Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 2, 2013, pág. 181–205

Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas

Jorge Fiallo[a*], Leonor Camargo[b], Ángel Gutiérrez[c]

[a] Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

[b] Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

[c] Universidad de Valencia, Departamento de didáctica de la Matemática, Valencia, España.

Resumen. En el presente documento realizamos una recopilación bibliográfica de las principales investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, con el ánimo de aportar fuentes de consulta a la comunidad de educadores en matemáticas interesados en el tema. Planteamos una estructura organizativa que incluye las siguientes líneas de investigación: Consideraciones histórico-epistemológicas, La demostración en el currículo, Concepciones y dificultades de los estudiantes al demostrar, Relaciones entre argumentación y demostración y Propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración.
Palabras claves: Síntesis de publicaciones, demostración matemática, aprendizaje de la demostración, educación matemática.
MSC2010: 97GXX, 97CXX, 97DXX.

About teaching and learning of the proof in mathematics

Abstract. In this paper we present a synthesis of main research publications on the teaching and learning of proof. Our aim is to provide a reference to the mathematics educators interested in this topic. The paper is organized based on the following research topics: Historic-epistemological issues, Proof in curriculum, Students' conceptions and difficulties, Relationship among argumentation and proof, Teaching units to teach proof.
Keywords: Synthesis of publications, mathematical proof, learning of proof, mathematics education.

* Autor para correspondencia: *E-mail*: jfiallo@uis.edu.co
Recibido: 02 de febrero de 2013, Aceptado: 20 de septiembre de 2013.

Introducción

En las tres últimas décadas el tema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas en los niveles de primaria, secundaria y universitaria se ha puesto en consideración por parte de los investigadores en educación matemática, principalmente por los múltiples cuestionamientos que se han hecho en torno a su enseñanza y su aprendizaje. Evidencia de ello son la revista *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (http://www.lettredelapreuve.it/), los resultados de la Conferencia del 19^o ICMI Study [49] y las numerosas publicaciones en otros libros y revistas, parte de las cuales describimos en este documento. La enseñanza y el aprendizaje de la demostración son también importantes para los profesores de los diferentes niveles educativos, sobre todo de educación secundaria y de universidad. Un ejemplo destacado son las dos ediciones de los *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* [81, 82], publicaciones de transcendencia mundial, en donde se incluye el razonamiento y la demostración como uno de los cinco estándares de procesos que los estudiantes deberían conocer y ser capaces de usar con más perfección y complejidad a medida que progresan en su escolarización. En la más reciente de dichas publicaciones se sugiere que los programas de enseñanza en todos los niveles desde educación infantil hasta educación secundaria deberían capacitar a los estudiantes para:

- "reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas;
- formular e investigar conjeturas matemáticas;
- desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones;
- elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración" [83, p. 59].

La mayoría de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han realizado en el dominio de la geometría euclidiana, varias de ellas apoyadas en el uso de programas informáticos de geometría dinámica [3, 8, 9, 18, 27, 31, 45, 59, 62, 67, 79, 78, 91, 103]. Otras investigaciones están enmarcadas en el dominio de la teoría de números [2, 28, 41, 52, 102], el álgebra [11, 58, 89] o el razonamiento probabilístico [23]. En años recientes han surgido corrientes acerca de las concepciones de los profesores sobre la demostración y sus competencias en el proceso de demostrar [97, 98, 102, 104] y sobre el aprendizaje de la demostración visto como una práctica sociocultural que se lleva a cabo y se condiciona por la comunidad en la que se inscribe [27, 29, 60].

Los estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han desarrollado desde perspectivas diferentes, que incluyen aspectos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, curriculares y didácticos, lo que da lugar a diferentes clasificaciones o estructuras organizativas para la presentación de las principales corrientes investigativas en el campo. En el presente documento ofrecemos una revisión de importantes publicaciones que dan cuenta de investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática. La revisión está organizada en cinco líneas de trabajo, derivadas de las caracterizaciones realizadas por Mariotti [76], Harel y Sowder [56] y Boero [24]. Mariotti [76], desde una postura epistemológica de la demostración, que le atribuye responsabilidades en la validación y la comprensión de ideas matemáticas, hace una recopilación de estudios presentados durante 30 años en los congresos del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), organizándolos según que traten aspectos curriculares, cognitivos o de enseñanza. Mariotti apunta que, debajo de cualquiera de estos aspectos educativos, está presente la tensión entre diferentes concepciones de la demostración, que tienen su paralelismo histórico si se comparan las posturas basadas en los *Elementos* de Euclides y las basadas en la nueva concepción sobre la verdad matemática que surgió a partir del final del siglo XIX. También señala que un aspecto común a ambas concepciones es el reconocimiento de la relación entre comprensión y aceptabilidad de las afirmaciones matemáticas.

Por su parte, Harel y Sowder [56] se enfocan en asuntos cognitivos referidos a los esquemas de demostración[1]. Estos autores definen un *esquema de demostración* de una persona o una comunidad como lo que le permite asegurarse (eliminar sus propias dudas sobre la veracidad de una afirmación matemática) y persuadir (eliminar las dudas de otros sobre esa afirmación). En [55] Harel y Sowder presentan los resultados de diversos experimentos de los que extraen un conjunto de categorías de demostraciones empíricas y deductivas, que detallamos un poco más en otra sección de este artículo. Harel y Sowder en [56] revisan una variedad de factores que influyen en el aprendizaje de la demostración, organizados desde los puntos de vista matemático e histórico-epistemológico, cognitivo y educativo y socio-cultural.

En la introducción a Boero [24], el editor plantea la necesidad de desarrollar nuevas formas de enseñanza de la demostración en los niveles preuniversitarios que se adapten a las condiciones actuales de los centros de enseñanza, de los profesores y de los estudiantes. Para analizar esta problemática, el libro se centra en aspectos histórico-epistemológicos, cognitivos y didácticos de la demostración, vista como producto.

Un aspecto interesante en la definición de esquema de demostración es la consideración explícita de una comunidad como unidad de elaboración de demostraciones, ya que para ello es necesario que los individuos que la integran se pongan de acuerdo en aspectos cruciales como qué es demostrar, cómo se demuestra una afirmación matemática o qué características debe poseer un argumento para ser reconocido como una demostración válida. En la actualidad existe consenso generalizado en reconocer que las matemáticas son una producción social realizada por un grupo de expertos (los matemáticos profesionales) que se ponen de acuerdo sobre ciertas normas. Además, investigadores en educación matemática llevan estas ideas al mundo de la enseñanza y proponen considerar los grupos de estudiantes de un aula como una comunidad que puede adoptar sus propios acuerdos para construir su concepción de demostración matemática. Un ejemplo de ello lo tenemos en [27]. Desde este punto de vista, con el que coincidimos, la actividad de producir una demostración es una práctica social cuyas características dependen del ámbito institucional en donde se lleva a cabo.

La recopilación de investigaciones que presentamos en este documento intenta ser más abarcadora que cada una de las tres mencionadas antes, y profundizar en líneas que se mencionan tangencialmente en los estudios de referencia. Cabe aclarar que la división del texto en estas cinco secciones no genera grupos disjuntos, pues las líneas de investigación se articulan estrechamente.

[1] Algunos investigadores usan el término “esquemas de prueba” como traducción de “*proof schemes*”, pero de acuerdo a la definición de demostración de Harel y Sowder, decidimos usar el término “esquemas de demostración”.

Investigaciones en la línea histórico-epistemológica

Las investigaciones en la línea histórico-epistemológica se centran en indagar por la naturaleza de la demostración y su estatus en el conocimiento matemático. Buscan crear conciencia de que la demostración ha sido vista bajo diferentes perspectivas por los matemáticos en las escuelas de pensamiento de las comunidades académicas en diferentes culturas y épocas históricas [24, 44] y también responder a interrogantes como ¿qué es la demostración y cuáles son sus funciones? [31], ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en las comunidades de matemáticos? [80], ¿cuáles son algunas de las fases críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas? [56].

La línea de investigación se sustenta con planteamientos como los de Balacheff en [15], quien propone que las diferentes concepciones sobre la demostración matemática deben ser explicadas y relacionadas para lograr una comprensión global acerca de la naturaleza de la demostración, una coherencia en el discurso acerca de esta y significados compartidos entre investigadores en educación matemática. La forma en que se responde a preguntas sobre la naturaleza de la demostración, el estatus en la actividad matemática y sus relaciones con los contenidos matemáticos y los contextos de uso determinan la visión de lo que es una demostración matemática desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje.

Como un aporte a la distinción acerca del estatus otorgado a la demostración por diversos investigadores, Balacheff en [15] distingue cinco posiciones diferentes:

- *La demostración matemática es un tipo universal y paradigmático de validación del conocimiento.* En ese sentido, la demostración matemática podría ser vista, debido a sus relaciones privilegiadas con la lógica, como una referencia para procesos de validación en otros ámbitos y como el mejor ejemplo de racionalidad. Esto parece haber sido sistematizado de manera bastante radical por los educadores matemáticos estadounidenses de la primera parte del siglo pasado, dando lugar a un formato de representación a dos columnas, a favor de un enfoque analítico que facilita la evaluación de la demostración por el estudiante y el profesor [15].
- *La demostración matemática tiene una naturaleza idiosincrásica y particular, ligada al contenido matemático.* El esquema de demostración de una persona es algo completamente subjetivo, que puede variar de una persona a otra, de una cultura a otra y de una generación a otra. Así, los esquemas de demostración son idiosincrásicos y varían de un campo a otro, incluso dentro de las matemáticas [55]. Esta visión de la demostración ha sido utilizada o adaptada por algunos investigadores para proponer modelos para el estudio de la demostración en la educación matemática [3, 37, 38, 65, 78, 95, 96].
- *La demostración es una práctica matemática por excelencia ubicada en el corazón de la matemática misma.* La demostración es connatural al pensamiento matemático y el razonamiento deductivo, que sustenta el proceso de validar y diferencia las matemáticas de las ciencias empíricas. El proceso de construcción de una demostración es claramente complejo y riguroso: se trata de partir de lo que se sabe, las propiedades matemáticas que ya se conocen o se pueden asumir, identificar lo que se va a deducir y organizar un conjunto de transformaciones necesarias para

inferir lo segundo a partir del conjunto inicial de propiedades, usando esquemas de razonamiento lógico [55]. Esta visión ha sido compartida y complementada por investigadores ingleses [64, 70, 100].

- *La demostración es una herramienta necesaria para las matemáticas, cuya utilidad se percibe en sus aplicaciones*. La demostración adquiere significado en el juego dialéctico entre formular una demostración y comunicar su significado [50]. Esta dialéctica debería explotarse en la enseñanza combinando procesos sociales de verificación con la elaboración de demostraciones en el marco de sistemas teóricos. En ese sentido, la contribución más importante de la demostración a la educación matemática es la comunicación de la comprensión matemática. Un currículo de matemáticas que tiene como objetivo reflejar el verdadero papel de la demostración rigurosa de las matemáticas debe presentarla como una herramienta indispensable de las matemáticas, y no en la esencia misma de la ciencia [50].
- *La demostración es un campo autónomo específico de las matemáticas*. Un teorema[2] sólo es aceptable porque es sistematizado en una teoría, con una total autonomía de cualquier verificación o argumentación a nivel empírico [74]. Esta posición se basa claramente en el reconocimiento de un característica específica de las matemáticas: la organización teórica de acuerdo a axiomas, definiciones y teoremas [15].

Con el ánimo de dilucidar la naturaleza de la demostración matemática, y con un planteamiento de base filosófica, Arsac en [4, 5] analiza diferentes hipótesis elaboradas por los historiadores acerca del origen de la demostración en las matemáticas griegas. En particular, tiene en cuenta presupuestos referidos a las necesidades internas del desarrollo de las matemáticas o los referidos a influencias externas del desarrollo de la sociedad y la cultura griega (en particular, la filosofía griega). Afirma que cualquier investigación educativa sobre la demostración debe remitirse a la historia de la misma, como sucede con cualquier concepto matemático, incluso si la demostración no es precisamente un concepto sino un proceso o una técnica. Atendiendo a esta recomendación, en [53] se menciona que la estructura psicológica de los esquemas de demostración [55] fue revisada y replanteada con un enfoque basado casi exclusivamente en consideraciones históricas y filosóficas. Los esquemas de demostración son un ejemplo de cómo se pueden explotar la historia y la epistemología de las matemáticas para desarrollar herramientas que son útiles en la investigación educativa, a fin de analizar actuaciones de los estudiantes en el ámbito de la demostración.

Por su parte, De Villiers en [31] propone como funciones de la demostración la verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. El análisis se efectúa con base en consideraciones epistemológicas y en el testimonio personal de matemáticos activos. Plantea que la convicción de un hecho no se consigue exclusivamente con una demostración, ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción; esta función no tiene sentido para los estudiantes en los casos evidentes o fácilmente verificables, mientras que la función de explicación es más significativa. Según el autor, en el ámbito educativo debe ponerse más atención a las funciones de descubrimiento y comunicación. La función de sistematización debe dejarse para niveles más avanzados y debería ser omitida en un curso introductorio de la demostración.

[2] "Unidad compuesta de un enunciado matemático, una demostración y una teoría matemática, donde la forma condicional del enunciado desempeña un papel principal" [77].

Arzarello en [6] examina el significado de la demostración comparando las contribuciones de diferentes corrientes filosóficas acerca de la naturaleza del conocimiento matemático, aunque señala que saber lo que es una demostración no es suficiente para abordar el problema didáctico de su aprendizaje en la clase. En su trabajo, Arzarello aborda la dicotomía formal-informal en matemáticas y define la noción de *consecuencia lógica* como el núcleo del significado de la demostración en matemáticas. El autor critica las posiciones cuasi-empiristas, que reconocen cada vez más las matemáticas experimentales, y la invención de nuevos tipos de demostración que no encajan dentro del modelo estándar de demostración, como aquellas asistidas por computador. La reflexión es compartida por Hanna en [48], quien señala que algunas de las razones que llevaron a que la demostración en matemáticas quedara relegada en los currículos de secundaria de Norte América es su pérdida de importancia dentro de las mismas matemáticas.

Por otro lado, Mariotti en [74] plantea un modelo de análisis de la naturaleza de la demostración en geometría que permite, no solamente la distinción formal entre la verdad y la validación de los hechos matemáticos, sino administrar la complicada relación entre las dimensiones intuitiva y teórica de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Plantea la necesidad de realizar un análisis profundo para entender los procesos mentales involucrados en el razonamiento geométrico, en particular los relacionados con la naturaleza de las "figuras geométricas" y su papel en las demostraciones. La investigadora incluye la demostración en el concepto de *teorema*, enunciado que es aceptable sólo porque es sistematizado dentro de una teoría, con una autonomía completa de cualquier verificación o cualquier argumentación en un nivel empírico. Con base en su caracterización de *teorema*, Mariotti *et al.* en [77] realizan un análisis histórico-epistemológico de los teoremas matemáticos, enfocan los teoremas de geometría en este sentido y analizan las características del campo de experiencias, el papel del profesor en la interacción en el aula y las funciones de la exploración dinámica en la generación de la forma condicional de los teoremas y el proceso de demostrar.

Investigaciones en la línea de la demostración en el currículo

En esta sección nos referimos a investigaciones que tienen como meta proporcionar una descripción del estatus de la demostración en la escuela y su relación con el currículo. Algunos interrogantes que motivan los estudios investigativos son: ¿cuál es el estatus de la demostración en la escuela? [76], ¿qué influencia tienen las concepciones epistemológicas acerca de la demostración en las diversas opciones curriculares?, ¿qué relación guardan el aprendizaje de la demostración en la escuela y las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración con supuestos históricos y epistemológicos subyacentes en el currículo? [24]. A continuación sintetizamos algunos de los principales estudios representativos de esta línea, síntesis que se puede complementar con la presentada en [92].

Battista y Clements en [20] proponen que el currículo de secundaria debe estimular a los estudiantes a refinar su pensamiento gradualmente, conduciéndolos a comprender los defectos de las justificaciones visuales y empíricas para que descubran y comiencen a usar componentes críticos del pensamiento formal. Al respecto Godino y Recio en [43] plantean que la enseñanza de las matemáticas debe procurar que los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como que sean conscientes de las relaciones dialécticas entre ellas.

Healy y Hoyles en [57, 59] presentan los resultados de un proyecto nacional sobre las concepciones de demostración que tienen estudiantes entre 14 y 15 años, en Inglaterra y Gales. A partir de un cuestionario aplicado masivamente, que incluía preguntas de álgebra y geometría, examinan la relación entre el currículo nacional, las concepciones que manifiestan los estudiantes, así como su desempeño. Las respuestas del cuestionario sirvieron a Küchemann y Hoyles (ver [70]) para sacar conclusiones sobre la influencia del tema (álgebra o geometría), el género y el conocimiento matemático general en las concepciones acerca de la demostración y en el desempeño al demostrar. Los autores señalan que las respuestas a los ítems cuyos temas eran más familiares a los estudiantes estaban sujetas a la influencia de los libros de texto más que al conocimiento matemático general, mientras que las respuestas a los ítems menos familiares (geometría), estaban más sujetas a la variación entre clases; en un estudio complementario al anterior, los autores caracterizan las diferentes respuestas de dos estudiantes con diferentes visiones de demostración y de matemáticas. En un estudio local, usando la idea de evaluación propuesta en [70], Fiallo y Gutiérrez presentan en [39] los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a 100 estudiantes de 10^o grado de bachillerato (14–16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), mediante el análisis de los tipos de demostraciones (ver [78]) que realizan los estudiantes al inicio del curso.

Con un objetivo similar, Szendrei-Radnai y Török en [99] suministran información sobre la existencia de situaciones alternativas y la influencia de “agentes” externos a la configuración escolar húngara usual (contextos matemáticos y cotidianos) que contribuyen a proporcionar buenas oportunidades para que los estudiantes puedan hacer frente a una demostración de una manera coherente y proporcionan una imagen parcial y relativa de las concepciones de los estudiantes en Hungría acerca de la demostración al entrar en la Universidad, como efecto del acercamiento escolar.

Ibañes y Ortega en [66] realizan un análisis curricular del tratamiento de las demostraciones trigonométricas revisando los libros de texto españoles de primer curso de bachillerato. Usan como categorías de análisis de contenido matemático las definidas para ese fin en [65]. Por esta razón, estudian los esquemas de demostración, las técnicas empleadas en las demostraciones -método, estilo y modo-, las funciones de la demostración, la explicitación de procesos, las expresiones que se utilizan y si en los textos se hacen consideraciones globales del proceso seguido en la demostración. En un trabajo similar Stacey y Vincent [95] usan la definición de demostración y los esquemas de demostración de Harel y Sowder [56] para analizar los modos de razonamiento explícito en las explicaciones, justificaciones y demostraciones de varios tópicos en cuatro libros de texto australianos. Concluyen que todos los libros de texto hacen algún intento de explicar cada proposición. Ningún libro de texto presenta “reglas sin razón”. Sin embargo, parece ser que el único objetivo al deducir una regla es ponerla en práctica en ejercicios, en lugar de utilizar las explicaciones como una herramienta de pensamiento. Las explicaciones son muy cortas y sólo presentan aspectos esenciales del razonamiento formal, por lo que los estudiantes deben acudir a los profesores para comprenderlas, aunque el material proporcionado requiere de profundización en el conocimiento matemático y pedagógico del contenido por parte de los profesores. Algunos de los recursos electrónicos que se agregan, incluyendo demostraciones geométricas dinámicas y plantillas para la construcción, son para llenar algunas lagunas en las explicaciones.

Investigaciones en la línea de concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar

En este grupo ubicamos investigaciones que buscan obtener una mejor idea sobre los procesos relacionados con el aprendizaje de la **demostración** y aportan respuestas a interrogantes como ¿cuáles son las actuales concepciones de la demostración de los estudiantes? [56], ¿cuáles son las principales dificultades que encaran los estudiantes en relación a la demostración? y ¿cuál puede ser el origen de tales dificultades? [56, 76]. A continuación presentamos trabajos de investigación representativos de esta línea.

Balacheff en [13] presenta un estudio experimental acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes, desde el punto de vista de las prácticas matemáticas. Plantea la siguiente clasificación para las concepciones: *empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico y experimento mental*. Las tres primeras corresponden a demostraciones empíricas y la última a demostraciones deductivas informales, La diferencia entre las demostraciones empíricas es la forma como los estudiantes seleccionan los ejemplos: En el empirismo ingenuo, el estudiante busca, muchas veces de manera aleatoria, uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados. En el experimento crucial, la demostración se basa en la concepción de que todos los ejemplos se comportarán de la misma manera, por lo que el estudiante elige ejemplos de manera cuidadosa para que no sean "especiales" y verifica en ellos la conjetura cuya veracidad quiere demostrar. En el ejemplo genérico, el estudiante hace una búsqueda cuidadosa de ejemplos, que son representantes de sus clases y portadores de propiedades abstractas. La principal característica del experimento mental es que los ejemplos ya no forman parte de la demostración, sino que son un complemento que ayuda al estudiante a encontrar propiedades y relaciones deductivas para construir la demostración.

El estudio de Balacheff permite ver los procesos de demostración usados por los estudiantes al resolver un problema, revisando cómo los estudiantes llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta, a través de la discusión verbal. Concluye que el análisis de las características lingüísticas de las expresiones en la demostración es insuficiente para aclarar el nivel de demostración de los estudiantes. En cambio, cuando se conoce el proceso de producción de la demostración se puede tomar una decisión acerca de su validez efectiva y de su nivel. Con base en los resultados de su investigación, plantea una ruptura entre los dos primeros tipos de demostración y los dos últimos. Esta ruptura puede ser caracterizada como el paso de una verdad asegurada a partir de una afirmación del hecho a una verdad asegurada a partir de un razonamiento. También reconoce una conexión entre el empirismo ingenuo y el experimento crucial, cuando el último es usado en la demostración por la necesidad de asegurar la generalidad de la conjetura soportada. Por ejemplo, Ibañes y Ortega en [65] presentan un estudio sobre el reconocimiento de diferentes procesos matemáticos por parte de estudiantes de primer curso de bachillerato, entre los cuales está la demostración. En su estudio muestran que los estudiantes van evolucionando en el reconocimiento, distinción e identificación de las demostraciones matemáticas, basados en razones externas al proceso y en las funciones que le asignan, logrando una caracterización cada vez mejor del mismo. Cuando ellos se fijan en las funciones de la demostración, la de explicación es la que más consideran. Los estudiantes que no han recibido una instrucción específica sobre la aplicabilidad de los teoremas no son conscientes de esta posibilidad, e incluso creen que se pueden encontrar ejemplos que no satisfagan un teorema ya demostrado. Antonini y Mariotti en [3], a partir de la noción de teorema dada por Mariotti *et al.* en [77], proponen un modelo para ser usado en la observación, el análisis y la interpretación de asuntos didácticos y cognitivos relacionados con las argumentaciones y demostraciones indirectas. Plantean que el uso de las expresiones "demostración indirecta", "demostración por contradicción", "demostración por contraposición" y "demostración ad absurdum". En los libros de texto, no es claro y uniforme, y puede ser objeto de polémica, incluso entre los matemáticos. Además del análisis de las dificultades en la comprensión y producción de demostraciones indirectas, en el artículo se discute la compleja relación entre los argumentos que apoyan un enunciado y su validación mediante una demostración matemática, y se pone en evidencia la necesidad de hacer un análisis epistemológico y cognitivo que incluya el proceso de conjeturar, para analizar e interpretar las dificultades de los estudiantes en el tema de la demostración indirecta. Los autores señalan la dificultad de algunos estudiantes para convencerse de la veracidad de alguna conjetura a partir de una demostración por contradicción, debido a la complejidad de la argumentación que soporta la demostración y su lejanía con posibles procesos previos de generación de la conjetura. Dichos autores detectan también que, para muchos estudiantes, las demostraciones por contradicción no cumplen las funciones asignadas a este proceso.

Por otro lado, Harel y Sowder en [55] consideran que las dificultades para aprender a demostrar obedecen a la variedad de formas como los estudiantes se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la certeza de una observación. Proponen la noción de "esquema de demostración" como una herramienta para analizar las formas de convicción o persuasión, y clasifican las demostraciones de los estudiantes en los siguientes esquemas, cada uno con sus respectivas subcategorías: *por convicción externa, empíricos o analíticos.* Dichos esquemas son mutuamente exclusivos, pues un argumento de demostración no puede ser de dos tipos a la vez, pero es frecuente que los estudiantes utilicen más de una clase de esquema en diferentes partes de una demostración. Estos autores argumentan que las actividades de aprendizaje que educan el razonamiento de los estudiantes acerca de la demostración son cruciales en el desarrollo matemático, aún desde los primeros años. Los estudiantes deberían aprender que las demostraciones son, primero que todo, argumentos convincentes, que son un producto de la actividad humana, en la cual ellos pueden y deben participar y que son parte esencial de la actividad matemática. La meta de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a refinar sus propios esquemas de lo que constituye una justificación en matemáticas: desde esquemas dominados por la percepción, la manipulación simbólica y los rituales, hasta esquemas basados en la necesidad lógica, pasando por esquemas basados en la intuición y la convicción personal.

Arzarello *et al.* en [7] bosquejan un modelo para interpretar las dificultades en los procesos de exploración de situaciones geométricas, cuando se están formulando conjeturas (fase ascendente de la actividad) y produciendo sus demostraciones (fases descendente de la actividad). El modelo está basado en los diferentes tipos de control del sujeto con respecto a la situación, y el paso de una fase a la otra. Estos autores analizan la solución a un problema de demostración poniendo especial atención al momento en que se pasa de la fase ascendente, caracterizada por una actividad empírica que apunta a entender mejor el problema, generar una conjetura o verificarla, hacia una fase descendente, donde se intenta construir una demostración deductiva de la conjetura. En un estudio posterior, Arzarello *et al.* en [9, 8], analizan el uso del arrastre en sistemas de geometría dinámica introduciendo una jerarquía de sus funciones. El arrastre se revela crucial en la dialéctica entre los aspectos perceptivos y teóricos que se lleva a cabo en el razonamiento geométrico cuando se plantea en un contexto de geometría dinámica. Estos autores plantean dos tipologías cognitivas de uso del arrastre que están relacionadas con los tipos de control mencionados anteriormente, de manera que las finalidades de los arrastres que se realizan durante la resolución de un problema suelen estar relacionadas con los sucesivos pasos dados por los estudiantes a lo largo de la fase ascendente y de la descendente.

Healy y Hoyles en [58] examinan las concepciones de los estudiantes de la demostración en álgebra, encontrando que los estudiantes sostienen simultáneamente dos concepciones diferentes de demostración. De un lado, prefieren argumentos que pueden evaluar, que los convencen, que le proveen una explicación significativa y que excluyen el álgebra. De otro lado, predomina el argumento empírico en las propias construcciones de demostraciones, aunque la mayoría de estudiantes se da cuenta de sus limitaciones. Otro resultado de este proyecto es reportado en [64], donde se analizan las respuestas a una pregunta escrita sobre la equivalencia de dos enunciados de teoría elemental de números, una implicación lógica y su recíproca, para evaluar la verdad de las afirmaciones y justificar sus conclusiones. Distinguen tres estrategias, *empírica, empírica enfocada y deductiva enfocada*, que representan cambios en la atención desde un acercamiento inductivo hacia uno deductivo. Estos autores presentan también algunas categorías teóricas para clasificar diferentes tipos de significados que los estudiantes asignan a la implicación lógica y las razones que sustentan estos significados. Las categorías distinguen respuestas donde un enunciado de implicación lógica es (o no) interpretado como equivalente a su recíproca, el antecedente y el consecuente se ven (o no) como intercambiables o las conclusiones son (o no) influenciadas por datos específicos.

En [37] Fiallo analiza los tipos de demostración propuestos por Marrades y Gutiérrez en [78], que emergen durante la aplicación de una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica, enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración en los estudiantes de 10^o grado. Con los datos obtenidos en esta investigación, Gutiérrez y Fiallo presentan en [46] algunos ejemplos de los diferentes tipos de demostración producidas por los estudiantes y muestran su progreso durante la unidad de enseñanza.

Investigaciones en la línea de la relación entre argumentación y demostración

Esta línea de investigación está relacionada estrechamente con los trabajos sobre concepciones de los estudiantes, dado que los investigadores buscan caracterizar el razonamiento relacionado con la demostración. Sin embargo, en esta sección agrupamos los trabajos que se centran específicamente en establecer relaciones entre la argumentación y la demostración. Los trabajos buscan identificar aspectos cognitivos y sociales que entran en juego durante la construcción de una demostración para poner en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan al relacionar los argumentos que producen en el curso de la resolución de problemas, y las demostraciones de enunciados que son solución a los problemas. En esta línea de investigación se busca dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración?; ¿de qué tipo de continuidad se trata?; ¿cómo comparar la argumentación con la demostración?; ¿cómo identificar la fase de producción de una conjetura y la fase de construcción de la demostración? (ver [87]).

Desde una perspectiva clásica epistemológica, algunos estudios han planteado, como una de las fuentes de dificultades, la discrepancia entre la argumentación con base en la verificación empírica (típica de un razonamiento común) y el razonamiento deductivo (típico de un razonamiento teórico). Fischbein en [40] sugiere que la convicción basada en una validación empírica y aquella basada en la demostración no están en el mismo orden, aunque pueden cohabitar. Balacheff plantea que existe una heterogeneidad de tipo epistemológico entre estos dos procesos, debido a que los conocimientos utilizados son muy diferentes por la diferencia del paso de lo pragmático a lo teórico (ver [12]). Este autor también plantea que el objetivo de la argumentación consiste en obtener la adhesión del interlocutor sin plantear necesariamente el problema de validez del enunciado.

La discrepancia mencionada en el párrafo precedente es estudiada y radicalizada por Duval en [34, 35], quien señala la distinción entre diferentes aproximaciones a la demostración, indicando una oposición entre argumentación y demostración, fundamentada en la diferencia entre el nivel semántico, donde el valor epistémico de un enunciado es fundamental, y el nivel teórico donde, en principio, solamente la validez del enunciado es lo que cuenta.

> La suposición de que en el nivel teórico la dependencia lógica de un enunciado con respecto a los axiomas y teoremas de la teoría es independiente del valor epistémico que uno atribuye a la proposición en juego lleva a Duval a reconocer una ruptura cognitiva entre argumentación y demostración.
>
> (Mariotti [76, p. 182]).

Duval en [34, 35, 36] muestra la distancia cognitiva que separa la argumentación de la demostración, a pesar de una proximidad discursiva a veces muy grande, y se refiere al problema de reconocer una argumentación, dada la variedad de las formas discursivas que puede tomar y la diversidad de sus niveles de organización. Duval analiza cómo funciona una demostración para plantear una ruptura entre la argumentación y la demostración, afirmando que el razonamiento deductivo es de un carácter diferente al de la argumentación espontáneamente aplicada en discusiones o en debates relativos a conflictos cognitivos. Una argumentación no funciona en primer lugar sobre el estatus de las proposiciones, sino sobre su contenido. La consideración del estatus de las proposiciones no es esencial.

Douek en [32, 33] toma el análisis del funcionamiento de la demostración de Duval como punto de referencia para subrayar la necesidad de considerar otros aspectos del proceso de construcción de una demostración dentro de las matemáticas. Plantea que, a pesar de la innegable distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la demostración matemática formal como productos socialmente situados, desde el mismo punto de vista epistemológico y cognitivo la argumentación y la demostración matemática ordinaria tienen, como procesos, muchos aspectos en común. Al respecto, Boero *et al.* en [26] proponen que, en un contexto educativo adecuado, es posible implementar con éxito un proceso de producción de teoremas, caracterizado por un fuerte vínculo cognitivo entre los procesos de argumentación y de demostración. En una investigación basada en un experimento de enseñanza organizado con estudiantes de grado octavo, que tenían que resolver problemas consistentes en elaborar conjeturas y demostrarlas de manera deductiva, observaron que los estudiantes que resolvían los problemas con éxito mantenían una gran coherencia entre el texto del enunciado producido por ellos y la demostración deductiva construida para justificarlo, mientras que los estudiantes que no lograban completar una demostración deductiva correcta mostraban diferencias importantes entre la actividad de elaboración y verificación de la conjetura y los intentos de demostrarla. Ello lleva a estos autores a proponer el constructo "unidad cognitiva de teoremas" para destacar la coherencia (o la falta de ella) entre ambas fases de resolución de los problemas de conjetura y demostración. Garuti, Boero y Lemut en [42] plantean que este constructo es una herramienta útil para interpretar y predecir las dificultades de los estudiantes en la demostración de enunciados de teoremas. Estos autores ilustran con ejemplos las potencialidades de esta herramienta e indican posibles desarrollos futuros relacionados con la investigación didáctica e implicaciones para una aproximación a la demostración en la escuela. En los ejemplos se destaca que los estudiantes que logran construir conjeturas de carácter procedimental tienen más éxito al demostrarlas que aquellos que formulan conjeturas de carácter relacional. Cuanto mayor es la brecha entre la exploración necesitada para apropiarse del enunciado y el proceso de demostración, mayor es la dificultad del proceso de demostración. Antonini y Mariotti en [3] sugieren que el constructo unidad cognitiva de teoremas también puede ser una herramienta didáctica eficiente para diseñar situaciones de enseñanza y de aprendizaje enfocadas a introducir las demostraciones indirectas.

Pedemonte en [86, 87, 88, 89] usa el constructo unidad cognitiva de teoremas para analizar y mostrar las posibles continuidades y rupturas entre la argumentación y la demostración. Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración, desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte utiliza una herramienta basada en el modelo[3] cK¢ (ver [14, 16]) integrado en el modelo de Toulmin [101][4]. El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia y el modelo de Toulmin permite analizar la estructura de la argumentación.

Son varios los investigadores que han usado el modelo de Toulmin para analizar la estructura de la argumentación, entre ellos Knipping en [68]. Esta autora reconstruye y analiza la racionalidad de los argumentos que se producen durante el proceso de demostración en el aula. Propone un método fundamentado en un proceso de tres etapas: reconstruir la secuencia y los significados de lo discutido en el aula; analizar argumentos y estructuras de argumentación; y finalmente comparar estas estructuras de argumentación y revelar su fundamento lógico. Para la segunda etapa del modelo analiza primero argumentos locales sobre la base del modelo de Toulmin, y luego analiza la estructura argumentativa global del proceso de demostración. Para ilustrar las relaciones en el análisis global de la discusión en el aula usa una representación esquemática de la estructura general argumentativa. Weber, Maher y Powell en [103] usan el modelo de Toulmin para tratar el problema de la búsqueda por parte de los estudiantes de "permisos de inferir" válidos para asegurar sus justificaciones o demostraciones, como consecuencia de las objeciones de otros estudiantes. Observan que los estudiantes desafían con frecuencia los argumentos que presentan sus colegas. Estos desafíos invitan a los estudiantes a ser explícitos acerca

[3]cK¢: *conception, knowing, concept* (ver [16, p. 105]).

[4]Toulmin en [101] elabora un modelo de representación de argumentos en el que identifica seis características estructurales que se deben analizar y organizar durante el proceso de argumentación: el enunciado (*claim*), los datos (*data*), los permisos de inferir (*warrant*), el indicador de fuerza del argumento (*modal qualifiers*), las refutaciones potenciales (*rebuttals*) y el soporte del permiso de inferir (*backing*).

de qué principios matemáticos (permisos de inferir) usan implícitamente como base para sus argumentaciones matemáticas. Hollebrands, Conner y Smith en [62] usan el modelo para analizar la naturaleza de los argumentos de los estudiantes cuando usan el *software NonEuclid* para resolver problemas de geometría no euclidiana.

En [38] Fiallo analiza la existencia de la continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. Propone una estructura de análisis de los tipos de demostración que se presentan en la escuela secundaria, adaptando el modelo de Pedemonte y el constructo de unidad cognitiva de teoremas para el análisis de la unidad o distancia cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, según esta estructura. Plantea cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, las cuales agrupan los diferentes logros o dificultades detectados en los procesos de argumentación y de demostración. Algunas de las dificultades detectadas son las siguientes: el uso de ejemplos o propiedades observadas en el diagrama dinámico no permite un control teórico que favorezca el cambio de una concepción perceptiva-numérica del proceso de argumentación a un marco algebraico o analítico en el proceso de demostración; dada la continuidad del sistema de referencia, no es posible la ruptura estructural si las generalizaciones hechas sobre lo observado no se convierten en axiomas, definiciones o teoremas, y no se comprende su importancia en el proceso axiomático de demostración; el planteamiento de conjeturas por analogía y por generalización de enunciados y procedimientos realizados en problemas anteriores, sin ningún proceso de exploración o de verificación, no ayuda a la construcción de una demostración deductiva; si la ruptura del sistema de referencia se da por las continuas intervenciones del profesor dentro de un proceso "guiado", y no por refutaciones potenciales que invaliden los operadores, de tal manera que el estudiante reflexione sobre las propiedad matemáticas y las considere como teoremas que tienen que ser incorporado a un proceso axiomático de demostración, la ruptura estructural no se logra. Finalmente concluye que si la ruptura cognitiva es causada por la ruptura del sistema de referencia y se construye una demostración tipo ejemplo genérico intelectual, hay más posibilidades de una ruptura estructural que conduzca a la construcción de una demostración deductiva, puesto que las generalizaciones que hacen los estudiantes corresponden a una generalización del proceso en donde logran transformar los operadores y controles perceptivos en propiedades matemáticas y controles teóricos.

Investigaciones en la línea de propuestas didácticas

Esta línea de investigación pretende generar propuestas alternativas para la enseñanza de la demostración en diversos contextos educativos, incluso desde la escuela primaria (ver [24]). Los trabajos buscan dar respuestas a numerosas preguntas abiertas relativas a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, tales como: ¿es posible superar las dificultades que encuentran los estudiantes en relación a la demostración?; ¿cómo pueden ser diseñadas intervenciones de enseñanza?; ¿qué sugerencias generales se pueden dar para la enseñanza de las demostraciones? (ver [76]); ¿cómo debería enseñarse la demostración?; ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en el aula?; ¿cuáles son las fases críticas en el desarrollo de la demostración con el estudiante y dentro del aula como comunidad de aprendizaje?; ¿qué entornos de aula son propicios para el desarrollo del concepto de demostración con los estudiantes?; ¿qué formas de interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor pueden fomentar la concepción de demostración de los estudiantes?; ¿qué actividades matemáticas –posiblemente con el uso de tecnología– pueden mejorar las concepciones de los estudiantes de la demostración? (ver [56]). A continuación presentamos estudios representativos de esta línea de investigación.

Un aspecto mencionado recurrentemente en los estudios investigativos en esta línea es el tipo de tareas que se proponen a los estudiantes. Bell es pionero al sugerir que proponer a los estudiantes tareas de investigar situaciones problema puede conducir a diversas conjeturas formuladas por ellos, a la necesidad de resolver conflictos entre puntos de vista diferentes, a la presentación de evidencias y a la construcción de argumentos formales (ver [21]). Esta idea es llevada a la práctica, entre otros, por Lampert en [73], Hoyles en [63] y Martin *et al.* en [79]; el primero de ellos sugiere que los problemas propuestos incluyan la observación de patrones de regularidad, pues esto conduce a la elaboración de argumentos empíricos inductivos y a explicaciones deductivas sobre por qué un patrón puede continuar. Por su parte, Radford en [91] hace una descripción más detallada del tipo de tareas para geometría, proponiendo la reformulación de teoremas relevantes en términos de problemas abiertos que dan lugar a una conjetura correspondiente al enunciado del teorema, seguida de actividades que buscan mostrar que una figura no puede constituirse en una demostración y de otras que procuran la comprensión del funcionamiento de una demostración -las cuales incluyen demostraciones incompletas o cuyos pasos están desordenados con la finalidad de completarlas u organizarlas, respectivamente-. Radford dice que por esa vía los estudiantes pueden ver los teoremas como algo significativo y se motivan a demostrarlos. Evalúa el éxito de su propuesta analizando los progresos individuales en la realización de demostraciones. Harel en [51] introduce un elemento nuevo en la selección de teoremas al proponer que estos den lugar a demostraciones 'explicativas' (ver [47]), pues son las que motivan a los estudiantes a aprender a demostrar. Adicionalmente, Marrades y Gutiérrez en [78] y Jones en [67] llaman la atención sobre la necesidad de organizar secuencias de enseñanza cuidadosas, graduar los problemas según el grado de dificultad y dar suficiente tiempo a los estudiantes para trabajar en los problemas propuestos.

Además de las tareas, otro aspecto al que se presta atención, especialmente con el advenimiento de los programas informáticos de geometría dinámica, es a los recursos que se ponen a disposición de los estudiantes. El trabajo de Groman (ver [45]) es uno de los primeros enfocados en aspectos sociales del aprendizaje de la demostración, en donde se emplea como mediador la geometría dinámica. La investigadora señala que la presencia de la tecnología produce un cambio en la forma de hacer el curso, hacia una práctica de tipo social. A partir de la exploración de figuras geométricas para producir conjeturas y preguntas de la forma "qué pasa si…", los estudiantes, futuros profesores, pueden construir por sí mismos significados matemáticos en un ambiente social de investigación, donde el profesor es uno más de los participantes en el proceso. La publicación especial número 44, en el año 2000, de la revista *Educational Studies in Mathematics* recoge importantes esfuerzos investigativos encaminados a preparar para la demostración o para enseñar a demostrar, en donde se enfatiza en el efecto de la mediación de los programas informáticos de geometría dinámica. En ella, algunos autores no sólo dan evidencias empíricas que refutan la idea de que la demostración esté en peligro por el uso de estos programas, sino que caracterizan su importante papel en la interacción social que favorece el aprendizaje. Mariotti en [75] presenta un análisis de la relevancia de varias funciones del programa Cabri al permitir centrar la atención en los procedimientos de construcción y en su validez, más que en el resultado de los mismos. La autora ilustra -mediante episodios extraídos de un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de 15-16 años- de qué manera aprovecha la correspondencia existente entre los comandos del menú que ofrece el programa y los axiomas y teoremas que los estudiantes usan en sus justificaciones, para introducir la idea general de demostración y la necesidad de demostrar siguiendo los principios y reglas de inferencia aceptados por el grupo como parte de una teoría. Según Mariotti, el aprendizaje de la demostración se favorece cuando una solución propuesta por un estudiante se somete a juicio de los demás, con base en las justificaciones que da. De manera paulatina se va incrementando la necesidad de recurrir a la demostración como recurso de validación. Marrades y Gutiérrez en [78] señalan que el programa de geometría dinámica permite una exploración empírica de las representaciones de las figuras geométricas, hecho que influye en una evolución positiva hacia la producción de justificaciones cada vez más próximas a demostraciones deductivas. Jones en [67] propone tareas cuya intención es interesar a los estudiantes en el análisis de las propiedades geométricas que permiten establecer relaciones entre las figuras. Concluye que cuando los estudiantes intentan explicar qué características debe tener una figura construida en un programa de geometría dinámica para representar una figura geométrica específica, juegan implícitamente con la idea de inferencia y se preparan para comprender cómo opera una demostración. El programa de geometría dinámica aporta un contexto de significado a la tarea de explicar, al disponer de la función de arrastre de los objetos de la construcción; el uso de esta función motiva a preguntarse por las razones de la resistencia de una figura al arrastre o la permanencia de algunas de las características de las figuras bajo el arrastre. Así, la preparación para la demostración se hace con actividades que llevan a los estudiantes a tener conciencia de la dependencia entre propiedades, a partir del cuestionamiento de una propiedad condicionada a la validez de otra propiedad. Healy y Hoyles en [59] reportan un estudio en el que tienen como hipótesis que las explicaciones dadas por los estudiantes, derivadas de la interacción con un programa de geometría dinámica, son más fáciles de sistematizar en una demostración deductiva que aquellas producto del trabajo con figuras hechas en papel; esto es debido a que al usar el programa se presta atención explícita a los procesos que se llevan a cabo. Las autoras organizan una serie de actividades en una secuencia de enseñanza que incluye la construcción de figuras geométricas, la identificación y descripción de las propiedades que usan en la construcción, el uso de opciones del programa informático para generar y verificar conjeturas, la formulación de una explicación informal de por qué las conjeturas pueden ser ciertas y la organización de las explicaciones en cadenas deductivas, con ayuda del profesor. Las investigadoras encuentran una estrecha relación entre el éxito en la resolución de los problemas y la producción de argumentos deductivos. Fiallo en [38] usa archivos construidos en Cabri para que los estudiantes puedan explorar y comprender que los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas se cumplen para cualesquier ángulo entre 0^o y $\pm 360^o$. Los archivos, junto con las preguntas propuestas en las guías de los estudiantes, se constituyen es una gran ayuda para el aprendizaje de los conceptos y el mejoramiento de las habilidades de demostración. El autor señala que los propios estudiantes, sin demasiada intervención del profesor, son los que "descubren" dichos conceptos y propiedades. Esto los motiva a querer saber por qué son verdaderos, y el programa de geometría dinámica les proporciona herramientas necesarias para que exploren los objetos geométricos y las relaciones numéricas y encuentren dichas respuestas.

Un tercer aspecto que se analiza en esta línea de investigación es el tipo de interacciones que se promueven entre los estudiantes y con el profesor. Bell señala en [21] que solo hasta que los estudiantes son conscientes del estatus público del conocimiento y del valor de la verificación social, a través del trabajo cooperativo en clase, aprecian el uso de demostraciones formales. Por tal razón, sugiere conducir la clase procurando que los estudiantes puedan argumentar para rechazar o legitimar una afirmación, independientemente de lo que diga el profesor o esté en un texto, sugerencia que es propuesta también por Lampert en [73]. Alibert y Thomas en [1] también hacen especial mención a las estrategias didácticas en donde se invita a los estudiantes a negociar sobre lo que constituye una demostración aceptable en matemáticas. Los autores combinan diversos dispositivos didácticos -procurando constituir en el aula un clima de construcción social- tales como el trabajo individual, el trabajo en grupos y el debate; concluyen, como Hoyles en [63], que el debate es una vía óptima para discutir la validez de los enunciados matemáticos, comprender por qué son válidos y querer justificarlos mediante la producción de una demostración. Según Hoyles en [63], la demostración como recurso de comunicación de ideas, función sugerida por de Villiers en [31], se puede concretar en la práctica a través de actividades que propician la formulación de argumentos para convencer a los pares o al profesor.

Los trabajos de Perks y Prestage [90] y Sackur, Drouhard y Maurel [93] se enfocan principalmente en desarrollar un ambiente de interacción social en el que los estudiantes, futuros profesores, pueden criticar, asumir posturas y defender ideas con las herramientas teóricas de que disponen. Además de crear un ambiente favorable hacia la demostración, resuelven conflictos suscitados por diferentes puntos de vista sobre la demostración de un enunciado geométrico. Los autores señalan que los estudiantes avanzan hacia la demostración deductiva a medida que logran una convicción propia de los enunciados en estudio, aunque es a través de la interacción social que se crea un entorno óptimo para aprender a demostrar. El ambiente inquisitivo es favorable para que ellos produzcan argumentos deductivos, pues al ser expuestos al control social se eleva su capacidad de argumentar matemáticamente. Por su parte, Camargo en [27] describe y analiza un proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, de futuros profesores de matemáticas, centrando la atención en las oportunidades y finalidades de participación legítima de los estudiantes en una clase de geometría plana que se constituye en una comunidad de práctica. El aprendizaje es visto como sinónimo de participación en un repertorio de prácticas que guarda semejanza con las prácticas de los profesionales en matemáticas.

Otro aspecto de indagación tiene que ver con las normas que se establecen en clase con relación a los argumentos que son válidos. Al respecto, es casi de obligatoria referencia la investigación de Yackel y Cobb (ver [106]), quienes se centran en el papel de las interacciones sociales en la construcción de criterios compartidos sobre lo que es una justificación aceptable para un enunciado matemático. Aunque el estudio de estos investigadores no se enfoca específicamente en el aprendizaje de la demostración, avanza en la caracterización de las normas sociales y socio-matemáticas favorables a la práctica de justificar. Según Yackel [105], una explicación matemática aceptable, en nuestro caso una demostración, llega a tener sentido para los estudiantes a través de la interacción de los participantes en el aula, quienes deciden si la explicación se ajusta o no a las reglas adoptadas. El significado de una norma no es preestablecido a fin de ser aplicado, sino que se comprende a partir de procesos de negociación, explícitos e implícitos, que se dan en la interacción social en el aula.

Harel [51], Marrades y Gutiérrez [78], Blanton y Stylianou [22] y Martin *et al.* [79], también hacen referencia a las normas en sus investigaciones. Por ejemplo, Harel en [51] reporta un trabajo con estudiantes de nivel universitario en el que intenta motivarlos a hacer demostraciones a partir del interés de presentar sus producciones, fruto de la resolución de problemas, de manera formal, según los cánones establecidos por el grupo para comunicar ideas. Marrades y Gutiérrez en [78] se refieren a la influencia del contrato didáctico que se establece en la clase en torno al significado de justificar una conjetura y Blanton y Stylianou en [22] y Martin *et al.* [79] buscan identificar el proceso de evolución de las normas de la clase a medida que los estudiantes se apropian de un lenguaje y un estilo particular de hacer demostraciones. En las conclusiones de sus estudios tanto Blanton y Stylianou como Martin y otros identifican una influencia directa de las normas de la clase en el desempeño en la argumentación requerida para construir demostraciones matemáticas. A medida que el semestre progresa, se observa que la calidad de las explicaciones orales y escritas elaboradas por los estudiantes y la capacidad de expresarse cambia sustancialmente, evolucionando de formas empíricas y procedimentales a deductivas y conceptuales y los estudiantes parecen interiorizar la necesidad de justificar en un lenguaje cada vez más formalizado.

Otro aspecto que se investiga es el papel del profesor en la constitución de un clima de interacción social favorable al aprendizaje de la demostración. La mayoría de los trabajos previamente referenciados hacen alusión a dicho papel (ver [22, 67, 71, 79, 93]). Por ejemplo, Blanton y Stylianou en [22] concluyen que el parafraseo y la confirmación de ideas originadas por los estudiantes son un mecanismo exitoso mediante el cual el profesor da autoridad y confianza a los estudiantes, procede por el camino sugerido por ellos y comparte la responsabilidad en el proceso; y mediante la repetición constante del requerimiento de justificar los involucra en discusiones que favorecen la transferencia de la responsabilidad a los estudiantes en la construcción de demostraciones. La mayoría de autores referenciados consideran que la naturaleza y el impacto de las intervenciones del profesor es esencial en el proceso de acercar a los estudiantes a la demostración deductiva, pues aunque se diseñen secuencias de enseñanza basadas en una organización social –en la que las soluciones propuestas por unos estudiantes deben ser aceptadas por los otros– la discusión tiene que ser guiada por el profesor; esto debido a que la construcción de conocimiento no avanza naturalmente en esa dirección, pues la demostración no es una vía social inmediata de justificar entre los estudiantes. El profesor es el responsable de impulsar a los estudiantes a explicar su razonamiento, tratar de dar sentido a las explicaciones de los compañeros y retarse unos a otros en busca de justificaciones. Además, él es la garantía de respeto a las reglas de la discusión establecidas en la clase y tiene la tarea de guiar la institucionalización de la discusión hacia la producción de demostraciones deductivas. Esta conclusión corrobora señalamientos hechos por otros investigadores (ver [30, 50]) quienes afirman que sería irreal esperar que los estudiantes redescubran métodos matemáticos sofisticados de validar, como la producción de demostraciones, sin la presencia activa del profesor. A diferencia de la posición de Harel [51], en lugar de esperar a que los estudiantes sientan la necesidad de hacer demostraciones por sí solos, ellos señalan que es el profesor quien propone y controla las reglas de justificación que se admiten en la clase.

Un grupo de investigadores italianos han realizado diversos experimentos de enseñanza con el fin de analizar la problemática del aprendizaje de la demostración en clases ordinarias. Varias de esas investigaciones están resumidas en Boero [24]. Entre ellos, Bartolini Bussi *et al.* en [18] presentan el trabajo de investigación referente al acercamiento a los teoremas de geometría en la escuela, proporcionando una estructura teórica unificada de los estudios de investigación que usan en investigaciones posteriores. Bartolini Bussi *et al.* en [19] reportan un problema de construcción de la geometría del círculo en tercer grado de primaria, analizando los procesos que han tenido lugar en las aulas como consecuencia de la asignación de esta tarea, abordando algunos aspectos pertinentes, como la delicada relación entre las prácticas concretas y el pensamiento teórico, y analizando cómo fue intencionalmente provocado el cambio del uno al otro durante la interacción en las clases. Boero, Garuti y Lemut en [25] analizan los procesos mentales subyacentes a la producción y demostración de conjeturas en matemáticas, dando algunas pistas sobre situaciones problemáticas adecuadas para la enseñanza de la demostración y sobre la mejor forma de manejar el trabajo en clase para una amplia participación de los estudiantes en la construcción de conjeturas y demostraciones. Parenti *et al.* en [85] presentan las condiciones peculiares que habilitan la clase para llegar a buenos niveles de participación en discursos teóricos y estudian algunos procesos mentales que están involucrados en estas actividades. Confirman el importante papel que desempeña el profesor en el acercamiento a aspectos teóricos de las matemáticas: en el aula como un mediador cultural, que plantea y coordina discusiones; en el grupo de investigación, como un miembro que hace parte de la planificación de las actividades y en el análisis de los procesos mentales de los estudiantes.

Comentario final

Aunque la revisión presentada en este documento no pretende ser exhaustiva, sí intenta mostrar una amplia panorámica de las investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. La complejidad de los asuntos implicados hace necesario enfocar la mirada en algunos aspectos, dejando otros como entretelón de los estudios investigativos. Algunas direcciones de investigación didáctica importantes que hemos mencionado pero no discutido en profundidad son el aprendizaje de la demostración en la enseñanza primaria (ver [17, 94]), los aspectos semióticos de la demostración (ver [10, 84]), la influencia de las formas de escritura de demostraciones en el aprendizaje (ver [61, 104]), las concepciones de profesores y futuros profesores sobre la demostración y su influencia en el aprendizaje de sus alumnos (ver [54, 69]) o el papel que puede jugar la tecnología, en particular los programas informáticos de geometría dinámica, en el aprendizaje de la demostración (ver [56, 72, 76]). En cada una de estas direcciones de investigación, los didactas están tratando de dar respuestas a diversas cuestiones e hipótesis. Una visión global de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se puede obtener en varias de las referencias mencionadas (ver, por ejemplo, [49]).

Creemos indispensable hacer mayores esfuerzos de divulgación de la investigación sobre el tema, pues aún persisten serias dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en todos los niveles educativos, pero principalmente en la formación de maestros. Es asunto que debe atenderse de manera urgente, pues las experiencias académicas de los futuros educadores influyen de marcada manera en la importancia con la que asuman la enseñanza de la demostración en la escuela.

En los últimos años han cobrado mucha fuerza estudios comparativos e interculturales que abordan las influencias de las prácticas sociales en las concepciones de demostración y en sus prácticas de enseñanza y aprendizaje. Estos estudios desafían las conceptualizaciones usuales de lo que significa aprender a demostrar, su utilidad y la pertinencia de incluir este tema en la escuela. Reconocemos las limitaciones de nuestra presentación acerca de esa mirada y esperamos reacciones a nuestro enfoque que contribuyan a complementar las ideas presentadas.

Referencias

[1] Alibert D., Thomas M., "Research on mathematical proof". En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215–229). Dordrecht, Los Países Bajos, Kluwer, 1991.

[2] Antonini S., Mariotti M.A., "Indirect proof: An interpreting model", *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)*, (2007), 541–550.

[3] Antonini S., Mariotti M.A., "Indirect proof: what is specific to this way of proving?" *ZDM the International Journal on Mathematics Education* 40 (2008), 401–412.

[4] Arsac G., "L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8 (1987), no. 3, 267–312.

[5] Arsac G., "Origin of mathematical proof". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27–42). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[6] Arzarello F. "The proof in the 20th century: From Hilbert to automatic theorem proving". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 43–64). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[7] Arzarello F., Micheletti C., Olivero F., Robutti O., "A model for analiysing the transition to formal proofs in geometry", *Proceedings of the 22th PME International Conference* 2 (1998), 24–31.

[8] Arzarello F., Olivero F., Paola D., Robutti O., "A cognitive analysis of dragging practises in Cabri enviroments", *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 34 (2002), no. 3, 66–72.

[9] Arzarello F., Olivero F., Paola D., Robutti O., "The transition to formal proof in geometry". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 305–323). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[10] Arzarello F., Sabena C., "Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities", *Educational Studies in Mathematics* 77 (2011), no. 2-3, 189–206.

[11] Back R.J., Wright J.V., "A method for teaching rigorous mathematical reasoning", *Proceedings of ICTM14*, (1999), 9–13.

[12] Balacheff N., *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*, Tesis doctoral, Grenoble, Francia, 1988. [Traducción al español: Balacheff N., Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas, Bogotá, Colombia: una empresa docente, 2000.].

[13] Balacheff N., "Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics". En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235), Londres, Hodder & Stoughton, 1988.

[14] Balacheff N., "Conception, connaissance et concept". En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, (pp. 219–244), Grenoble (Francia), Université Joseph Fourier, séminaires 1994-1995.

[15] Balacheff N. "The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof", *ZDM the International Journal on Mathematics Education* 40 (2008), 501–512.

[16] Balacheff N., Margolinas C., "cK¢ modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques". En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75–106), Francia, La Pensée Sauvage, 2005.

[17] Bartolini Bussi M., "Experimental mathematics and the teaching and learning of proof", *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)*, (2010), 221–230.

[18] Bartolini Bussi, M., Boero P., Ferri F., Garuti R., Mariotti M.A., "Approaching and developing the culture of geometry theorems in school: A theoretical framework". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 211–217), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[19] Bartolini Bussi M., Boni N., Ferri F., "Construction problems in primary school: A case from the geometry of circle". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 219–247), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[20] Battista M.T., Clements D.H., "Geometry and proof", *The Mathematics Teacher* 88 (1995), no. 1, 48–54.

[21] Bell A.W., "A study of pupil's proof-explanation in mathematical situation", *Educational Studies in Mathematics* 7 (1976), no. 1, 23–40.

[22] Blanton M.L., Stylianou, D.A., "Exploring sociocultural aspects of undergraduate students' transition to mathematical proof", *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the PME International Group* 4 (2002), 1673–1680.

[23] Boero P., Consogno V., Guala E., Gazzolo T., "Research for innovation : A teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in Grades I-V and some related basic research results", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(I) (2009), 59–96.

[24] Boero P., *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*, Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[25] Boero P., Garuti R., Lemut E., "Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249–264), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[26] Boero P., Garuti R., Lemut E., Mariotti A., "Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems", *Proceedings of the 20th PME International Conference* 2 (1996), 113–120.

[27] Camargo L., *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*, Tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia, España, 2010.

[28] Castagnola E., Tortora R., "Some remarks on the theorem about the infinity of prime numbers", *Proceeding of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)*, (2007), 581–590.

[29] Clark P., *The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course*, Tesis doctoral, Department of Philosophy, Arizona State University, 2005.

[30] Cobb P., Yackel E., Woods T., "A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education", *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (1992), 2–33.

[31] De Villiers M., "El papel y la función de la demostración en matemáticas", *Epsilon* 26 (1993), 15–29.

[32] Douek N., "Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications", *Proceeding of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1)*, (1998), 125–139.

[33] Douek N., "Some remarks about argumentation and proof", En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 163–181), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[34] Duval R., "Langage et représentation dans l'apprentissage d'une démarche déductive", *Proceedings of the 13th PME International Conference* 1 (1989), 228–235.

[35] Duval R., "Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?" *Petit x* 31 (1992-1993), 37–61.

[36] Duval R., "Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof", En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137–161), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[37] Fiallo J., *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de la demostración*, Memoria de investigación, Universidad de Valencia, Valencia, España, 2006.

[38] Fiallo J., *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*, Tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia, España, 2010.

[39] Fiallo J., Gutiérrez Á. "Tipos de demostración de estudiantes del grado 10^o en Santander (Colombia)". En M. Camacho, P. Flores, P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XI (2007), 355–368.

[40] Fischbein E., *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Los Países Bajos, D. Reidel, 1987.

[41] Furinghetti F., Morselli F., "Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving", *Educational Studies in Mathematics* 70 (2008), 71–90.

[42] Garuti R., Boero P., Lemut E., "Cognitive unity of theorems and difficulty of proof", *Proceedings of the 22th PME International Conference* 2 (1998), 345–352.

[43] Godino J., Recio A., "Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática", *Enseñanza de las Ciencias* 19 (2001), no. 3, 405–414.

[44] Grabiner J.V., "Why proof? A historian's perspective". En Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 147–167), Dordrecht, Los Países Bajos, Springer, 2012.

[45] Groman M., "Integrating Geometer's Sketchpad into geometry course for secondary education mathematics major", *Proceedings of ASCUE* (1996), 9–13.

[46] Gutiérrez Á., Fiallo J., "Analysis of conjectures and proofs produced when learning trigonometry", *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education* (2007), 622–632.

[47] Hanna G., "Some pedagogical aspects of proof", *Interchange* 21 (1990), no. 1, 6–13.

[48] Hanna G., "The ongoing value of proof". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 3–18), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[49] Hanna G., de Villiers M. (Eds.), "Proof and proving in mathematics education". *The 19th ICMI Study*, Dordrecht, Los Países Bajos, Springer, 2012.

[50] Hanna G., Jahnke N., "Proof and proving". En A. Bishop y otros (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877–908), Dordrecht, Los Países Bajos, Kluwer, 1996.

[51] Harel G., "Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa)", *The American Mathematical Monthly* 105 (1998), 497–507.

[52] Harel G., "The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction", En S. Campbell, R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory, journal of mathematical behavior* (pp. 185–212), New Jersey, EE.UU., Ablex, 2001.

[53] Harel G., "Students' proof schemes revisited", En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65–78), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[54] Harel G., Martin W.G., "Proof frames of preservice elementary teachers", *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1989), no. 1, 41–51.

[55] Harel G., Sowder L., "Student's proof schemes: results from exploratory studies". En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education* III (pp. 234–283), Providence, EE.UU., American Mahematical Society, 1998.

[56] Harel G., Sowder L., "Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof". En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842), Reston, VA, EE.UU., National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

[57] Healy L., Hoyles C., "Student's performance in proving: competence or curriculum?" *Proceedings of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1)*, (1998), 153–167.

[58] Healy L., Hoyles C., "A study of proof conceptions in algebra", *Journal for Research in Mathematics Education* 31 (2000), no. 4, 396–428.

[59] Healy L., Hoyles C., "Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls", *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6 (2001), 235–256.

[60] Hemmi K., *Approaching proof in a community of mathematical practice*, Tesis doctoral, Department of Mathematics, Stockholm University, 2006.

[61] Herbst P.G., "Acerca de la demostración y la lógica de la práctica en la enseñanza de la geometría: Observaciones sobre la forma de prueba a dos columnas", *Proof Newsletter*, (1999), Enero-Febrero. Revista electrónica accesible en http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990102.html.

[62] Hollebrands K., Conner A., Smith R., "The nature of arguments provided by college geometry students whith access to technology while solving problems", *Journal for Research in Mathematics Education* 41 (2010), no. 4, 324–350.

[63] Hoyles C., "The curricular shaping of students' approaches", *For the Learning of Mathematics* 17 (1997), no. 1, 7–16.

[64] Hoyles C., Küchemann D., "Student's understandings of logical implication", *Educational Studies in Mathematics* 51 (2002), 193–223.

[65] Ibañes M., Ortega T., "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato", *Enseñanza de las Ciencias* 21 (2003), no. 1, 49–63.

[66] Ibañes M., Ortega T., "Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato", *Números* 57 (2004), 19–32.

[67] Jones K., "Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations", *Educational Studies in Mathematics* 44 (2000), 55–85.

[68] Knipping C., "A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes", *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40 (2008), 427–441.

[69] Knuth E.J., "Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics", *Journal of Mathematics Teacher Education* 5 (2002), 61–88.

[70] Küchemann D., Hoyles C., "Investigating factors that influence students' mathematical reasoning", *Proceedings of the 25th PME International Conference* 3 (2001), 257–264.

[71] Laborde C., "Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving", *Educational Studies in Mathematics* 44 (2000), 151–161.

[72] Laborde C., Kynigos C., Hollebrands K., Sträesser R., "Teaching and learning geometry with technology". En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275–304), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2006.

[73] Lampert M., "When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching", *American Educational Research Journal*, 27 (1990), no. 1, 29–63.

[74] Mariotti M.A., “Justifying and proving: figural and conceptual aspects”. En M. Hejny, J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*, 1997.

[75] Mariotti M.A., “Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment”, *Educational Studies in Mathematics* 44 (2000), 25–53.

[76] Mariotti M.A., “Proof and Proving in Mathematics Education”. En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173–204), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2006.

[77] Mariotti M. A., Bartolini M., Boero P., Ferri F., Garuti R., “Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition”, *Proceedings of the 21th PME International Conference* 1 (1997), 180–195.

[78] Marrades R., Gutiérrez A., “Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment”, *Educational Studies in Mathematics* 44 (2000), 87–125.

[79] Martin T.S., Soucy McCrone S.M., Wallace M.L., Dindyal J., “The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof”, *Educational Studies in Mathematics* 60 (2005), 95–124.

[80] Nardi E., *Amongst mathematicians. Teaching and learning mathematics at university level*, New York, USA, Springer, 2008.

[81] NCTM, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA, EE.UU., 1989.

[82] NCTM, *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA, EE.UU., 2000.

[83] NCTM, *Principios y estándares para la educación matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, España, 2003.

[84] Otte M., “Proof and explanation from a semiotical point of view”, *Relime*, número especial (2006), 23–43.

[85] Parenti L., Barberis M., Pastorino M., Viglienzone P., “From dynamic exploration to “theory” and “theorems” (from 6th to 8th grades)”. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 265–284), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, (2007).

[86] Pedemonte B., *Etude didactique et cognitive des rapports de l’argumentation et de la démonstration dans le apprentisage des mathématiques*, Tesis doctoral, Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble, Francia, 2002.

[87] Pedemonte B., “Quelques outils pour l‘analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration”, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25 (2005), no. 3, 313–348.

[88] Pedemonte B., “How can the relationship between argumentation and proof be analysed?”, *Educational Studies in Mathematics* 66 (2007), 23–41.

[89] Pedemonte B., “Argumentation and algebraic proof”, *ZDM the International Journal on Mathematics Education* 40 (2008), 385–400.

[90] Perks P., Prestage S., “Why don’t they prove?” *Mathematics in School* 24 (1985), no. 3, 43–45.

[91] Radford L., "La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos", *Educación Matemática* 6 (1994), no. 3, 21–36.

[92] Reid D.A., Knipping C., *Proof in mathematics education*, Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2010.

[93] Sackur C., Drouhard J.P., Maurel M., "Experiencing the necessity of a mathematical statement", *Proceedings of the 24th PME International Conference* 4 (2000), 105–112.

[94] Sinclair N., Jones K., "Geometrical reasoning in the primary school, the case of parallel lines", *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 29 (2009), no. 2, 88–93.

[95] Stacey K., Vincent J., "Modes of reasoning in explanations in year 8 textbooks", *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (2008), 475–481.

[96] Stylianides A.J., "Toward a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs", *Pythagoras* 32 (2011), no. 1, 10 p.

[97] Stylianides A.J., Stylianides G.J., "Proof constructions and evaluations", *Educational Studies in Mathematics* 72 (2009), no. 2, 237–253.

[98] Stylianides G.J., Stylianides A.J., "Facilitating the transition from empirical arguments to proof", *Journal for Research in Mathematics Education* 40 (2009), no. 3, 314–352.

[99] Szendrei-Radnai J., Török J., "The tradition and role of proof in mathematics education in Hungary". En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 117–134). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers, 2007.

[100] Tall D., "The cognitive development of proof: is mathematical proof for all or for some", *Paper presented at the UCSMP Conference*, Chicago University, Chicago, EE.UU., 1998.

[101] Toulmin S.E., *The use of argument*, Cambridge, Gran Bretaña, Cambridge University Press, 1958.

[102] Tsamir P., Tirosh D., Dreyfus T., Barkai R., Tabach M., "Should proof be minimal? Ms. T's evaluation of secondary school students' proofs", *The Journal of Mathematical Behavior* 28 (2009), 58–67.

[103] Weber K., Maher C., Powell A., "Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate", *Educational Studies in Mathematics* 68 (2008), 247–261.

[104] Weiss M., Herbst P., Chen C., "Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form", *Educational Studies in Mathematics* 70 (2009), 275–293.

[105] Yackel E., "Explanation justification and argumentation in mathematics classrooms", *Proceedings of the 25th PME International Conference* 1 (2001), 9–24.

[106] Yackel E., Cobb P., "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (1996), no. 4, 458–477.