo, se multiplica una diagonal por la mitad de la otra

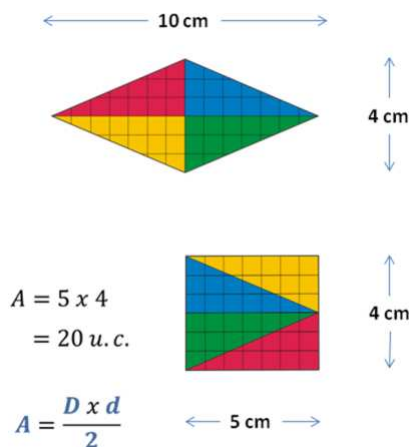


Figura 3. Ejemplo presentado para introducir la fórmula de área de un rombo [26, p. 181].

- d) *Sintética*: cuando permite ignorar, resumir o esquematizar las consignas, descripciones, explicaciones o aclaraciones en lengua natural que acompañan a la figura en estudio. En la Figura 4 se alude a la transformación de una figura en otra, pero para el lector no es necesario leer la consigna para identificar la acción aplicada

Con un rombo, hacemos un rectángulo

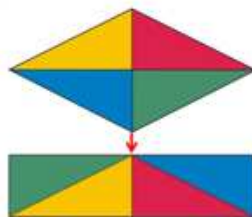


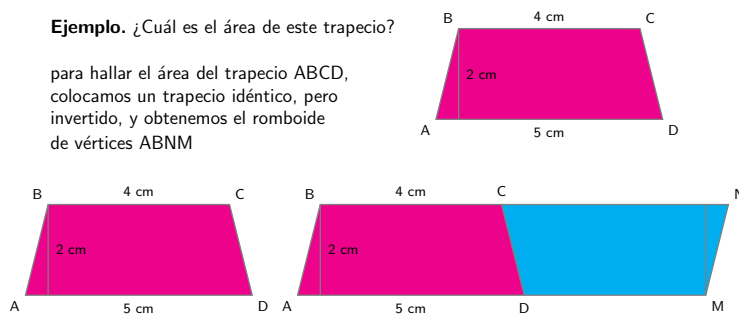
Figura 4. Problema planteado como ejemplo [24, p. 183].

Función inductiva: se da esta función cuando al manejar la figura pertinente al desarrollo de la tarea es necesario considerar información ajena a las características perceptuales de la figura de partida; en esa información, no la figura, la que dirige la forma de visualización a considerar. Esta función aparece en tareas donde el libro de texto guía visualmente al lector, sea a través del despliegue de procedimientos (Figura 5), o de la enunciación en la consigna de la acción figural a aplicar (Figura 6), o a través de la alusión a definiciones previamente tratadas. Es el caso de tareas donde se pide a calcular la medida del área de una figura o se pide verificar si una figura es simétrica, y el libro de texto ha introducido previamente la fórmula o definición a considerar. Quien resuelve la problemática planteada ha de considerar la definición presentada, pues en ella se determina la manera de ver a privilegiar.

Área del trapecio

Ejemplo. ¿Cuál es el área de este trapecio?

para hallar el área del trapecio ABCD, colocamos un trapecio idéntico, pero invertido, y obtenemos el romboide de vértices ABNM



La base del romboide es la suma de las bases del trapecio; su medida es $5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}$, y su altura es la del trapecio, 2 cm .

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Área del romboide} = \frac{1}{2} \cdot [5 + 4] \cdot 2 = 9 \text{ cm}^2$$

El **área del trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases $B + b$ por su altura h , expresadas en la misma unidad.

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

Figura 5. Ejemplo presentado para introducir la fórmula de área de un trapecio [40, p. 206].

- 5 Copia estos polígonos y busca la manera de dividirlos de forma que todas las partes que se obtengan sean paralelogramos.

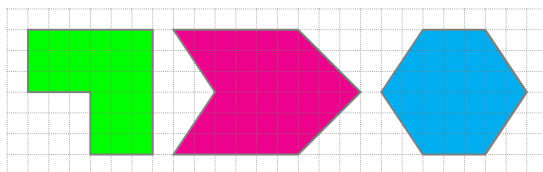
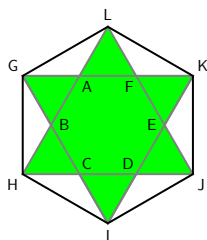


Figura 6. Problema planteado como ejercicio en casa [23, p. 181].

Igualmente, la función inductiva está presente en actividades propuestas por el texto para ser desarrolladas por el lector en las que se presenta parcialmente el proceso a considerar. Esto sucede cuando se representan las figuras de partida y de llegada descompuestas en diferentes partes, y es necesario discriminar la operación aplicada o el proceso seguido para realizar la transformación adecuada (Figuras 3 y 4). También se presenta esta función cuando se plantea una problemática donde el lector ha de seguir paso a paso indicaciones dadas por el texto para darle respuesta (Figura 7), o sencillamente cuando el proceso de resolución es inicializado por el manual (Figura 8) y el lector debe continuar el proceso.

88. El lado del hexágono regular ABCDEF mide 8 cm y su apotema 6,9 cm.



- ¿Cuál es el área del hexágono ABCDEF?
- ¿Y el áreas de la figura coloreada?
- ¿Cuál será el área del hexágono GHIJKL?
- ¿Que fracción del hexágono GHIJKL representa el área de la figura coloreada?

Figura 7. Problema planteado como ejercicio en casa [2, p. 225].

- Copia y completa para que las figuras resultantes sean simétricas respecto al eje que se señala.

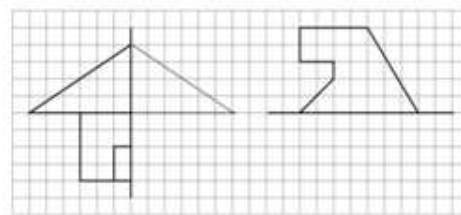


Figura 8. Problema planteado como ejercicio en casa [25, p. 167].

Función informativa: se cumple cuando la figura asume estatus de objeto [14]. De manera espontánea, se reconoce en ella información o datos adicionales y complementarios (longitudes, formas, unidades de medida, etc.) a los datos que se aportan en la consigna y que resultan relevantes para la comprensión o desarrollo de la tarea propuesta. Es el caso de las tareas presentadas en la Figura 9, donde se solicita calcular la medida del área de dos figuras mediante la aplicación de fórmulas, pero el manual no alude en la consigna ni a sus formas, ni a las medidas de uno de los lados en la primera de las figuras, ni a la base y altura en la segunda. En consecuencia, quien intenta resolver la tarea debe preceptivamente extraer estos datos de las representaciones dadas y de los índices que les acompañan.

ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS SENCILLAS

Halle el área y el perímetro de las figuras coloreadas de los siguientes ejercicios:

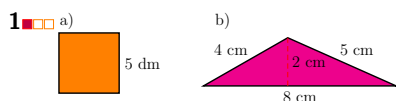


Figura 9. Problema planteado como ejercicio en casa [10, p. 250].

Copia y completa para que las figuras resultantes sean simétricas respecto al eje que se señala.

Simetría

Las figuras u objetos **simétricos** tienen dos partes que coinciden al sobreponerlos

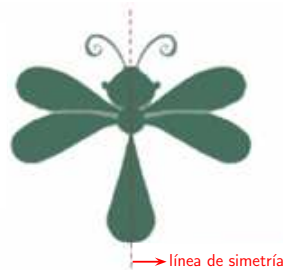


Figura 10. Ejemplo presentado para introducir la definición de simetría [47, p. 92].

Finalmente, la función informativa también está presente en tareas donde la figura de inicio representa objetos físicos relacionados con algún objeto real. De esta forma, las acciones que desempeña el objeto representado o los rasgos físicos que lo caracterizan determinan aspectos visuales a considerar. En la Figura 10, por ejemplo, se introduce la definición de simetría mediante una figura que representa una libélula. En la consigna se induce al lector a sobreponer una parte de la figura en la otra y verificar su coincidencia, pero no se detalla la forma a través de la cual es posible tal superposición. La acción que caracteriza a una libélula es la de volar, y al hacerlo cada pareja de sus alas tiende a sobreponerse sobre la otra. De esta forma, el doblar una de las partes para hacerla coincidir sobre la otra (rotación por fuera del plano) se constituye en la manera como el texto tiende a suscitar la superposición señalada.

3.3. Prueba de la confiabilidad y validez del instrumento

Una segunda parte que se tuvo en cuenta en la construcción de la metodología de análisis de manuales escolares aquí tratada se relaciona con la puesta a prueba de la confiabilidad y validez del instrumento de análisis. En primera instancia se solicitó a un grupo de tres investigadores especializados en el campo de la educación matemática, en particular, en aspectos visuales y en análisis de textos escolares, evaluar la pertinencia y coherencia de las tres categorías antes mencionadas. Cada uno de los investigadores, tras valorar el instrumento, realizó un informe detallado. A partir de dichos informes se procedió a precisar, en una primera instancia, las definiciones de cada una de las categorías y determinar las formas en que estas suelen aparecer en los manuales escolares. En un segundo momento se realizó una fase piloto de codificación. De manera arbitraria y al azar se seleccionaron 8 tareas presentes en dos capítulos de dos libros de una de las editoriales estudiadas. Se elaboró un documento con cada una de las tres funciones visuales finalmente consideradas para que otras personas pudieran utilizarlo afin de codificar las tareas de áreas. Y se diseñó una rejilla para determinar la función o funciones que juega la visualización en cada una de las tareas escogidas. Para la codificación de dichas tareas, tanto las copias digitales de los capítulos seleccionados como el resumen y la rejilla fueron entregadas a tres investigadores, que fueron informados sobre el problema de la investigación y el proceso que estaba en curso. Solo uno de ellos caracterizó y entregó en las fechas estipuladas las actividades propuestas. Tras comparar el análisis previo de los investigadores con el realizado por el evaluador, se observó que el grado de acuerdo entre

el evaluador y los diseñadores del instrumento fue del 75 % para la función heurística, del 50 % en las ocasiones donde imperaba la función informativa y del 100 % para el caso de la función inductiva. A continuación, con el propósito de identificar las debilidades del instrumento, en particular las relacionadas con las funciones heurística e informativa, se entregó a la evaluadora una tabla donde se compararon los dos análisis para cada una de las actividades y donde se presentaban, en cada caso, los argumentos utilizados por los diseñadores para asignar a cada tarea una función u otra. La evaluadora consignó en la misma tabla los argumentos seguidos por ella al caracterizar las tareas. De esta forma fue posible identificar, en el caso de la función heurística, interpretaciones inadecuadas de la evaluadora producidas por algunos de los ejemplos presentados en el documento base. En el caso de la función informativa, por su parte, se identificó que la inconsistencia y falta de precisión provenía de la forma en que se redactó su definición. Estos resultados se utilizaron para refinar las categorías y para seleccionar ejemplos más representativos; así, se procedió a buscar nuevos ejemplos que caracterizaran de manera adecuada y contundente la función heurística, y se redefinió la función informativa. Para terminar el proceso de codificación piloto, se solicitó a un nuevo evaluador codificar las mismas 8 tareas; en este caso, los resultados oscilaron en las tres funciones entre el 87,5 % y el 100 %, lo que significa que el instrumento que presentamos a continuación es consistente y válido.

4. Un ejemplo de caracterización de textos escolares

A continuación solo se exponen los resultados correspondientes a un libro de texto de matemáticas dirigido a estudiantes de grado quinto (CS5), a modo de ejemplo del análisis que se ha realizado para cada uno de los libros seleccionados. En particular se consideraron los capítulos donde explícita e implícitamente se trata el área de superficies planas (geometría y medición). La recogida, selección e interpretación de los datos consideró, por un lado, el análisis funcional propuesto por Duval [15] en relación a la actividad cognitiva vinculada a los registros semióticos, en particular lo relacionado con las figuras geométricas y la visualización asociada a ellas, y, por otra, la caracterización de las estructuras visuales presentes en las tareas propuestos en los textos escolares al construir el área de superficies planas [35].

4.4. Análisis de datos

Son cuatro las maneras en que la visualización tiende a ser considerada en la construcción del área de superficies planas en el manual aquí analizado: Inductiva (Id), Inductiva e informativa (II), Inductiva y heurística (Id.H) e Inductiva, informativa y heurística (II.H). Para dar respuesta a las interrogantes planteados en esta investigación se han reorganizado los elementos que conforman la metodología de análisis en tres nuevas categorías: la primera, relacionada con el número de funciones visuales presentes en el desarrollo o comprensión de una tarea; la segunda, alude al hecho de que la visualización a privilegiar tiende a ser guiada, bien por el texto o bien por el lector; y la tercera determina el estatus de la figura privilegiado en los textos. En lo que sigue describimos cada una de ellas:

- a) El número de funciones que desempeña la visualización en la comprensión o desarrollo de las tareas expuestas en los manuales. Hablaremos, pues, de función simple, cuando únicamente un tipo de función (sea heurística, inductiva o informativa) está

presente; y de función compuesta, en el momento en que aparecen simultáneamente dos o tres funciones.

- b) La función simple Id y la compuesta II se caracterizan porque la visualización tiende a ser guiada por el propio texto. No es necesario que el lector, al intentar comprender o desarrollar una tarea, deba introducir por sí mismo, por decisión propia, visualización alguna. Por el contrario, le basta seguir el despliegue de procedimientos o las indicaciones dadas en la consigna de la tarea, o recurrir a las características de objetos físicos que aluden las figuras en estudio, para ver de forma adecuada. En este caso decimos que el papel del lector es de naturaleza inactiva. En un sentido totalmente distinto, las tareas donde la función heurística está presente, sean de naturaleza simple o compuesta, promueven que de alguna manera el lector desempeñe un papel activo en la manera de ver considerada (explorar una figura, actuar ipso facto en ella a partir de sus características perceptivas, verificar una afirmación o centrar la atención en una cadena de figuras, ignorando su descripción en lengua natural). En este caso, diremos que el papel del lector es de naturaleza activa. En algunas de estas tareas, si bien el texto introduce elementos que intentan dirigir la manera de ver del lector (tareas donde la función es de naturaleza compuesta), estos no son suficientes para determinar la visualización pertinente a la tarea propuesta. En ambos casos es necesario que quien intente comprender o desarrollar la problemática planteada deba, en algún momento de la estructura visual movilizadas, tomar decisiones de naturaleza visual por sí mismo e introducir sobre la figura en cuestión operaciones, cambios figurales, cambios dimensionales, cambios de focalización o flujos que no han sido determinados por el libro.
- c) La presencia de la función informativa se constituye en un importante aspecto a considerar en el papel que desempeña la visualización en los textos escolares, pues para discriminar datos que no han sido presentados en la consigna de la tarea y cuyo desarrollo o comprensión se exige considerar, quien intente resolver o comprender la problemática planteada en tareas que ponen en evidencia este tipo de función debe recurrir directamente a la figura, a sus características perceptivas, o a elementos que la acompañan (trazos, números...). Así, quien mira la figura debe introducir en ella medidas, discriminar la forma de la figura o determinar propiedades geométricas a partir de sus características perceptivas, o considerar la forma de la figura para aplicar fórmulas determinadas. En palabras de Duval [14], la figura presenta un estatus de objeto. Proceder de esta manera es una característica no propia de las figuras geométricas, pues, en el desarrollo de un problema geométrico los elementos matemáticos que caracterizan una figura deben ser introducidos discursivamente [15], sea a través de las condiciones dadas en la consigna de la tarea, sea a partir de expansiones discursivas realizadas dentro de un marco teórico previamente establecido. En este sentido, la confrontación entre las tareas donde la visualización desempeña una función informativa y aquellas donde la función es de naturaleza diferente, es un aspecto a considerar en esta investigación.

4.5. Descripción de resultados

Se analizaron 61 tareas a través de las cuales el texto en estudio construye el área de superficies planas (Tabla 1). En ellas se identificaron cuatro maneras en que la visualización

tiende a ser considerada. Solo aparece una función de forma simple (Id). Las funciones de mayor presencia en este texto son las de naturaleza compuesta, destacando la composición de las funciones inductiva, informativa y heurística (IIH) y la composición inductiva e informativa (II), presentes en 29/61 y 20/61 de las tareas analizadas. La función simple se produce en aquellas tareas en las que la visualización aparece de forma inductiva, y se encuentra presente en 7/61. Por último, está la función compuesta inductiva e heurística (IdH) presente en 5/61 de las tareas.

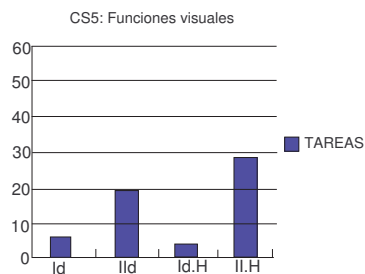


Tabla 1: funciones visuales presentes en CS5 según el número de tareas expuestas en el manual.

En relación con el papel que el texto asigna al lector a partir de la función o funciones visuales que suscita en el desarrollo o comprensión de las tareas expuestas, el libro tiende a privilegiar en mayor medida un rol activo. Esto se ve reflejado en la frecuencia de las tareas que propician composición de funciones donde la función heurística junto a la informativa o inductiva está presente, es decir, en las funciones de naturaleza IIIH o IdH que representan 34/61 del número total de tareas, más de la mitad de las tareas presentadas. Por otra parte, el porcentaje de tareas que introduce funciones de naturaleza Id o II, es decir, que suscitan un rol inactivo en el lector es menor: 27 de las 61 tareas tienen tal característica (observar Tabla 2).

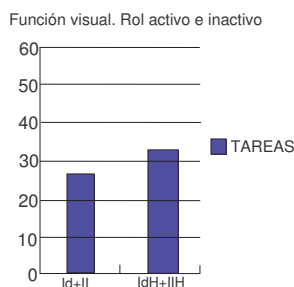


Tabla 2: rol de la función visual en el texto escolar al construir el área.

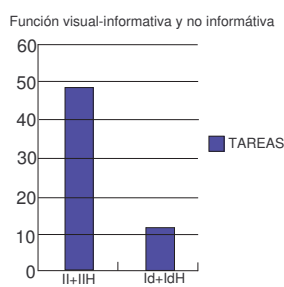


Tabla 3: función informativa en el manual escolar al construir el área.

Respecto al número de tareas en que en el manual se permite que las figuras tengan un estatus de objeto, y que son aquellas que cumplen una función informativa, aparecen de dos maneras diferentes: 1) junto a la función inductiva, y 2) compuesta con la función

inductiva e heurística (Tabla 3). Esta función está presente en la mayor parte de las tareas (49/61).

En resumen, los datos anteriormente presentados permiten caracterizar el libro de texto analizado por tres aspectos que se privilegian en las tareas propuestas:

- Predomina las funciones visuales compuestas, de naturaleza simple, es decir, este es un libro de función visual compuesta.
- Que el lector debe asumir un rol activo, puesto que las tareas de este tipo están mayormente presentes (34/61) frente a aquellas que, por el contrario, asignan al lector un rol inactivo.
- Las figuras en estudio funcionan como un objeto, en el cual discriminar sus formas o medir sobre ellas son acciones determinantes en el desarrollo de las tareas propuestas, y en consecuencia, de las visualizaciones asociadas.

5. Conclusiones

La visualización en matemáticas es un asunto que está lejos de ser obvio y espontáneo, tanto para estudiantes como para algunos educadores [4, 30, 31]. Diferentes investigaciones han puesto en evidencia que la calidad de la visualización es susceptible de mejoría [36, 43], y que por sus características epistemológicas esta actividad cognitiva se impone en relación a otras (p.e., el razonamiento y la construcción) como la más propicia para iniciar el estudio de la geometría en la escuela [16]. De esta manera se ha llamado la atención a considerar esta actividad como un objeto de explícito estudio en los currículos escolares [43, 49].

Según Marmolejo y Vega [36] el área de superficies planas desempeña una doble particularidad en relación a la visualización: por un lado, es un objeto matemático donde la visualización desempeña un papel determinante para su comprensión; por otro, su reflexión a través de este tópico tiende a ser propicia, consistente y pertinente. Los textos escolares, por su parte, al ser uno de los materiales didácticos de mayor uso en la escuela, se constituyen en elementos a considerar en torno a las posibilidades que desempeña la visualización en el área de superficies planas. Así pues, la discriminación de la función asignada a esta actividad en los manuales escolares es un asunto a considerar.

En este sentido, el modelo metodológico presentado aquí y aplicado a las tareas expuestas en un manual de matemáticas de grado quinto se considera potente para discriminar no solo los tipos de funciones que privilegian los manuales, sino también para determinar el rol visual que asigna el texto a sus lectores y el estatus de las figuras consideradas, aspectos de especial importancia en la comprensión del papel que desempeñan los manuales escolares en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Elementos de vital importancia para los diseñadores de libros de texto, pues considerando el papel que desempeñan las figuras como soportes intuitivos en la construcción de conocimiento geométrico y la complejidad que suscita su movilización [15], es determinante privilegiar en los primeros años de la enseñanza de la geometría actividades que hagan de ellas verdaderos objetos de explícita reflexión. Así, las tareas de los manuales escolares que permiten que la visualización desempeñe una función de naturaleza heurística, tienden a generar espacios

donde los estudiantes pueden aprender a tratar las figuras y a reconocer el papel que desempeñan en el desarrollo de tareas matemáticas. En este sentido, una mayor proporción de este tipo de tareas, en relación a aquellas cuya visualización tiende a privilegiar exclusivamente una función informativa o inductiva, es un elemento a considerar en la enseñanza de la visualización. En consecuencia, la metodología de análisis propuesta en este artículo permite a los autores de textos de matemáticas controlar el número de tareas que proponen, y de esta forma suscitar que sus lectores desarrollen habilidades visuales al construir conocimiento matemático, en este caso el área de superficies planas.

Por otro lado los maestros disponen, mediante este instrumento de análisis, de una herramienta potente para seleccionar y graduar las actividades que proponen a los alumnos para el aprendizaje del concepto de área. Este modelo les permite analizar previamente cada una de las actividades para ser conscientes de las exigencias que cada una atribuye intrínsecamente al alumno. No sólo eso: les permite además discriminar el papel que supuestamente debe desempeñar el sujeto a la hora de resolver cada una de las actividades propuestas. Además, si los libros de texto no ofrecen actividades de un determinado tipo, será obligación del maestro la búsqueda de actividades adecuadas que cubran este vacío.

Esta misma metodología podrá ser utilizada como método de investigación en relación con otros tópicos matemáticos en los que intervengan figuras geométricas, tanto en la educación primaria como en la secundaria, lo que permitirá tener una visión más completa de las funciones visuales que deben poner en práctica los alumnos a lo largo de su instrucción.

Referencias

- [1] Alvarez M.D., *Matemáticas 1. ESO. Proyecto La casa del saber*, Mateu Cromo S.A, Madrid, 2007.
- [2] Alajmi A.H., "How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait", *Educational Studies in Mathematics*, 79 (2012), no. 2, 239–261.
- [3] Arcavi A., "The role of visual representations in the learning of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 52 (2003), no. 3, 215–241.
- [4] Bishop A., "Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización", *Antología en educación matemática*, (Eds. Núñez, R. C., Sánchez, E. A. y Badillo, G. Z.), SME Cinvestav, 1992.
- [5] Cabassut R., "Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks", *Proceedings of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*, (Eds. Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N.), Atelier, 2006.
- [6] Chevallard Y., *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.
- [7] Cobo B. y Batanero C., "Significado de la medida en los libros de texto de secundaria", *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2004), no. 1, 5–18.

- [8] Colera J. y Gaztelu I., *Matemáticas 1. Educación secundaria*, Altair Quebecor, Toledo, 2008.
- [9] Cordero F., Cen C. y Suárez L., “Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato”, *Relime*, 13 (2010), no. 2, 187–214.
- [10] Davis P., “Visual Theorems”, *Educational Studies in Mathematics*, 24 (1993), no. 4, 333–344.
- [11] Delaney S., Charlabous Y., Hsu H. & Mesa V., “The treatment of addition and subtraction of fractions in Cypriot, Irish, and Taiwanese textbooks”, *Proceeding of the 31 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*, (Eds. Woo, J.H, Lew, H.C, Park, K.S. & Seo, D.Y.), The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 2007.
- [12] Dormolen V., “Textual Análisis”, *Perspectives on Mathematics Education*, (Eds. Christiansen B., Howson A.G. and Otte M.), Kluwers Academic Publishers, Dordrecht, 1986.
- [13] Duval R., *Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y . . . una quinta*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, 2004.
- [14] Duval R., “Voir en mathématiques”, *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, (Eds. Filloy E.), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, 2003.
- [15] Duval R., *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*, Artes Gráficas, Cali, 1999.
- [16] Duval R., “Geometry from a cognitive point of view”, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, (Eds. Mammana C. and Villani V.), Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [17] Duval R., “Graphiques et équations: l’articulation de deux registres”, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1 (1988), 235–253.
- [18] Ferrero L.F., Gaztelu I., Martín P. y Martínez L., *Matemáticas 3. Primaria. Segundo ciclo. Proyecto Abre la puerta*, Mateu Cromo S.A., Madrid, 2008.
- [19] Ferrero L.F., Gaztelu I., Martín P. y Martínez L., *Matemáticas 4. Primaria. Segundo ciclo. Proyecto Abre la puerta*, Mateu Cromo S.A., Madrid, 2008.
- [20] Ferrero L.F., Gaztelu I. y Martín P., *Matemáticas 5. Primaria. Tercer ciclo. Proyecto Abre la puerta*, Mateu Cromo S.A., Madrid, 2008.
- [21] Fischbein E., *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1987.
- [22] García A. and García J.A., “Statistical inference in textbooks: mathematical and everyday contexts”, *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*, (Eds. Woo J.H, Lew H.C, Park K.S. and Seo D.Y.), The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 2007.
- [23] González M.T., *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*, Tesis doctoral inédita, Universidad de Salamanca, Salamanca, 2002.
- [24] González M.T. y Sierra M., “Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX”, *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2004), no. 3, 389–408.

- [25] Lémonidis C., “Analyse et réalisation d’une expérience d’enseignement de homothétie”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (1991), no. 2-3, 295–324.
- [26] Li Y., “A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2000), no. 2, 234–241.
- [27] Li Y., Chen X. and An S. “Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in select Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division”, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 41 (2009), no. 6, 809–826.
- [28] Lithner J., “Mathematical reasoning in calculus textbook exercises”, *Journal of Mathematical Behavior* 23 (2004), no. 4, 405–427.
- [29] Marmolejo G., “Elementos a considerar en la enseñanza del registro semiótico de las figuras en los primeros ciclos de la educación básica”, X Encuentro de Matemáticas Aplicadas y VII Encuentro de Estadística, San José de Cúcuta, 2012.
- [30] Marmolejo G., “La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad”, *Revista Sigma*, 10 (2010), no. 2, 10–26.
- [31] Marmolejo G., *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad*, Tesis de magister no publicada, Universidad del Valle, Cali, 2007.
- [32] Marmolejo G., “Análisis del tópico de geometría y medición”, *Pruebas censales y formación de pensamiento matemático en la escuela*, (Ed. Torres L.), El Bando Creativo, Cali, 2005.
- [33] Marmolejo G. y González M.T., “El Control Visual para la construcción del concepto de área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis”, Sometido.
- [34] Marmolejo G. y González M.T., “Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares”, Sometido.
- [35] Marmolejo G. y González M.T., *La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto*, ASOCOLME 12, Armenia, 2011.
- [36] Marmolejo G. y Vega M., “La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje”, *Educación Matemática*, 24 (2012), no. 3, 9–34.
- [37] Mesa V., “Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus”, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 7 (2010), no. 16, 235–265.
- [38] Mesa V., “Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: an empirical approach”, *Educational Studies in Mathematics*, 56 (2004), no. 2-4, 255–286.
- [39] Mesquita A., *L’Influence d’aspects figuratifs dans l’argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*, Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg, 1989.
- [40] Ortiz M.C., *Fórmula 2*, Editorial Voluntad S.A., Bogotá, 2008.
- [41] Padilla V., *L’influence d’une acquisition de traitements purement figuraux pour l’apprentissage des Mathématiques*. Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg, 1992.

- [42] Pepin B., Haggarty L. and Keynes M., "Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33 (2001), no. 5, 158–175.
- [43] Presmeg N., "Research on visualization in learning and teaching mathematics", *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (Eds. Gutierrez A. and Boero P.), Sense Publishers, 2006.
- [44] Richard P., "L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique", *Educational Studies in Mathematics*, 57 (2004), no. 2, 229–263.
- [45] Schmidt W.H., Jorde D., Cogan L.S., Barrier E., Gonzalo I., Moser U., Shimizu Y., Sawada T., Valverde G., Mc Knight C., Prawat R., Wiley D.E., Raizen S., Britton E.D. and Wolfe R.G., *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*, Kluwers Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [46] Schubring G., "On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author", *For the learning of mathematics*, 7 (1987), no. 3, 41–51.
- [47] Sierra M., González M.T. y López C., "El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX", *Educación Matemática*, 15 (2003), no. 1, 21–49.
- [48] Sierra M., González M.T. y López C., "Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, 1940-1995", *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (1999), no. 3, 463–476.
- [49] Villani V., "Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study)", *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, (Eds. Mammana C. and Villani V.), Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [50] Vizmanos J., Anzola M., Bargueño J. y Peralta J. Ábaco, *Matemáticas 1 ESO.*, Gráficas Monterreina S.A., Madrid, 2007.
- [51] Yerushalmy M., "Function of Interactive Visual Representations in Interactive Mathematical Textbooks", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10 (2005), no. 3, 217–249.