

## Geometría y topología del tronco de cono elíptico

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ\*

**Resumen.** Se concibe una función convexa  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  para la cual el conjunto de nivel  $f^{-1}([0, r])$  es un tronco de cono elíptico  $\mathfrak{F}$ , macizo y cerrado, para un cierto número real  $r > 0$ . Se calcula su volumen, y en particular, cuando  $\mathfrak{F}$  es circular, los radios de sus bases. También, dado un tronco de esta naturaleza, se construye una representación cartesiana suya. Al trascender la geometría del sólido  $\mathfrak{F}$ , se establece un criterio de concurrencia cónica: cuándo dos elipses paralelas en  $\mathbb{R}^3$  son secciones de corte de una hoja cónica, además de otros resultados afines.

### Introducción

El tronco de cono elíptico  $\mathfrak{F}$  es el sólido comprendido entre dos planos que intersecan una hoja cónica elíptica. Su geometría ha resultado sutilmente evasiva a toda intención de abordarla profundamente, y hasta el presente su visión y enfoque han sido solo clásicos. De por sí, un sólido que dado su carácter trunco, es de naturaleza compleja y aún desconocida.

Sin embargo, es gratificante poder compartir y comunicar a lo largo del presente documento, cómo la geometría de  $\mathfrak{F}$  se concibe y subyace en nociones muy importantes del álgebra lineal, articuladas profusamente con topología, análisis convexo y geometría afín. Un contexto teórico ajeno a toda la geometría tradicional sobre  $\mathfrak{F}$ .

La geometría rigurosa de  $\mathfrak{F}$  se expresa, básicamente, en términos de una matriz simétrica positivamente definida de orden tres, un vector unitario en  $\mathbb{R}^3$  y una función convexa  $f$  sobre  $\mathbb{R}^3$  (Teorema 1.1). El resultado es un modelo matemático que nos permite trascender la geometría de  $\mathfrak{F}$ , vislumbrando propiedades, aún no establecidas, sobre la hoja cónica elíptica (Sección 4).

Además, utilizando los elementos componentes de  $f$  y aplicando un importante resultado de la geometría afín, se calcula el volumen de  $\mathfrak{F}$ , y en particular los radios de sus bases, cuando es un tronco circular (Teorema 2.1). Igualmente, dado un tronco de cono elíptico se construye explícitamente su representación cartesiana (Teorema 3.1), un resultado hasta hoy ignorado.

---

**Palabras y frases claves:** función convexa, geometría de sólidos, hoja cónica, geometría afín.

**MSC2000:** Primaria: 51M15. Secundaria: 51M20, 51M99.

\* Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, Colombia, e-mail: leruizh@yahoo.es.

Las descripciones teóricas anteriores tienen implicaciones relevantes para la hoja cónica elíptica. Así, se establece que todo corte plano de una hoja cónica elíptica, paralelo a su directriz, es también una elipse, hecho que atañe propiedades de colinealidad entre sus centros, focos y ápice de la hoja, a la vez correlacionadas con ciertos elipsoides, en una trama que involucra la noción obligada de homotecia (Teoremas 4.1 y 4.2).

Rematamos el trabajo consignando una condición necesaria y suficiente para que dos elipses paralelas en  $\mathbb{R}^3$  sean secciones de corte de una hoja cónica (Teorema 4.3, un **criterio de concurrencia cónica**).

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los puntos o vectores fila de  $\mathbb{R}^3$ , mediante una cruz  $\times$  el producto vectorial, y por  $Q^T$  la transpuesta de una matriz arbitraria  $Q$ . En particular, el producto matricial  $AB^T$ , indicará entonces, el producto interior usual  $\cdot$  de dos vectores (fila)  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Los Teoremas 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 4.2 y 4.3, consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

## 1. El tronco de cono elíptico como un conjunto de nivel

**Teorema 1.1.** Sean  $Q$  una matriz simétrica positivamente definida de orden tres,  $A$  un vector unitario en  $\mathbb{R}^3$ ,  $a > 1$  y  $r > 0$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función representada por

$$f(X) = \max \{ \|(XQ) \times A\| + XQA^T, \quad aXQA^T, \quad r - XQA^T \}, \quad (1)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^3$ .

Consideremos, además la región elíptica  $\mathcal{E}_1$  cerrada en  $\mathbb{R}^3$  de centro  $a^{-1}rAQ^{-1}$  representada por

$$XQ^2X^T \leq c^2 \quad y \quad XQA^T = a^{-1}r, \quad (2)$$

donde

$$c = a^{-1}r\sqrt{(a-1)^2 + 1}; \quad (3)$$

y la región elíptica  $\mathcal{E}_2$  cerrada en  $\mathbb{R}^3$  de centro el origen  $\mathbf{0}$ , representada por

$$XQ^2X^T \leq r^2 \quad y \quad XQA^T = 0. \quad (4)$$

Entonces, el conjunto de nivel

$$\mathfrak{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) \leq r\} \quad (5)$$

es un tronco de cono macizo cerrado elíptico de base menor  $\mathcal{E}_1$  y base mayor  $\mathcal{E}_2$ . El sólido proviene de truncar el cono elíptico macizo de ápice  $rAQ^{-1}$  y base  $\mathcal{E}_2$  (ver Figura 1).

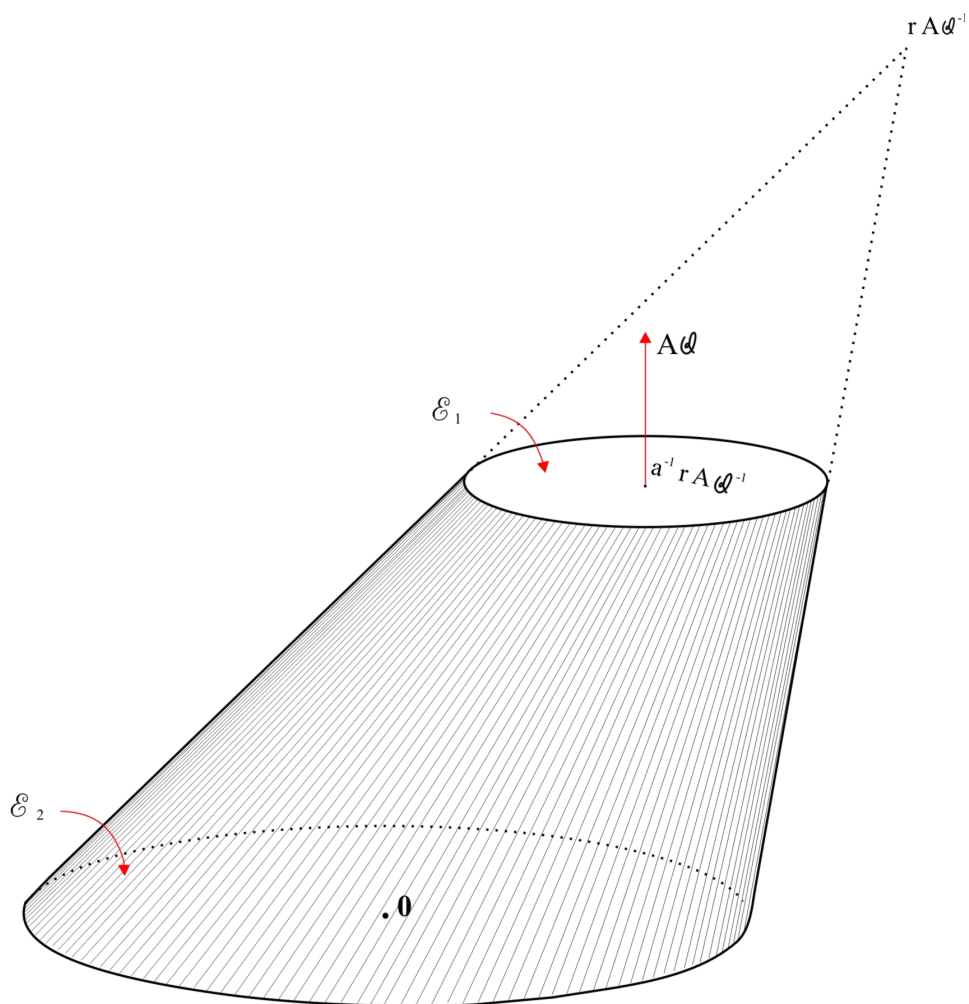


Figura 1. Tronco de cono macizo cerrado elíptico  $\mathfrak{F}$  de bases elípticas paralelas  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ .

*Demostración.* Por ser  $\mathcal{Q}$  una matriz simétrica, positivamente definida, también lo es  $\mathcal{Q}^2$ , y las desigualdades en (2) y (4) representan elipsoides macizos cerrados concéntricos en  $\mathbf{0}$  [3, pp. 283–285]. Razón por la cual sus intersecciones  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  con los planos dados en (2) y (4), respectivamente, son, en efecto, regiones elípticas cerradas.

Si  $X$  es un punto de  $\mathcal{E}_1$ , hagamos

$$Y = \frac{a}{a-1}X - \frac{r}{a-1}A\mathcal{Q}^{-1};$$

entonces

$$\begin{aligned} Y\mathcal{Q} &= \frac{a}{a-1}X\mathcal{Q} - \frac{r}{a-1}A, \\ Y\mathcal{Q}A^T &= \frac{a}{a-1}X\mathcal{Q}A^T - \frac{r}{a-1} && (A \text{ es unitario}) \\ &= \frac{r}{a-1} - \frac{r}{a-1} = 0 && (\text{por (2)}), \\ Y\mathcal{Q}^2Y^T &= \frac{a^2}{(a-1)^2}X\mathcal{Q}^2X^T - \frac{r^2}{(a-1)^2} \\ &\leq \frac{a^2c^2}{(a-1)^2} - \frac{r^2}{(a-1)^2} = r^2, && (\text{por (2) y (3)}), \end{aligned}$$

es decir,  $Y \in \mathcal{E}_2$ . Así, la función  $g : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  representada por

$$g(X) = \frac{a}{a-1}X - \frac{r}{a-1}A\mathcal{Q}^{-1} \quad (6)$$

para todo  $X \in \mathcal{E}_1$ , está bien definida. Además, es fácil probar que es biyectiva, por lo cual  $g(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ .

El punto  $V = rA\mathcal{Q}^{-1}$  no está en el plano  $X\mathcal{Q}A^T = 0$  de  $\mathcal{E}_2$ , y por ende el cono macizo cerrado  $\mathcal{C}$  de base  $\mathcal{E}_2$  y ápice  $V$  no es degenerado (ver Figura 1).

Por ser  $X - V \neq \mathbf{0}$ , para todo  $X \in \mathcal{E}_1$  (lo contrario es imposible por ser  $a > 1$ ), entonces el rayo  $\overrightarrow{VX}$  de ecuación

$$\alpha(t) = V + t(X - V), \quad t \geq 0,$$

es, también, no degenerado. Y se satisfacen, teniendo presente (6), las relaciones

$$\alpha(0) = V, \quad \alpha(1) = X, \quad \alpha\left(\frac{a}{a-1}\right) = g(X);$$

consecuentemente el punto  $X$  está entre  $V$  y  $g(X)$ , un punto de la generatriz  $\overline{Vg(X)}$  del cono  $\mathcal{C}$ . Esto significa que la región elíptica cerrada  $\mathcal{E}_1$  es la sección de corte al truncar el cono  $\mathcal{C}$  con el plano  $X\mathcal{Q}A^T = a^{-1}r$ , por lo cual las regiones paralelas  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  son, en efecto, las bases menor y mayor, respectivamente, de un tronco de cono macizo cerrado, el cual denotaremos por  $\mathcal{H}$ . Pero entonces, dada la biyectividad de  $g$ ,

$$\mathcal{H} = \bigcup_{X \in \mathcal{E}_1} \overline{Xg(X)}. \quad (7)$$

Si  $X$  es un punto de  $\mathcal{E}_1$  e  $Y = g(X)$ , entonces a la luz de (2) y (6), obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha X + (1 - \alpha)Y &= \frac{a - \alpha}{a - 1}X - \frac{(1 - \alpha)r}{a - 1}AQ^{-1}, \\ \{\alpha X + (1 - \alpha)Y\}QA^T &= a^{-1}\alpha r, \\ \{\alpha X + (1 - \alpha)Y\}Q \times A &= \frac{a - \alpha}{a - 1}(XQ) \times A, \\ \|\{\alpha X + (1 - \alpha)Y\}Q \times A\| &= \frac{a - \alpha}{a - 1}\sqrt{XQ^2X^T - a^{-2}r^2} \quad (8) \\ &\quad \text{(Identidad de Lagrange)} \\ &\leq r - a^{-1}\alpha r \quad \text{por ((2) y (3)),}\end{aligned}$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , expresiones que implican, en (1),

$$f(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq r, \quad \text{para todo } X \in \mathcal{E}_1,$$

dado que el máximo es la menor de las cotas superiores. Pero entonces

$$f(\overline{XY}) = f(\overline{Xg(X)}) \leq r$$

para todo  $X \in \mathcal{E}_1$ , o bien, según (5) y (7),

$$\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}. \quad (9)$$

Si  $X$  es un punto de  $\mathcal{E}_1$ , se sigue de (6) la equivalencia

$$XQ^2X^T = c^2 \quad \text{si y sólo si} \quad g(X)Q^2g(X)^T = r^2;$$

en otras palabras,  $X$  es un punto de la frontera relativa de  $\mathcal{E}_1$  si y sólo si  $g(X)$  es un punto de la frontera relativa de  $\mathcal{E}_1$ . Bajo estas condiciones  $\overline{Xg(X)}$  es una generatriz de  $\mathcal{H}$ ; así, teniendo presente (8), obtenemos

$$f(\overline{Xg(X)}) = r \text{ para todo punto } X \text{ en la frontera relativa de } \mathcal{E}_1. \quad (10)$$

Igualmente, si  $X$  es un punto de  $\mathcal{E}_1$ , es decir, si  $X$  satisface las condiciones en (2), entonces

$$\begin{aligned}\|(XQ) \times A\|^2 &= \|XQ\|^2 - (XQA^T)^2 \\ &= XQ^2X^T - (XQA^T)^2 \\ &= XQ^2X^T - a^{-2}r^2 \\ &\leq c^2 - a^{-2}r^2 = (r - a^{-1}r)^2, \\ \|(XQ) \times A\| &\leq r - a^{-1}r, \\ \|(XQ) \times A\| + XQA^T &\leq r,\end{aligned}$$

$$aXQA^T = r, \quad r - XQA^T = r - a^{-1}r < r,$$

expresiones últimas que implican  $f(X) = r$ , es decir,  $f(\mathcal{E}_1) = r$ . Análogamente se demuestra que  $f(\mathcal{E}_2) = r$ . De aquí y (10) se desprende que

$$f(Fr(\mathcal{H})) = r,$$

donde  $Fr(\mathcal{H})$  denota la frontera de  $\mathcal{H}$ . Pero entonces

$$Fr(\mathcal{H}) \subseteq Fr(\mathfrak{F}), \quad (11)$$

dado que

$$Fr(\mathfrak{F}) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = r\}, \quad (12)$$

por ser  $f$  una función real convexa (el máximo de tres funciones convexas), propia y cerrada ([2, pp. 35–36, Theorem 5.5; p. 59, Corollary 7.6.1]).

El punto

$$P = \frac{a^{-1}r}{2}AQ^{-1}$$

satisface

$$f(P) = \frac{r}{2}(2 - a^{-1}) < r,$$

por lo cual  $P$  es un punto interior de  $\mathfrak{F}$  (ver referencia anterior). Pero también  $P$  es un punto interior del tronco de cono  $\mathcal{H}$  por ser el punto medio del segmento de recta que une los centros de sus bases.

Si  $X$  es un punto de  $\mathfrak{F} \sim \mathcal{H}$ , entonces  $X$  es un punto interior de  $\mathbb{R}^3 \sim \mathcal{H}$ , por ser  $\mathcal{H}$  cerrado, y el segmento  $\overline{PX} \subseteq \mathfrak{F}$  (un conjunto convexo) corta a  $Fr(\mathcal{H})$  en un punto  $U$  entre  $P$  y  $X$ , esto es,  $U \in \text{int}(\mathfrak{F})$  ([2, p. 45, Teorema 6.1]), y además por (1),  $U \in Fr(\mathfrak{F})$ , lo cual es imposible. Por tanto  $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{H}$ , que al unísono con (9) implica  $\mathfrak{F} = \mathcal{H}$ .  $\square$

## 2. Un automorfismo de $\mathbb{R}^3$ y el volumen del sólido

En un contexto del álgebra lineal calcularemos el volumen del tronco de cono  $\mathfrak{F}$  aplicando un importante resultado de la geometría afín, desafortunadamente ignorado en nuestro medio.

**Teorema 2.1.** *Sea  $\mathfrak{F}$  el tronco de cono elíptico descrito bajo todas las hipótesis y partes del Teorema 1.1. Entonces*

(i) *El volumen de  $\mathfrak{F}$  es*

$$\frac{\pi}{3}a^{-3}r^3(3a^2 - 3a + 1)(\det Q)^{-1}.$$

(ii) *Si  $\mathfrak{F}$  es un tronco de cono circular, el radio de su base menor es  $(1 - a^{-1})\rho$ , donde*

$$\rho = r\|AQ\|^{1/2}(\det Q)^{-1/2}$$

*es el radio de la base mayor.*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  los conos macizos cerrados de ápice común  $rA\mathcal{Q}^{-1}$  y bases  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_1$ , respectivamente (ver Figura 1). Teniendo en mente (2), (3) y (4), si  $\varphi$  es el automorfismo de  $\mathbb{R}^3$  definido por  $\varphi(X) = X\mathcal{Q}$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^3$ , entonces las expresiones

$$\|\varphi(X)\|^2 = X\mathcal{Q}^2X^T,$$

$$\{\varphi(X) - \varphi(\mathbf{0})\}\varphi(rA\mathcal{Q}^{-1})^T = rX\mathcal{Q}A^T$$

y

$$\{\varphi(X) - \varphi(a^{-1}rA\mathcal{Q}^{-1})\}\varphi(rA\mathcal{Q}^{-1})^T = rX\mathcal{Q}A^T - a^{-1}r^2$$

nos ponen de manifiesto que  $\varphi(\mathcal{C})$  y  $\varphi(\mathcal{C}')$  son conos de revolución de ápice común  $\varphi(rA\mathcal{Q}^{-1}) = rA$ , bases circulares de centros  $\mathbf{0}$  y  $a^{-1}rA$ , respectivamente. Entonces  $\varphi(X)\varphi(\mathbf{0})\varphi(rA\mathcal{Q}^{-1})$ , es decir,  $\varphi(X)\mathbf{0}(rA)$ , es un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud  $r$  para todo punto  $X$  de la frontera relativa de la base  $\mathcal{E}_2$  de  $\mathcal{C}$ . Por esto el radio (de la base) y la altura de  $\varphi(\mathcal{C})$  son iguales a  $r$ . Análogamente, el radio y la altura de  $\varphi(\mathcal{C}')$  son iguales a

$$\{a^{-2}r^2[(a-1)^2 + 1] - \|\varphi(a^{-1}rA\mathcal{Q}^{-1})\|^2\}^{1/2} = (1-a^{-1})r.$$

De este modo, los volúmenes de  $\varphi(\mathcal{C})$  y  $\varphi(\mathcal{C}')$  son, respectivamente,

$$\frac{\pi}{3}r^3 \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3}(1-a^{-1})^3r^3,$$

y por ende

$$v \det \mathcal{Q} = \frac{\pi}{3}r^3 \quad \text{y} \quad v' \det \mathcal{Q} = \frac{\pi}{3}(1-a^{-1})^3r^3,$$

donde  $v$  y  $v'$  son los volúmenes de los conos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ , respectivamente ([1, pp. 243, Corollary]). Se infiere que

$$\text{volumen de } \mathfrak{F} = v - v'.$$

Ahora, las distancias del ápice de  $\mathcal{C}$  a los planos dados en (4) y (2), son

$$\frac{|(rA\mathcal{Q}^{-1})(A\mathcal{Q}^T)|}{\|A\mathcal{Q}\|} = r\|A\mathcal{Q}\|^{-1}$$

y

$$\frac{|(rA\mathcal{Q}^{-1})(A\mathcal{Q}^T) - a^{-1}r|}{\|A\mathcal{Q}\|} = (1-a^{-1})r\|A\mathcal{Q}\|^{-1},$$

respectivamente. Además, si  $g: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  es la biyección representada por (6), entonces  $g(X)$  también toma la forma

$$Y = g(X) = \frac{a}{a-1}\{X - a^{-1}rA\mathcal{Q}^{-1}\},$$

lo que implica

$$\|Y - \mathbf{0}\| = \frac{a}{a-1}\|X - a^{-1}rA\mathcal{Q}^{-1}\|,$$

donde, recordemos,  $\mathbf{0}$  y  $a^{-1}rAQ^{-1}$  son los centros de las bases  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_1$  de  $\mathfrak{F}$ . Se deduce de la expresión anterior la siguiente equivalencia:

“Una base de  $\mathfrak{F}$  es un círculo si y sólo si la otra base es un círculo”.

Por tanto, si  $\mathfrak{F}$  es un tronco de cono circular (esto es,  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  son círculos), entonces

$$\frac{\pi}{3}\rho^2r \|A\mathcal{Q}\|^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3}\rho'^2(1-a^{-1}r) \|A\mathcal{Q}\|^{-1}$$

son los volúmenes de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ , con bases de radio  $\rho$  y  $\rho'$ , respectivamente. Igualando estas expresiones a  $v$  y  $v'$ , obtenemos  $\rho$  y  $\rho'$  respectivamente.  $\square$

### 3. Representación cartesiana de un tronco de cono elíptico dado

**Teorema 3.1.** *Sea dado un tronco de cono elíptico macizo cerrado  $\mathfrak{F}$ , tal que*

- (i)  *$C$  es el centro de su base menor.*
- (ii) *El origen  $\mathbf{0}$  es el centro de su base mayor.*
- (iii) *El ápice de su cono de procedencia está a una distancia  $h$  de  $\mathbf{0}$ .*
- (iv)  *$P_1$  y  $P_2$  son dos puntos dados de la frontera relativa de su base mayor, satisfaciendo*

$$\Delta = \det(P_1, P_2, C) \neq 0.$$

Sea  $W$  la matriz cuadrada no singular de orden tres, con primera, segunda y tercera columnas

$$a(P_2 \times C)^T, \quad a(-P_1 \times C)^T, \quad (P_1 \times P_2)^T,$$

respectivamente, donde  $a = h\|C\|^{-1} > 1$ .

Tomemos además  $r = 1$ ,

$$A = |\Delta|^{-1}C\mathcal{O}\Lambda\mathcal{O}^T \quad \text{y} \quad \mathcal{Q} = a^{-1}|\Delta|^{-1}\mathcal{O}\Lambda\mathcal{O}^T$$

donde  $\mathcal{O}$  es la matriz ortogonal de orden tres, cuyas primera, segunda y tercera columnas forman un conjunto completo de vectores propios ortonormales de  $WW^T$ , correspondientes a sus valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , y donde

$$\Lambda = \text{diag} \left( \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3} \right).$$

Si para  $a, r, A$  y  $\mathcal{Q}$  así construidos, consideramos la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida en (1), entonces

$$\mathfrak{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) \leq 1\}, \quad (13)$$

donde

$$Fr(\mathfrak{F}) = f^{-1}(1). \quad (14)$$



*Demostración.* Por ser  $\Delta \neq 0$  entonces  $C \neq \mathbf{0}$ , por lo cual  $a$  está bien definido. Si  $V$  es el ápice del cono de procedencia del tronco  $\mathfrak{F}$ , por ser  $\mathbf{0}$ ,  $C$  y  $V$  colineales ( $C$  entre  $\mathbf{0}$  y  $V$ ), entonces  $V = aC$  con  $a > 0$ , y por ende  $a = \|V\| \|C\|^{-1} = h \|C\|^{-1} > 1$ .

Dado que<sup>1</sup>

$$\det W = \det W^t = a^2 \det(P_2 \times C, -P_1 \times C, P_1 \times P_2) = (a\Delta)^2 \neq 0,$$

entonces  $W$  es no singular, y así  $WW^T$  es una matriz simétrica positivamente definida ([3, pp. 282]). Más adelante será de uso obligatorio la igualdad

$$XW = (aX \cdot (P_2 \times C), \quad aX \cdot (-P_1 \times C), \quad X \cdot (P_1 \times P_2)), \quad (15)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^3$ .

De la descomposición  $WW^T = \mathcal{O}\Lambda^2\mathcal{O}^T$  obtenemos a  $|\Delta|\mathcal{Q} = \mathcal{O}\Delta\mathcal{O}^T$  como la única raíz cuadrada ( $(a|\Delta|\mathcal{Q})^2 = WW^T$ ) simétrica y positivamente definida de  $WW^T$  ([3, pp. 283–285]). Si tomamos  $A$  como en (13), entonces  $A$  es un vector unitario y

$$\begin{aligned} P_i\mathcal{Q}A^T &= a^{-1}\Delta^{-2}P_i(\mathcal{O}\Lambda^2\mathcal{O}^T)C^T = a^{-1}\Delta^{-2}P_iWW^TC^T \\ &= a^{-1}\Delta^{-2}(P_iW)(CW)^T = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

aplicando (15). Similarmente se prueba que  $C\mathcal{Q}A^T = a^{-1}$ . Además,

$$P_i\mathcal{Q}^2P_i^T = (a\Delta)^{-1}\|P_iW\|^2 = 1, \quad i = 1, 2,$$

y

$$C\mathcal{Q}^2C^T = a^{-2}\Delta^{-2}\|CW\|^2 = a^{-2} < \left\{ a^{-1}\sqrt{(1-a)^2 + 1} \right\}^2.$$

De este modo, las expresiones (2), (3) y (4) representan (para  $a, r, A$  y  $\mathcal{Q}$  así construidos aquí), las dos bases elípticas del tronco dado  $\mathfrak{F}$ .

Ahora, el tronco de cono elíptico  $f^{-1}([0, 1])$  representado por (1) y (5) para los citados valores, tiene (de acuerdo al Teorema 1.1) base menor de centro

$$\begin{aligned} a^{-1}rA\mathcal{Q}^{-1} &= a^{-1}\{|\Delta|^{-1}C\mathcal{O}\Lambda\mathcal{O}^T\}\{a^{-1}|\Delta|^{-1}\mathcal{O}\Lambda\mathcal{O}^T\}^{-1} \\ &= (C\mathcal{O}\Lambda\mathcal{O}^T)\{(\mathcal{O}^T)^{-1}\Delta^{-1}\mathcal{O}^{-1}\} = C, \end{aligned}$$

y ambas bases elípticas representadas, justamente, como las del tronco de cono dado  $\mathfrak{F}$ . Concluimos así que  $\mathfrak{F} = f^{-1}([0, 1])$ , el conjunto de nivel (13). De (12) se sigue la igualdad en (14).  $\square$

#### 4. Implicaciones

En el presente capítulo se pone en evidencia cómo los Teoremas 1.1 y 3.1 nos ayudan a concebir y a construir demostraciones de algunas importantes propiedades de la hoja cónica elíptica.

<sup>1</sup>Recuérdese la identidad  $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$ .

**Teorema 4.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una hoja cónica elíptica no degenerada de ápice  $V$ , directriz la elipse  $\Lambda_2$  de centro el origen  $\mathbf{0}$ , y focos  $F_{21}, F_{22}$ . Si  $C$  es un punto del rayo  $\overrightarrow{V\mathbf{0}}$ ,  $C$  entre  $\mathbf{0}$  y  $V$ , consideremos la homotecia  $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representada por*

$$\Psi(X) = V + \frac{a}{a-1}(X - V) \quad (16)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^3$ , de centro  $V$  y razón  $a(a-1)^{-1}$ , donde

$$a = \|C\|^{-1}\|V\|. \quad (17)$$

Entonces

(i) *Si  $\mathcal{H}$  es el plano a través de  $C$  paralelo al plano de  $\Lambda_2$ , entonces la curva  $\Lambda_1 = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$  es una elipse de centro  $C$ , tal que  $\Lambda_2 = \Psi(\Lambda_1)$ . Es decir,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son curvas homotéticas (o semejantes).*

(ii) *Los focos de  $\Lambda_1$  son*

$$F_{1i} = \Psi^{-1}(F_{2i}) = \frac{a-1}{a}F_{2i} + C, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

*Es decir,  $V, F_{1i}$  y  $F_{2i}$  son también colineales,  $F_{1i}$  entre  $V$  y  $F_{2i}$  (ver Figura 2).*

(iii) *Existen dos elipsoides  $\mathfrak{F}_1$  y  $\mathfrak{F}_2$  de centro común  $\mathbf{0}$ , tales  $\Psi'(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{F}_2$  y  $\Lambda_1$  es una sección elíptica de  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ , donde  $\Psi'$  es la homotecia de  $\mathbb{R}^3$  de centro  $\mathbf{0}$  y razón  $\rho^{-\frac{1}{2}} > 1$ , donde*

$$\rho = a^{-1}\sqrt{(a-1)^2 + 1}. \quad (19)$$

*Demostración.* Dado que  $C$  es un punto entre  $\mathbf{0}$  y  $V$ , entonces  $0 < \|C\| < \|V\|$ , por lo cual  $a > 1$  en (17), y por ende la función  $\Psi$  en (16) está bien definida. Además,  $V = aC$  por ser  $C$  y  $A$  vectores paralelos y del mismo sentido.

Puesto que  $\mathcal{C}$  es una superficie reglada cónica, cada generatriz de  $\mathcal{C}$  pasa por un punto de su directriz elíptica  $\Lambda_2$ , y cada punto de  $\mathcal{C}$  está sobre una generatriz. Así, si  $X \in \Lambda_1$  entonces el rayo (o generatriz)  $\overrightarrow{VX}$  interseca  $\Lambda_2$  en un punto  $Y$ , esto es, existe un escalar  $t > 0$  tal que

$$Y = V + t(X - V). \quad (20)$$

Siendo también  $-Y$  un punto de la elipse  $\Lambda_2$ , por ser  $\Lambda_2$  centralmente simétrica en  $\mathbf{0}$ , entonces la generatriz  $\overrightarrow{V(-Y)}$  interseca  $\Lambda_1$  en un punto  $X'$  (ver Figura 2).

Además de ser  $X$  y  $X'$  puntos del triángulo  $(-Y)VY$ , su mediana  $\overrightarrow{V\mathbf{0}}$  contiene el punto  $C$ , por lo cual  $X', C, X$  están en el plano del triángulo, como también lo están en el plano  $\mathcal{H}$  (dos planos diferentes, dado que  $V \notin \mathcal{H}$ ). Por tanto  $X', C, X$  están en la intersección de dichos planos, es decir,  $X', C$  y  $X$ , son puntos colineales,  $C$  entre  $X'$  y  $X$  tales que  $\overrightarrow{X'X}$  y  $\overrightarrow{(Y')Y}$  son segmentos paralelos, por ser  $\mathcal{H}$  y el plano de  $\Lambda_2$  paralelos.

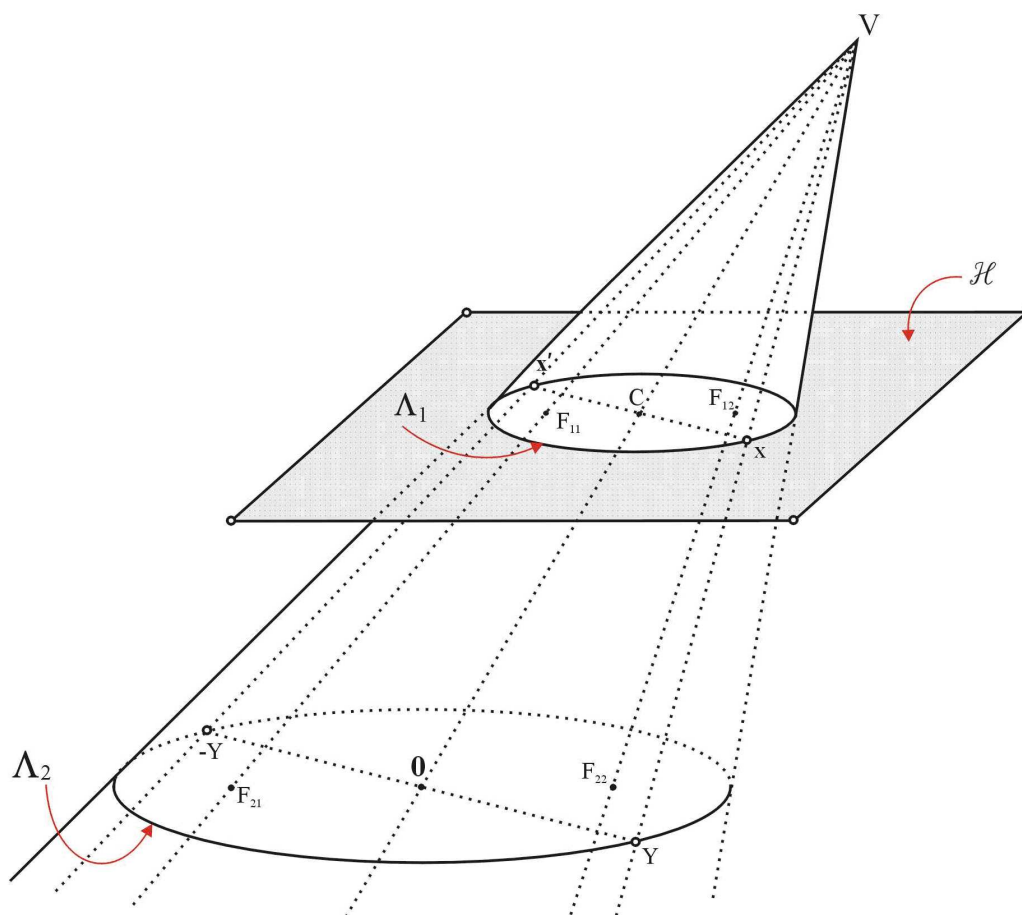


Figura 2. Hoja cónica elíptica  $\mathcal{C}$  de ápice  $V$ , tiene directriz elíptica  $\Lambda_2$  homotética a la intersección  $\Lambda_1 = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ , para todo plano paralelo al plano de  $\Lambda_2$ .

De la semejanza de los triángulos  $VX'C$  y  $V(-Y)\mathbf{0}$ ,  $V CX$  y  $V\mathbf{0}Y$ , se establecen las proporciones

$$\frac{X'C}{(-Y)\mathbf{0}} = \frac{VC}{V\mathbf{0}} = \frac{CX}{\mathbf{0}Y},$$

lo que implica, percibiendo que  $(-Y)\mathbf{0} = \mathbf{0}Y$ ,  $X'C = CX$ , y por esto  $C$  es el punto medio del segmento  $\overline{X'X}$ , explícitamente,  $X' = 2C - X$ . En otras palabras, la curva  $\Lambda_1$  es centralmente simétrica en  $C$ .

Por otro lado, también existe un escalar  $t' > 0$  tal que

$$-Y = V + t'(X' - V),$$

o bien,

$$-Y = V + t'(2C - X - V).$$

De esta expresión, (20) y  $V = aC$ , obtenemos

$$\{a(2 - t' - t) + 2t'\}C + (t - t')X = \mathbf{0},$$

lo que implica, por ser  $C$  y  $X$  linealmente independientes ( $C$  es no degenerada)

$$a(2 - t' - t) + 2t' = 0 \quad \text{y} \quad t - t' = 0;$$

resolviendo aparece  $t = \frac{a}{a-1}$ , valor que en (20) nos aporta

$$Y = V + \frac{a}{a-1}(X - V) = \Psi(X) \quad (\text{por (16)});$$

de aquí y de la biyectividad de  $\Psi$  concluimos que  $\Lambda_2 = \Psi(\Lambda_1)$ , es decir,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son curvas homotéticas (o semejantes).

Ahora, dado que  $\Lambda_2$  es una elipse de focos  $F_{21}$  y  $F_{22}$ , existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\|Y - F_{21}\| + \|Y - F_{22}\| = c,$$

para todo  $Y \in \Lambda_2$ . Así las cosas,

$$\begin{aligned} c &= \|\Psi(X) - F_{21}\| + \|\Psi(X) - F_{22}\| \\ &= \|\Psi(X) - \Psi(F_{11})\| + \|\Psi(X) - \Psi(F_{12})\| \\ &= \frac{a}{a-1} \{\|X - F_{11}\| + \|X - F_{12}\|\}, \end{aligned}$$

para todo  $X \in \Lambda_1$ . Se infiere que  $\Lambda_1$  es, en efecto, una elipse de centro  $C$  y focos  $F_{11}$  y  $F_{12}$ . Además, de (18) recibimos

$$F_{1i} = \frac{a-1}{a}F_{2i} + a^{-1}V,$$

una combinación convexa de  $F_{2i}$  y  $V$ . Esto significa que  $V$ ,  $F_{1i}$  y  $F_{2i}$  son colineales,  $F_{1i}$  entre  $V$  y  $F_{2i}$ , para todo  $i = 1, 2$ .

Finalmente, sea  $\mathfrak{F}$  el tronco de cono elíptico, macizo cerrado, de bases las regiones elípticas cerradas  $\mathcal{E}_i = \text{conv}(\Lambda_i)$ , la envolvente convexa de  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  ([2, p. 158, Theorem 17.]). Dadas las hipótesis del presente teorema, siempre podemos tomar dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  en  $\Lambda_2$  tal que satisfagan

$$\Delta = \det(P_1, P_2, C) \neq 0.$$

De este modo el sólido  $\mathfrak{F}$  cumple con todas las hipótesis del Teorema 3.1. Por lo cual, según (19) y de acuerdo al Teorema 1.1 (en todas sus partes y notaciones), si  $\mathfrak{F}_1$  y  $\mathfrak{F}_2$  son los elipsoides representados por

$$XQ^2X^T = \rho \quad \text{y} \quad XQ^2X^T = 1,$$

respectivamente; entonces  $\Lambda_i$  es una sección elíptica de  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Si además  $\Psi' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la homotecia  $\Psi'(X) = \rho^{-\frac{1}{2}}X$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^3$  (de centro  $\mathbf{0}$  y razón  $\rho^{-\frac{1}{2}}$ ), entonces

$$\Psi'(X)Q^2\Psi'(X)^T = \rho^{-1}(XQ^2X^T) = \rho^{-1}\rho = 1,$$

para todo  $X \in \mathfrak{F}_1$ . Se infiere que  $\mathfrak{F}_2 = \Psi'(\mathfrak{F}_1)$ , por ser  $\Psi$  biyectiva.  $\square$

Recíprocamente, a continuación probaremos que si dos regiones elípticas cerradas y paralelas, satisfacen las propiedades en (2), (3) y (4), entonces sus fronteras relativas son las intersecciones de sus planos con una hoja cónica.

**Teorema 4.2.** *Sea  $Q$  una matriz simétrica de orden tres, positivamente definida. Si  $0 < \delta < 1$  y  $N$  es un vector no nulo en  $\mathbb{R}^3$ , consideremos las regiones elípticas cerradas y paralelas*

$$\mathcal{E}_1 : XQX^T \leq \delta \quad \text{y} \quad N \cdot X = 1, \quad (21)$$

$$\mathcal{E}_2 : XQX^T \leq 1 \quad \text{y} \quad N \cdot X = 0, \quad (22)$$

de centro  $C$  y  $\mathbf{0}$ , respectivamente.

Entonces las fronteras relativas de  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  son las secciones de corte de los planos paralelos en (21) y (22) con una hoja cónica  $C$ . Explícitamente,  $C$  es la hoja cónica elíptica no degenerada, de directriz la frontera relativa de  $\mathcal{E}_2$  y ápice

$$V = \frac{1}{1 - (\delta - CQC^T)^{\frac{1}{2}}}C. \quad (23)$$

*Demostración.* Denotemos por  $\Lambda_i$  la frontera relativa de  $\mathcal{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ . El centro  $C$  de la región elíptica  $\mathcal{E}_1$  está en su interior relativo, por lo cual en (21) debemos tener  $CQC^T < \delta$ , lo que implica  $0 < \delta - CQC^T < \delta < 1$ , y por ende

$$0 < 1 - (\delta - CQC^T)^{\frac{1}{2}} < 1. \quad (24)$$

Razón por la cual el vector  $V$  en (23) está bien definido. Por ser  $C$  un punto del plano de  $\mathcal{E}_1$ , entonces  $N \cdot C = 1$  por (21), así  $N \cdot V \neq 0$  y  $V$  no está en el plano de  $\mathcal{E}_2$  dado

en (22). Esto entraña que la hoja cónica elíptica  $\mathcal{C}$  de ápice  $V$  y directriz  $\Lambda_2$  es no degenerada.

En nuestro contexto, consideremos la homotecia  $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida en (16), siendo aquí (17) la expresión

$$a = \frac{1}{1 - (\delta - CQC^T)^{\frac{1}{2}}} > 1, \quad (25)$$

por (24), en cuyo caso (16) adopta la forma

$$\Psi(X) = \frac{a}{a-1}(X - C), \quad X \in \mathbb{R}^3. \quad (26)$$

Dado que  $\Lambda_1$  se autorrefleja a través de su centro  $C$ , si  $X \in \Lambda_1$  entonces  $2C - X \in \Lambda_1$ , por lo cual, según (21),

$$(2C - X)Q(2C - X)^T = \delta.$$

Expandiendo el miembro izquierdo, teniendo presente (ahora y más adelante) que  $XQX^T = \delta$ , hallamos

$$CQX^T = CQC^T; \quad (27)$$

por esto,

$$\begin{aligned} \Psi(X)Q\Psi(X)^T &= \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 (X - C)Q(X - C)^T && \text{(Por (26))} \\ &= \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 (XQX^T - 2CQX^T + CQC^T) \\ &= \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 (XQX^T - CQC^T) && \text{(Por (27))} \\ &= \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 (\delta - CQC^T) = 1 && \text{(Por (25)),} \end{aligned}$$

y

$$N \cdot \Psi(X) = 0.$$

En otras palabras, hemos probado que si  $X$  es un punto de  $\Lambda_1$  entonces  $\Psi(X)$  es un punto de la directriz  $\Lambda_2$  y de la generatriz  $\overrightarrow{VX}$  (ver (16)) del manto cónico  $\mathcal{C}$ .

Recíprocamente, si  $Y \in \Lambda_2$  hagamos

$$X = \Psi^{-1}(Y) = \frac{a-1}{a}Y + C.$$

Entonces

$$N \cdot X = \frac{a-1}{a}N \cdot Y + N \cdot C = 1,$$

dado que  $Y$  y  $C$  están en los planos (22) y (21), respectivamente; además

$$(X - C)Q(X - C)^T = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 YQY^T = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2,$$

o equivalentemente, a la luz de (25) y (27),

$$XQX^T - CQC^T = \delta - CQC^T,$$

si y sólo si

$$XQX^T = \delta.$$

Igualmente, hemos probado que si  $Y \in \Lambda_2$  entonces  $\Psi^{-1}(Y) \in \Lambda_1 \cap \overrightarrow{VY}$ .

Concluimos que, en efecto,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son las secciones de corte de los planos paralelos en (21) y (22) con la hoja cónica  $\mathcal{C}$ .  $\square$

Finalmente, se desprende de la parte (iii) del Teorema 4.1 y del Teorema 4.2 una **caracterización** para que dos elipses paralelas en  $\mathbb{R}^3$  sean secciones de corte de una hoja cónica.

**Teorema 4.3 (Criterio de concurrencia cónica).** *Sean  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  dos elipses paralelas y diferentes en  $\mathbb{R}^3$ , de centros  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Entonces,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son secciones transversales de corte de una hoja cónica, si y sólo si,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son secciones elípticas de dos elipsoides  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ , respectivamente, concéntricos en  $C_2$ , tales que  $\Psi(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$ , donde  $\Psi$  es una homotecia de  $\mathbb{R}^3$  de centro  $C_2$  y razón  $\rho > 1$ .*

*Demostración.* Hagamos

$$\Lambda'_i = \Lambda_i - C_2, \quad i = 1, 2,$$

el trasladado de  $\Lambda_i$  por  $-C_2$ . Entonces  $\Lambda'_1$  y  $\Lambda'_2$  son elipses paralelas de centros

$$C'_1 = C_1 - C_2 \quad \text{y} \quad C'_2 = \mathbf{0},$$

respectivamente.

( $\Rightarrow$ ) Si  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son secciones transversales de corte de una hoja cónica  $\mathcal{C}$ , entonces  $\Lambda'_1$  y  $\Lambda'_2$  son secciones transversales de corte de la hoja cónica  $\mathcal{C} - C_2$ . Por esto, y de acuerdo a la parte (iii) del Teorema 4.1, existen dos elipsoides  $\mathcal{F}'_1$  y  $\mathcal{F}'_2$  de centro común  $\mathbf{0}$ , y una homotecia  $\Psi'$  de  $\mathbb{R}^3$ , representada por

$$\Psi'(X) = \rho X, \quad X \in \mathbb{R}^3,$$

de centro  $\mathbf{0}$  y razón  $\rho > 1$ , tales que

$$\Psi'(\mathcal{F}'_1) = \mathcal{F}'_2.$$

Si

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}'_i + C_2, \quad i = 1, 2,$$

y  $\Psi$  es la homotecia de  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\Psi(X) = C_2 + \rho(X - C_2), \quad X \in \mathbb{R}^3, \quad (28)$$

de centro  $C_2$  y radio  $\rho$ , entonces  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  son elipsoides de centro común  $C_2$ , tales que  $\Psi(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$ , como fácilmente puede verificarse.

( $\Leftarrow$ ) Bajo estas hipótesis,  $\Lambda'_i$  es una sección elíptica del elipsoide  $\mathcal{F}_i - C_2$  de centro  $\mathbf{0}$ , para todo  $i = 1, 2$ . Existe una matriz simétrica  $\mathcal{Q}$  de orden tres, positivamente definida, tal que

$$(X - C_2) \mathcal{Q} (X - C_2)^T = \rho^{-2} \quad (29)$$

es la representación matricial del elipsoide  $\mathcal{F}_1$ , o equivalentemente,

$$X \mathcal{Q} X^T = \rho^{-2}$$

es la representación matricial de  $\mathcal{F}_1 - C_2$ , donde

$$0 < \rho^{-2} < 1.$$

Por hipótesis, la homotecia  $\Psi$  de  $\mathbb{R}^3$  tiene la forma (28). Así, si  $Y \in \mathcal{F}_2$  entonces  $Y = \Psi(X)$  para algún  $X \in \mathcal{F}_1$ , y

$$(Y - C_2) \mathcal{Q} (Y - C_2)^T = \rho^2 (X - C_2) \mathcal{Q} (X - C_2)^T = 1, \quad (\text{por (29)}),$$

es decir,

$$X \mathcal{Q} X^T = 1$$

es la representación matricial de  $\mathcal{F}_2 - C_2$ . Se infiere del Teorema 4.2 que  $\Lambda'_1$  y  $\Lambda'_2$  son las secciones de corte de dos planos paralelos con una hoja cónica  $\mathcal{C}'$ , o equivalentemente,  $\Lambda_i = \Lambda'_i - C_2$  es una sección transversal de corte de la hoja cónica  $\mathcal{C}' + C_2$ , para todo  $i = 1, 2$ .  $\square$

## Referencias

- [1] BIRKHOFF G. and MAC LANE S. *A Brief Survey of Modern Algebra*. New York: The Macmillan Company, second edition, 1965.
- [2] ROCKAFELLAR Ralph T. *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972.
- [3] STRANG Gilbert. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1982.

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ  
 Departamento de Matemáticas  
 Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
 Duitama, Boyacá, Colombia.  
*e-mail:* leruizh@yahoo.es