Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 23, No. 2, 2005, pág. 41–44

Convergencia de dos sucesiones

Rafael Castro T.*

Resumen. En este trabajo estudiamos la convergencia, en el espacio de Sóbolev $H^1(\Omega)$, de las sucesiones $\{u_n^+\}$ y $\{u_n^-\}$, obtenidas de la sucesión $\{u_n\}$, con $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y convergente en $H^1(\Omega)$.

1. Introducción

Para comodidad del lector recordamos algunos conceptos y notaciones básicas. Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ y $L^p(\Omega)$ el espacio de las funciones p–integrables sobre Ω, con valores en $\mathbb{R}$. Este espacio está dotado con la norma

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

En el espacio de Sóbolev $H^1(\Omega)$ se considera su norma usual

$$||u|| = \left(||u||_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 1.1. Sea $v \in H^1(\Omega)$; definimos

$$v^+(x) = \text{máx}\{v(x), 0\} \qquad \text{y} \qquad v^-(x) = \text{máx}\{-v(x), 0\}.$$

La abreviatura *c.t.p.* indica que cierta propiedad se tiene para casi todo punto excepto en un conjunto de medida cero.

El lector puede encontrar un buen tratamiento de los anteriores conceptos en [1] y [2].

Una conocida variante del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (T.C.D.L.) (cuya demostración detallada se puede ver en [4, pág. 22]) es la siguiente:

Palabras y frases claves: Espacio de funciones infinitamente diferenciables, espacios de Sobolev, convergencia en $L^2(\Omega)$ y en $H^1(\Omega)$.

MSC2000: Primaria: 46E39. Secundaria: 46E35.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, A.A. 678, *e-mail*: rcastro@uis.edu.co

Teorema 1.2 (Variante del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sean* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones en el espacio* $L^1(\Omega)$*, tales que en casi todo punto de* Ω *se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \int |g_n(x) - g(x)|\, dx = 0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

En las presentes notas formulamos y demostramos la siguiente aplicación de la anterior variante:

Teorema 1.3. *Si* $\{u_n\}$ *es una sucesión en el espacio* $C^{\infty}(\overline{\Omega})$*, tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ *en* $H^1(\Omega)$*, entonces*

$$u_n^+ \to u^+ \quad en \quad H^1(\Omega) \qquad y \qquad u_n^- \to u^- \quad en \quad H^1(\Omega).$$

2. Demostración del Teorema 1.3

Realizaremos la prueba en cuatro pasos:

a) En primer lugar probamos: si $\{v_n\}$ y $\{w_n\}$ son dos sucesiones en $L^2(\Omega)$, tales que para *c.t.p.* $x \in \Omega$ satisfacen:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & w_n(x), \\ w_n(x) & \to & w(x) \quad \text{y en} \quad L^2(\Omega), \\ v_n(x) & \to & v(x), \\ |v_n(x)| & \leq & w_n(x), \end{array}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \text{en} \quad L^2(\Omega). \tag{1}$$

Demostración. Para casi todo $x \in \Omega$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f_n(x) & = & |v_n(x) - v(x)|^2 \to 0; \\ |f_n(x)| & = & |v_n(x) - v(x)|^2 \leq (|v_n(x)| + |v(x)|)^2 \leq (w_n(x) + |v(x)|)^2. \end{array}$$

Si $g_n(x) = (w_n(x) + |v(x)|)^2$, entonces $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ y $g_n(x) \to (w(x) + |v(x)|)^2$. Por otro lado, tenemos

$$0 \leq |||w_n + |v|||_{L^2} - ||w + |v|||_{L^2}| \leq ||w_n - w||_{L^2},$$

luego

$$||w_n + |v|\ ||_{L^2} \to ||w + |v|\ ||_{L^2}, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

En consecuencia, por el Teorema 1.2 $f_n \to 0$ en $L^1(\Omega)$, esto es (1). ☑

b) Afirmamos que:

$$D_j|u_n| = (\text{signo } u_n)D_j u_n \quad \to \quad (\text{signo } u)D_j u = D_j|u| \quad \text{en} \quad L^2(\Omega). \tag{2}$$

Demostración. Veamos que cualquier subsucesión de $\{u_n\}$ contiene una subsucesión que verifica (2).

Considerando una subsucesión de $\{u_n\}$ que denotamos en la misma forma, tenemos $u_n \to u$ en $L^2(\Omega)$ y $D_j u_n \to D_j u$ en $L^2(\Omega)$; entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ tal que para *c.t.p.* $x \in \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned} u_{n_k}(x) &\to u(x), \\ D_j u_{n_k}(x) &\to D_j u(x). \end{aligned}$$

Entonces

$$|u_{n_k}(x)| \quad \to \quad |u(x)|, \tag{3}$$

$$|D_j u_{n_k}(x)| \quad \to \quad |D_j u(x)| \quad \text{y en} \quad L^2(\Omega). \tag{4}$$

• Sea $E = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$; entonces

$$(\text{signo } u_{n_k}(x))D_j u_{n_k}(x) \longrightarrow 0 = D_j|u|(x), \quad \text{c.t.p.} \quad x \in E. \tag{5}$$

Sea $x \in \Omega - E$:

•• Si $u(x) > 0$, entonces

$$(\text{signo } u_{n_k}(x))D_j u_{n_k}(x) \longrightarrow D_j u(x) = (\text{signo } u(x))D_j u(x) = D_j|u|(x). \tag{6}$$

• • • Si $u(x) < 0$, entonces

$$(\text{signo } u_{n_k}(x))D_j u_{n_k}(x) \longrightarrow -D_j u(x) = (\text{signo } u(x))D_j u(x) = D_j|u|(x). \tag{7}$$

De (5), (6) y (7) obtenemos

$$D_j|u_{n_k}|(x) \longrightarrow D_j|u|(x) \quad c.t.p. \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Por otro lado, tenemos

$$|D_j|u_{n_k}|(x)| = |\text{signo } u_{n_k}(x)|\ |D_j u_{n_k}(x)| \leq |D_j u_{n_k}(x)|. \tag{9}$$

De (4), (8), (9) y el paso (a), obtenemos

$$D_j|u_{n_k}| \to D_j|u| \quad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

Entonces se tiene (2). ☑

c) Ahora veamos que

$$|u_n| \to |u| \quad \text{en} \quad L^2(\Omega). \tag{10}$$

En efecto,

$$0 \leq \int_\Omega \big||u_n| - |u|\big|^2 \leq \int_\Omega |u_n - u|^2.$$

De (2) y (10) se obtiene

$$|u_n| \to |u| \quad \text{en} \quad H^1(\Omega). \tag{11}$$

d) Como $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$ y $|u_n| \to |u|$ en $H^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} u_n^+ = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) \quad &\to \quad \frac{1}{2}(|u| + u) = u^+ \quad \text{en} \quad H^1(\Omega), \\ u_n^- = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) \quad &\to \quad \frac{1}{2}(|u| - u) = u^-, \quad \text{en} \quad H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Referencias

[1] R. A. ADAMS. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. BRÉZIS. *Análisis funcional. Téoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[3] L.C. EVANS. *Partial differential equations*, Graduate Studies in Matematics, volume 19, American Mathematical Society, 1998.

[4] L. C. EVANS & R. F. GARIEPY. *Lectures notes on measure theory and fine properties of functions*, University of Kentucky, Department of Mathematics, CRC Press, 1992.

RAFAEL CASTRO T.
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia, A.A. 678
e-mail: rcastro@uis.edu.co