Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 23, No. 2, 2005, pág. 1–13

Un breve panorama de los hiperespacios de continuos*

SERGIO MACÍAS**

Resumen. El propósito de este artículo es presentar una pequeña introducción a los hiperespacios más estudiados de continuos (i.e., de espacios métricos, compactos y conexos).

1. Introducción

Cuando se empieza a estudiar matemáticas, una de las primeras cosas que nos enseñan es la teoría de conjuntos. Nos hablan de los conjuntos, aunque nunca nos los definen. Nos dicen que hay un *conjunto vacío*, el cual no tiene elementos y es denotado como $\emptyset$, y que los demás son no vacíos. Además, dado cualquier conjunto Z, podemos construir otro conjunto llamado el *conjunto potencia de* Z, denotado como $\mathcal{P}(Z)$, como la familia de todos sus posibles subconjuntos, esto es:

$$\mathcal{P}(Z) = \{A \mid A \subset Z\}.$$

Como nos demuestran que $\emptyset \subset Z$ para cualquier conjunto Z, resulta que $\emptyset \in \mathcal{P}(Z)$. Además, como $Z \subset Z$, también se obtiene que $Z \in \mathcal{P}(Z)$. Tienen que pasar varios semestres antes de que volvamos a tener que trabajar con el conjunto potencia de un conjunto no vacío o con alguno de sus subconjuntos. Surge la pregunta:

$$\text{¿Qué es el conjunto potencia de un conjunto?} \tag{1}$$

Cuando trabajamos con un conjunto finito, digamos $Z = \{1, 2, 3, 4\}$, podemos conocer completamente a $\mathcal{P}(Z)$ escribiendo todos sus elementos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(Z) =& \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},\\ &\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.\end{aligned}$$

Palabras y frases claves: hiperespacios de continuos, espacios métricos, espacios compactos y conexos.
MSC2000: Primaria: 54B20. Secundaria: 54C05.
* El presente trabajo fue parcialmente apoyado por el Proyecto 42602 de CONACyT.
** Instituto de Matemáticas, UNAM, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, México D. F., C. P. 04510, México, *e-mail*: sergiom@matem.unam.mx

Pero eso puede resultar muy dispendioso. Sabemos que si un conjunto Z tiene n elementos entonces $\mathcal{P}(Z)$ tiene 2^n elementos. Así, en el ejemplo que acabamos de ver, resulta que $\mathcal{P}(Z)$ tiene 16 elementos. Pero ¿qué pasa cuando el conjunto Z tiene una cantidad infinita de puntos? En este caso *no* podemos dar la lista de todos los elementos de Z. Entonces ¿qué podemos hacer?

Dado un conjunto no vacío Z, una posibilidad es tratar de encontrar un *modelo* para $\mathcal{P}(Z)$, esto es, intentar encontrar un "conjunto conocido Y" y una función $f\colon \mathcal{P}(Z) \to Y$ que sea biyectiva y que tenga las propiedades adecuadas. (Estas propiedades dependen del área de las matemáticas en la que se esté trabajando: en nuestro caso pediremos que las funciones biyectivas sean, tanto ellas como sus inversas, continuas, es decir, que sean homeomorfismos). Una segunda posibilidad es encontrar modelos de algunos de sus subconjuntos.

Por ejemplo, sea Z un conjunto no vacío. Observemos que:

$$\mathcal{F}_1(Z) = \{\{z\} \mid z \in Z\}$$

es un subconjunto de $\mathcal{P}(Z)$ para el que hay una biyección $f\colon \mathcal{F}_1(Z) \to Z$ dada por $f(\{z\}) = z$. Notemos que esta función f satisface casi cualquier propiedad que se le pida. Así, se tiene que hay una "copia" del conjunto Z en $\mathcal{P}(Z)$.

Creemos que el contestar la pregunta (1) es muy difícil. La teoría de los hiperespacios intenta dar respuesta a la pregunta (1) utilizando la "segunda posibilidad" que mencionamos con anterioridad. Esto es, dicha teoría estudia ciertos subconjuntos distinguidos del conjunto potencia. En la siguiente sección se mencionan algunos ejemplos.

Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ denotan los conjuntos de números naturales, de números reales y el espacio euclidiano de dimensión n, respectivamente.

2. Ejemplos

A continuación presentaremos algunos modelos de ciertos subconjuntos del conjunto potencia de algunos espacios conocidos.

1. Sea X el intervalo unitario $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Como ya vimos anteriormente, $\mathcal{F}_1(X)$ es una copia de X. Uno se puede preguntar: ¿Podemos hallar un modelo para

$$\mathcal{F}_2(X) = \{A \subset X \mid A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ tiene a lo más dos elementos}\}?$$

En este caso, tenemos que:

$$\mathcal{F}_2(X) = \{\{a,b\} \mid 0 \leq a, b \leq 1\}.$$

Observemos que un conjunto de la forma $\{a,b\}$ queda completamente determinado por su punto medio, $\frac{a+b}{2}$, y por la distancia entre sus elementos,

$|b-a|$. De esta forma, podemos definir una función $f\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathbb{R}^2$ como $f(\{a,b\}) = \left(\frac{a+b}{2}, |b-a|\right)$. Notemos que f es inyectiva y que la imagen $f(\mathcal{F}_2(X))$ es el triángulo comprendido entre el eje x y las rectas $y = 2x$ y $y = 2(1-x)$ (Figura 1). También es importante observar que $\mathcal{F}_1(X)$ está representado por la parte contenida en el eje x.

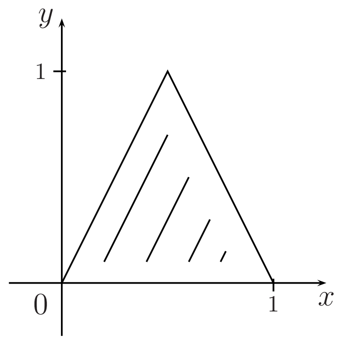

Figura 1.

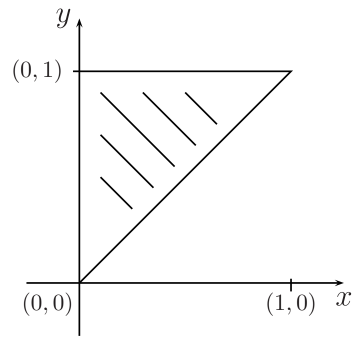

Figura 2.

A continuación encontraremos un modelo para

$$\mathcal{C}(X) = \{[a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Notemos que $\mathcal{C}(X)$ consta de los subintervalos cerrados de X, los cuales "son de una sóla pieza". A los conjuntos de "una sóla pieza" los llamaremos *conexos*.

Este caso es más sencillo. Podemos definir la función $g\colon \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}^2$ como $g([a,b]) = (a,b)$. Observemos que g es inyectiva y que la $g(\mathcal{C}(X))$ es el triángulo comprendido entre el eje y y las rectas $y = x$ y $y = 1$ (Figura 2). En este caso se tiene que $\mathcal{F}_1(X)$ está representando la parte contenida en la recta $y = x$.

Notemos que si "pegamos" las dos copias que tenemos de $\mathcal{F}_1(X)$, se tiene que $\mathcal{F}_2(X) \cup \mathcal{C}(X)$ es un cuadrilátero.

En [1] se prueba que un modelo para

$$\mathcal{F}_3(X) = \{\{x,y,z\} \mid x,y,z \in X\}$$

es $[0,1]^3$, mientras que para $n \geq 4$, no se puede encontrar dentro de $\mathbb{R}^n$ ningún modelo para

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

2. Sea X la colección de los puntos en $\mathbb{R}^3$ contenidos en los ejes coordenados cuya distancia al origen es menor que o igual a uno. A este espacio se lo conoce como un *triodo simple* (Figura 3).

   Obtendremos un modelo para

$$\mathcal{F}_2(X) = \{\{x,y\} \mid x,y \in X\}.$$

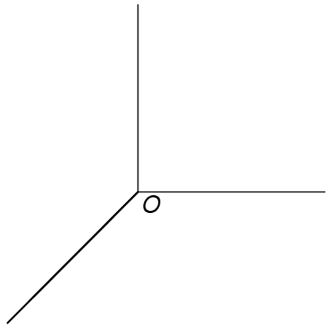

Figura 3.

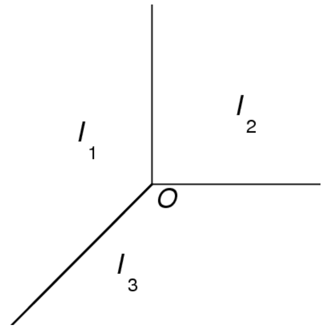

Figura 4.

Con este fin, llamaremos I_1 a la unión de las patas de X contenidas en los ejes x y z, I_2 a la unión de las patas contenidas en los ejes y y z e I_3 a la unión de las patas contenidas en los ejes x y y (Figura 4).

Por lo visto en el ejemplo anterior, $\mathcal{F}_2(I_3)$ consiste de un triángulo, el cual contiene a dos triángulos que representan los segundos productos simétricos de las patas contenidas en los ejes x y y. La parte de $\mathcal{F}_2(I_3)$ que no está contenida en estos triángulos corresponde a los puntos de $\mathcal{F}_2(I_3)$ que constan de dos elementos de X, uno de ellos en la pata contenida en el eje x y el otro en la pata contenida en el eje y.

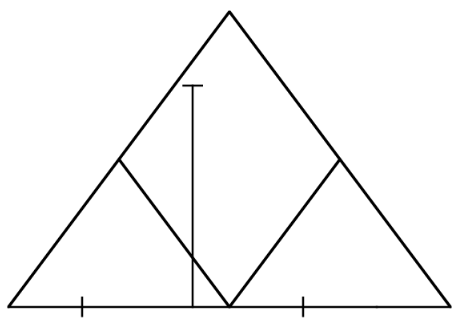

Figura 5.

Agregando la pata contenida en el eje z y haciendo un análisis similar, obtenemos que un modelo para $\mathcal{F}_2(X)$ es el representado en la Figura 5.

Si "desdoblamos" este espacio entonces obtenemos que $\mathcal{F}_2(X)$ es un "triángulo con alas" (Figuras 6 y 7).

A continuación obtendremos un modelo para

$$\mathcal{C}(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es no vacío y } A \text{ es una copia de } X, \\ \text{un subintervalo cerrado o un punto}\}.$$

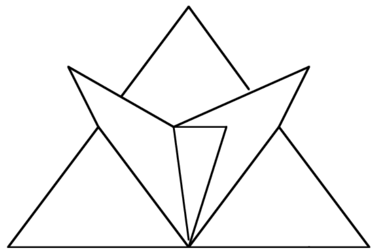

Figura 6.

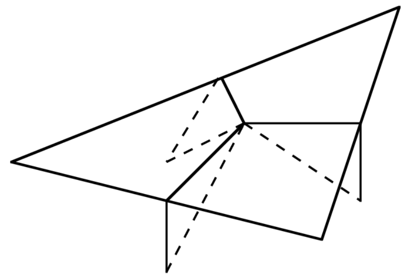

Figura 7.

Esto es, $\mathcal{C}(X)$ consta de los subconjuntos cerrados de X que son de una sola pieza, i.e., conexos. A los subconjuntos de X que son una copia de X los llamaremos *triodos*. Observemos que los triodos siempre contienen el origen, O. Los subintervalos que tienen al O como punto "interior" pueden ser considerados como triodos con una pata degenerada. Mientras que los subintervalos que tienen al O como un punto "extremo" pueden ser considerados como triodos con dos patas degeneradas. Así, un triodo queda completamente determinado por la longitud de cada una de sus patas (Figura 8).

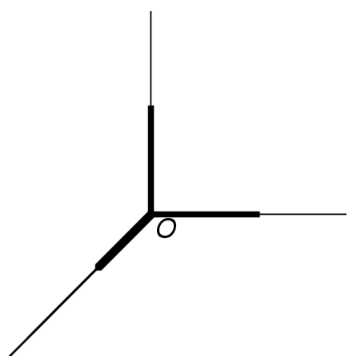

Figura 8.

Como hay "tres grados de libertad", uno por cada uno de los ejes de $\mathbb{R}^3$, se tiene que el subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ que consiste de la familia de los triodos puede ser identificada con el cubo unitario $[0,1]^3$ (Figura 9).

Por otra parte, los subintervalos de X que no contienen a O están totalmente contenidos en alguna de las patas de X, esto es, son parte del hiperespacio de un arco que, como ya sabemos, consiste de un triángulo. La parte común con los triodos consiste en los subintervalos de X que contienen a O y están totalmente contenidos en una de las patas, y corresponden a los lados del triángulo. Por tanto, pegando los tres triángulos obtenemos que un modelo para $\mathcal{C}(X)$ es un "cubo con alas" (Figura 10).

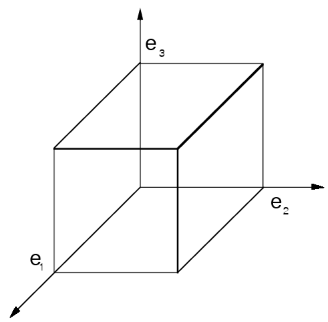

Figura 9.

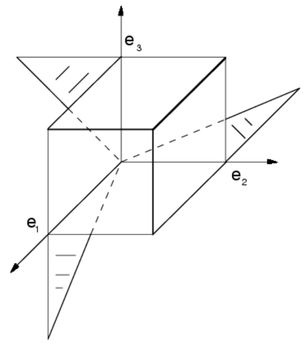

Figura 10.

3. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. En [9, págs. 215–218] se ve que un modelo para

$$\mathcal{F}_2(X) = \{\{x, y\} \mid x, y \in X\}$$

es la banda de Möbius (Figura 11).

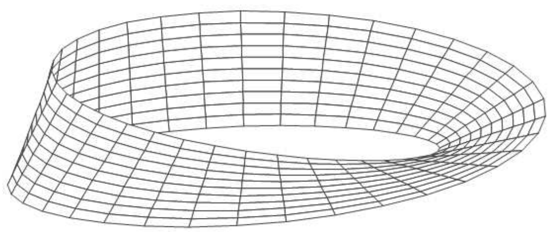

Figura 11.

Mientras que un modelo para

$$\mathcal{C}(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es no vacío y } A \text{ es un subintervalo cerrado, un punto o } X\}$$

es el disco unitario $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Figura 12).

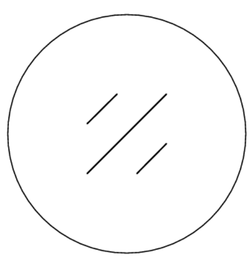

Figura 12.

4. Sea $X = [0,1]^2$. En [22] se prueba que un modelo para
$$\mathcal{F}_2(X) = \{\{x,y\} \mid x,y \in X\}$$
es $[0,1]^4$, mientras que con $n \geq 3$, no se puede encontrar dentro de $\mathbb{R}^{2n}$ ningún modelo para
$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

5. Sean $n \geq 3$ y $X = [0,1]^n$. En [22] se demuestra que en $\mathbb{R}^{2n}$ no se puede encontrar ningún modelo para
$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

3. Definiciones y comentarios

Nuestro siguiente objetivo es dar las definiciones necesarias para presentar algunas de las propiedades principales de los hiperespacios de continuos.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. El lector que no esté familiarizado con estos conceptos, puede suponer que si X es un continuo, entonces X está contenido en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^n$ como un conjunto cerrado (esto es, para cada punto x de $\mathbb{R}^n$ que no esté en X hay una bola abierta con centro en x y que no toca a X), que está acotado (es decir, X está contenido en una bola abierta con centro en el origen O) y que es de *una sola pieza*. El lector interesado en profundizar en el estudio de los continuos puede referirse a [25].

Como ejemplos de continuos tenemos el intervalo $[0,1]$, la circunferencia unitaria $\mathcal{S}^1$, el toro $\mathcal{T} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, etc. (Figura 13).

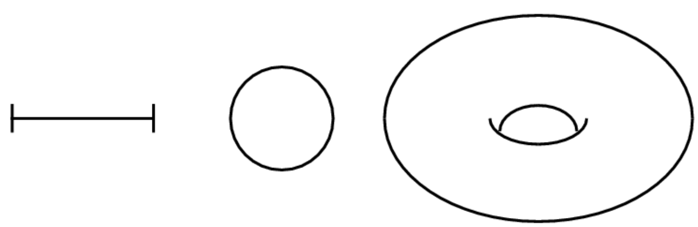

Figura 13.

Dado un continuo X, un *hiperespacio de* X es un subconjunto específico del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$, con la métrica de Hausdorff (la cual definiremos posteriormente). Como el conjunto vacío $\emptyset$ siempre es un conjunto tanto abierto como cerrado, siempre será un punto aislado, por lo que se excluye como punto de un hiperespacio. Por el Ejercicio 1.13 de [7] no se obtienen cosas interesantes al considerar a $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ como hiperespacio de un continuo X[1]. Así que, para evitar patologías, el hiperespacio "más"

[1]También, debido al Teorema 2.4 de [7], es necesario restringirse a espacios métricos y compactos.

grande que consideraremos es:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

con la métrica de Hausdorff, la cual se define a continuación.

Dado un continuo X, definimos $\mathcal{H}\colon 2^X \times 2^X \to [0,\infty)$ como

$$\mathcal{H}(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A)\},$$

donde $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$ la bola abierta de radio ε alrededor de A. A $\mathcal{H}$ se la llama la *métrica de Hausdorff*.

Intuitivamente, dos elementos de 2^X están cerca con respecto a la métrica de Hausdorff si “se parecen mucho” y uno está encima del otro. Por otra parte, aunque dos elementos de 2^X se intersequen, pueden estar lejos en la métrica que estamos considerando. En la Figura 14 se ilustra esto.

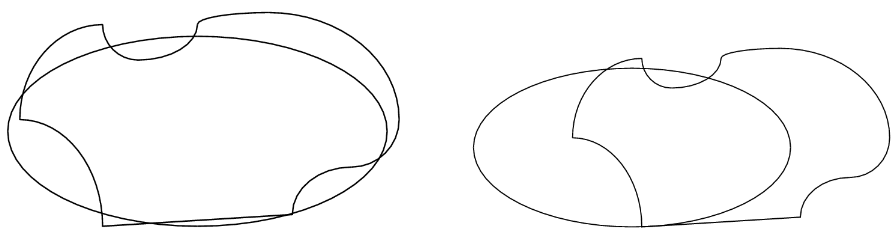

Figura 14.

Los otros hiperespacios asociados a un continuo X que más se han estudiado son:

$$\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\};$$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\};$$

$$\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}^2\};$$

aquí $n \in \mathbb{N}$. A $\mathcal{F}_n(X)$ se lo llama el *n–ésimo producto simétrico de X*, y a $\mathcal{C}_n(X)$ se lo llama el *n–ésimo hiperespacio de X*. Observemos que $\mathcal{C}_1(X) = \mathcal{C}(X)$, y que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes inclusiones:

$$\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}_{n+1}(X), \qquad \mathcal{C}_n(X) \subset \mathcal{C}_{n+1}(X) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{C}_n(X).$$

La historia de los hiperespacios es tan antigua como la historia de la topología (en [24] se incluye una breve historia de los hiperespacios).

[2]Cuando un espacio no es de una sola pieza, a los “pedazos más grandes” se los llama *componentes*. Por ejemplo, si $X = [0,1] \cup [8,24] \subset \mathbb{R}$, entonces las componentes de X son $[0,1]$ y $[8,24]$.

Dado un continuo X, los hiperespacios que más se han estudiado son 2^X y $\mathcal{C}(X)$ (véase [7] y [24]). Tres artículos recientes sobre el n–ésimo producto simétrico de continuos son [6], [10] y [11].

Con respecto al n–ésimo hiperespacio de un continuo, la situación es un poco diferente. En [26, *Théorème* II_m] lo único que se prueba es que si X es un continuo localmente conexo, entonces $\mathcal{C}_m(X)$, denotado como $(2^X)_m$, es un retracto absoluto para cada $m \in \mathbb{N}$. En [8, *Remark*, pág. 29] el autor menciona, sin demostración, que algunos de sus resultados son ciertos para el n–ésimo hiperespacio de un continuo. Dado un continuo X, en [23], en [24] y en [4] se investiga la accesibilidad por arcos de los elementos de $\mathcal{F}_1(X)$ desde puntos en $\mathcal{C}_2(X)$. En [24, (0.48)] se define el n–ésimo hiperespacio de un continuo, y en [24, (0.71.2)] se define una función $f\colon \mathcal{C}_2(X) \to \mathcal{F}_2(\mathcal{C}(X))$ como

$$f(K) = \{A \in \mathcal{C}(X) \mid A \text{ es una componente de } K\}$$

y se pide probar que f no es suprayectiva y que nunca es continua. A nuestro entender, esto es lo único hecho sobre el n–ésimo hiperespacio de un continuo antes de la publicación de [13]. Otros artículos sobre este tema son [2], [5], [14], [15], [16], [17], [19], [20] y [21].

Encontrar modelos para el n–ésimo hiperespacio de un continuo es bastante difícil. Sólo se conocen dos de ellos. Durante su visita a la Universidad Nacional Autónoma de México en diciembre de 1999, R. Schori demostró que un modelo para $\mathcal{C}_2([0,1])$ es $[0,1]^4$. En [5] se prueba que un modelo para $\mathcal{C}_2(\mathcal{S}^1)$ es el cono sobre el toro sólido (el toro sólido es el conjunto $\mathcal{S}^1 \times B$, donde B es el disco unitario definido en el Ejemplo 3).

En la siguiente sección enunciaremos algunas de las propiedades principales de los hiperespacios antes mencionados. Aquí daremos las definiciones necesarias.

Una *n–celda* es cualquier espacio homeomorfo a $[0,1]^n$. El *cubo de Hilbert* es cualquier espacio homeomorfo a $[0,1]^\infty$.

Diremos que un continuo X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos distintos x_0 y x_1 de X existe una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. A α se le llama *un arco*. Se dice que un arco en X es *libre* si $\alpha((0,1))$ es un subconjunto abierto de X.

Sea X un continuo.

(1) Definimos

$$\cup\colon 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$$

como

$$\cup(\mathcal{A}) = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

En [24, (1.48)] se prueba que esta función está bien definida y cumple, además, que

$$\mathcal{H}(\cup(\mathcal{A}_1), \cup(\mathcal{A}_2)) \leq \mathcal{H}^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2),$$

donde $\mathcal{H}^2$ es la métrica de Hausdorff para 2^{2^X}.

(2) Sean A y B dos elementos de 2^X tales que $A \subset B$. Un *arco ordenado de A a B* es una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \longrightarrow 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y, para cualesquiera $s, t \in [0,1]$ tales que $s < t$, se tiene que $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$. Intuitivamente, esto nos dice que podemos "inflar" a A hasta B de manera continua.

(3) Un subconjunto A de X es *no denso en ninguna parte* si su cerradura no tiene interior en X. Esto es, A es "muy flaquito" comparado con X.

(4) X es *contraíble* si existe una función continua $G\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que $G((x,0)) = x$ y $G((x,1)) = p$ para toda $x \in X$ y alguna $p \in X$. Esto significa que podemos "deformar" a X hasta un punto.

(5) X tienen la *propiedad de Kelley* siempre que para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que si $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y $a \in A \in \mathcal{C}(X)$, se tiene que existe $B \in \mathbb{C}(X)$ tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A,B) < \varepsilon$. Esto nos dice que siempre hay continuos muy cercanos en "todas las direcciones".

(6) X es *unicoherente* si cada vez que $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexa. Esto nos indica que no hay cierto tipo de agujeros.

4. Algunas propiedades de los hiperespacios

Aquí daremos algunas de las propiedades que satisfacen los hiperespacios de continuos. No se presentan las demostraciones de los resultados que se enuncian, pues algunas son muy complicadas y escapan la intención del presente trabajo. Se indican las referencias en donde se pueden encontrar las pruebas.

En lo que resta, X denotará un continuo y n un número natural.

(1) La función $f\colon X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ definida como

$$f((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

es continua y suprayectiva. En consecuencia, $\mathcal{F}_n(X)$ es un continuo [1].

(2) $\mathcal{F}_n(X)$ es arcoconexo si y sólo si X es arcoconexo [3].

(3) 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ son continuos arcoconexos ([24] y [13]).

(4) Sean $A, B \in 2^X$. Entonces existe un arco ordenado de A a B si y sólo si $A \subset B$ y cada componente de B interseca A [24].

(5) Si $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ es un arco ordenado y $\alpha(0) \in \mathcal{C}_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\alpha(t) \in \mathcal{C}_n(X)$ para todo $t \in [0,1]$ [2].

(6) Existe una función continua $\mu\colon 2^X \to [0,1]$ tal que:

(a) $\mu(X) = 1$,

(b) $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$,

(c) $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subset B$ y $A \neq B$.

A μ se la llama un *función de Whitney*. Este tipo de funciones nos sirven para medir, de alguna manera, el "tamaño" de los elementos de 2^X. Ha resultado una herramienta muy importante pare el estudio de $\mathcal{C}(X)$, pues la restricción de μ a $\mathcal{C}(X)$ es abierta, esto es, manda conjuntos abiertos de $\mathcal{C}(X)$ en conjuntos abiertos de $[0,1]$, y $\mu^{-1}(t) \cap \mathcal{C}(X)$ es conexo para toda $t \in [0,1]$, lo cual no es cierto para los demás hiperespacios ([7] y [24]).

(7) 2^X siempre contiene copias del cubo de Hilbert y $\mathcal{C}_n(X)$ siempre contiene n–celdas. En particular, si X contiene un arco entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene $2n$–celdas ([24] y [13]).

(8) Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{C}_n(X)$, entonces $\cup(\mathcal{A}) = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ tiene a lo más n componentes. En particular, si $\mathcal{A}$ es cerrado, entonces $\cup(\mathcal{A}) \in \mathcal{C}_n(X)$ [14].

(9) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es localmente conexo;

(b) 2^X es localmente conexo;

(c) $\mathcal{C}_n(X)$ es localmente conexo;

(d) $\mathcal{F}_n(X)$ es localmente conexo ([24], [10] y [13]).

Para 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ se puede afirmar mucho más todavía:

(10) X es localmente conexo si y sólo si 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert [24].

(11) X es localmente conexo y sin arcos libres si y sólo si $\mathcal{C}_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert [13].

(12) $\mathcal{C}_n(X)$ no es denso en ninguna parte tanto en $\mathcal{C}_{n+1}(X)$ como en 2^X [13].

(13) 2^X es contraíble si y sólo si $\mathcal{C}_n(X)$ es contraíble [13].

(14) Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ son contraíbles ([24] y [13]).

(15) 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ siempre son unicoherentes. Si $n \geq 3$, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es unicoherente ([24], [9] y [13]).

(16) Siempre existe una función continua y suprayectiva de 2^X en $\mathcal{C}_n(X)$ [14].

(17) Si $\mathcal{E}_n = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{2n} \leq 1\}$, entonces la función $f \colon \mathcal{E}_n \to \mathcal{C}_n([0,1])$ dada por

$$f((x_1, \ldots, x_{2n})) = \bigcup_{j=1}^{n} [x_{2j-1}, x_{2j}]$$

es continua y suprayectiva. Además, $\mathcal{E}_n/\mathcal{G}_f$ es homeomorfo a $\mathcal{C}_n([0,1])$, donde $\mathcal{G}_f = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{C}_n([0,1])\}$ y $\mathcal{E}_n/\mathcal{G}_f$ es el espacio cociente [14].

Hay muchos artículos escritos sobre hiperespacios. Sería imposible incluir todos los posibles resultados. Hemos presentado algunos de los más representativos. Esperamos que el lector llegue a la conclusión de que el conjunto potencia de un continuo es un "monstruo", que sus subconjuntos que llamamos hiperespacios tienen una bonita estructura y que, además, son "más decentes" que los continuos en general.

Referencias

[1] K. Borsuk and S. Ulam. "On symmetric products of topological spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 875–882.

[2] J. J. Charatonik, A. Illanes and S. Macías. "Induced mappings on the hyperspaces $\mathbb{C}_n(X)$ of a continuum X", *Houston J. Math.*, **28** (2002), 781–805.

[3] D. Curtis and N. T. Nhu. "Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$–dimensional linear metric spaces", *Topology Appl.*, **19** (1985), 251–260.

[4] J. Grispolakis and E. D. Tymchatyn. "Irreducible continua with nondegenerate end–tranches and arcwise accessibility in hyperspaces", *Fund. Math.*, **100** (1980), 117–130.

[5] A. Illanes. "A model for the hyperspace $\mathcal{C}_2\left(\mathcal{S}^1\right)$", Q & A *in General Topology*, **22** (2004), 117–130.

[6] A. Illanes, S. Macías and S. B. Nadler. "Symmetric products and $\mathcal{Q}$–manifolds", *Geometry and Topology in Dynamics, Contemporary Math. Series of Amer. Math. Soc.*, Vol. 246, 1999, Providence, RI, 137–141.

[7] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[8] J. L. Kelley. "Hyperspaces of a continuum", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 22–36.

[9] S. Macías. "Hiperespacios y productos simétricos de continuos", *Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones #27*, Sociedad Matemática Mexicana, (2000), 211–223.

[10] S. Macías. "On symmetric products of continua", *Topology Appl.*, **92** (1999), 173–182.

[11] S. Macías. "Aposyndetic properties of symmetric products of continua", *Topology Proc.*, **22** (1997), 281–296.

[12] S. Macías. "Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace 2^X", *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3) 5 (1999), 415–418.

[13] S. Macías. "On the hyperspaces $\mathcal{C}_n(X)$ of a continuum X", *Topology Appl.*, **109** (2001), 237–256.

[14] S. Macías. "On the Hyperspaces $\mathcal{C}_n(X)$ of a continuum X", II, *Topology Proc.*, **25** (2000), 255–276.

[15] S. Macías. "On arcwise accessibility in hyperspaces", *Topology Proc.*, **26** (2001–2002), 247–254.

[16] S. Macías. "Connectedness of the hyperspace of closed subsets with at most n components", Q & A *in General Topology*, **19** (2001), 133–138.

[17] S. Macías. "Fans whose hyperspaces are cones", *Topology Proc.*, **27** (2003), 217–222.

[18] S. Macías. *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[19] S. Macías and S. B. Nadler, Jr. "n–fold hyperspaces, cones and products", *Topology Proc.*, **26** (2001–2002), 255–270.

[20] S. Macías and S. B. Nadler, Jr. "Smoothness in n–fold hyperspaces", *Glasnik Mat.*, 37(57) (2002), 365–373.

[21] S. Macías and S. B. Nadler, Jr. "Z–Sets in hyperspaces", Q & A *in General Topology*, **19** (2001), 227–241.

[22] R. Molski. "On symmetric products", *Fund. Math.*, **44** (1957), 165–170.

[23] S. B. Nadler, Jr. "Arcwise accessibility in hyperspaces", *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **138** (1976), 1–29.

[24] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[25] S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[26] M. Wojdisławski. "Rétractes absolus et hyperespaces des continus", *Fund. Math.*, **32** (1939), 184–192.

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
México D. F., C. P. 04510, México
e-mail: `sergiom@matem.unam.mx`