

Una versión de la distribución Rayleigh generalizada transmutada

YURI A. IRIARTE*, JUAN M. ASTORGA

Universidad de Atacama, Instituto Tecnológico, Copiapó, Chile.

Resumen. La calidad de los procedimientos utilizados en un análisis estadístico depende en gran medida del modelo o las distribuciones de probabilidad que se emplean. Debido a esto, diversos autores han realizado un esfuerzo considerable en generalizar o extender distribuciones de probabilidad presentes en la literatura estadística. En este contexto, Vodã en [13] introduce la distribución de probabilidad Rayleigh generalizada; esta distribución es bastante utilizada en el análisis estadístico de confiabilidad. En este artículo extendemos la distribución Rayleigh generalizada usando el mapa de transmutación de rango cuadrático estudiado por Shaw y Buckley en [12]. Estudiamos las principales propiedades del nuevo modelo, realizamos inferencia estadística y mostramos una aplicación con datos reales. Finalmente, se presentan las principales conclusiones del artículo.

Palabras clave: Distribución Rayleigh generalizada, distribución Rayleigh generalizada transmutada, mapa de transmutación de rango cuadrático.

MSC2010: 62G30, 62F10, 62F15, 62G09, 62P12.

A version of transmuted generalized Rayleigh distribution

Abstract. Statistical analysis procedures's quality depends on the proper use of the probability distributions. For that reason, many probability distributions have been generalized. For example, Vodã in [13] introduced the generalized Rayleigh distribution, a model widely used in reliability analysis. In this article, we introduce an extension of the generalized Rayleigh distribution using the quadratic rank transmutation map studied by Shaw and Buckley in [12]. We study the main properties of this new distribution. Statistical inference studies are done. A real data application is shown. Finally, the main conclusions of this paper are presented.

Keywords: Generalized Rayleigh distribution, transmuted generalized Rayleigh distribution, quadratic rank transmutation map.

*E-mail: yuri.iriarte@uda.cl

Recibido: 20 de febrero de 2014, Aceptado: 03 de julio de 2014.

Para citar este artículo: Y.A. Iriarte, J.M. Astorga, Una versión de la distribución Rayleigh generalizada transmutada, *Rev. Integr. Temas Mat.* 33 (2015), no. 1, 83-95.

1. Introducción

Vodň en [13] propone la distribución Rayleigh generalizada. Una variable aleatoria X sigue una distribución Rayleigh generalizada, denotada como $X \sim GR(\theta, \alpha)$, si su función de densidad está dada por

$$f_X(x; \theta, \alpha) = \frac{2\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} e^{-\theta x^2}, \quad (1)$$

donde $x > 0$, $\theta > 0$, $\alpha > -1$ y

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

es la función Gamma. La función de distribución acumulada GR está dada por

$$F_X(x; \theta, \alpha) = \frac{\gamma(\alpha+1, \theta x^2)}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (2)$$

donde

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

es la función Gamma incompleta. Para $\alpha = 0$ y $\theta = (2\lambda^2)^{-1}$ tenemos la clásica distribución Rayleigh. Para $\alpha = 1/2$ y $\theta = (2\lambda^2)^{-1}$ tenemos la distribución de Maxwell [5]. Si $\alpha = -1/2$, $\theta = (2\sigma^2)^{-1}$ tenemos la distribución Half-Normal [6]. Si $\alpha = \nu/2 - 1$ y $\theta = 1/2$ tenemos la distribución Chi [7].

Shaw y Buckley en [12] introducen una nueva clase de distribuciones llamada la clase de distribuciones transmutadas. Específicamente, una variable aleatoria X sigue una distribución transmutada si su función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = (1 + \lambda)G(x) - \lambda G^2(x), \quad |\lambda| \leq 1, \quad (3)$$

donde $G(x)$ es la función de distribución acumulada de la distribución base. Para $\lambda = 0$ se obtiene la distribución de la variable aleatoria base. Aryal et al. en [3] introducen la distribución Gumbel transmutada al considerar como función base la función de distribución acumulada de la distribución Gumbel. Aryal et al. en [4] introducen la distribución Weibull transmutada al considerar como función base la función de distribución acumulada de la distribución Weibull de dos parámetros. Merovci en [8] introduce la distribución Rayleigh transmutada al considerar como función base la función de distribución acumulada de la distribución Rayleigh. Merovci en [9] introduce la distribución Rayleigh generalizada transmutada al considerar como función base la función de distribución acumulada de la distribución Burr tipo X de dos parámetros. La distribución Burr tipo X de dos parámetros puede ser entendida como una generalización de la distribución Rayleigh clásica y, debido a esto, diversos autores prefieren utilizar el término de distribución Rayleigh generalizada para referirse a ella.

La función de densidad de la distribución Rayleigh generalizada transmutada propuesta por Merovci [9] está dada por

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = 2\alpha\beta^2 x e^{-(\beta x)^2} \left(1 - e^{-(\beta x)^2}\right)^{\alpha-1} \left[1 + \lambda - 2\lambda \left(1 - e^{-(\beta x)^2}\right)^\alpha\right], \quad (4)$$

donde $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $|\lambda| \leq 1$.

En este artículo utilizamos el mapa de transmutación de rango cuadrático para introducir una extensión de la distribución Rayleigh generalizada mostrada en (1). Específicamente, utilizamos las expresiones (2) y (3) para generar la función de distribución acumulada de la extensión. El resultado es una nueva distribución de 3 parámetros que flexibiliza el modelo Rayleigh generalizado en términos de asimetría y curtosis.

El artículo se desarrolla de la siguiente manera: en la sección 2 estudiamos características generales de la distribución Rayleigh generalizada transmutada; en la sección 3 realizamos inferencia estadística con el nuevo modelo y estudiamos una aplicación con datos reales; en la sección 4 entregamos algunas conclusiones.

2. Distribución Rayleigh generalizada transmutada

En esta sección presentamos la función de densidad y la función acumulada Rayleigh generalizada transmutada, y calculamos sus momentos distribucionales, esperanza, varianza y coeficientes de asimetría y curtosis.

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Rayleigh generalizada transmutada, denotada como $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$. Entonces la función de densidad de X está dada por

$$f_X(x; \theta, \alpha, \lambda) = \frac{2\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} e^{-\theta x^2} (1 + \lambda - 2\lambda H(\theta x^2; \alpha + 1, 1)), \quad (5)$$

y su función de distribución acumulada está dada por

$$F(x; \theta, \alpha, \lambda) = H(\theta x^2; \alpha + 1, 1)(1 + \lambda - \lambda H(\theta x^2; \alpha + 1, 1)), \quad (6)$$

donde $x > 0$, $\theta > 0$, $\alpha > -1$, $|\lambda| \leq 1$ y

$$H(x; \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\beta u} du$$

es la función de distribución acumulada Gamma.

La Figura 1 muestra algunas formas que toma la función de densidad de la distribución Rayleigh generalizada transmutada para distintos valores de los parámetros θ , α y λ .

2.1. Algunas propiedades

En esta subsección entregamos algunas propiedades básicas de la distribución Rayleigh generalizada transmutada.

Sea $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$; entonces se tiene que:

1. Para $\lambda = 0$, la expresión (5) se reduce a

$$f_X(x; \theta, \alpha) = \frac{2\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} e^{-\theta x^2},$$

que es la función de densidad de la distribución Rayleigh generalizada [13].

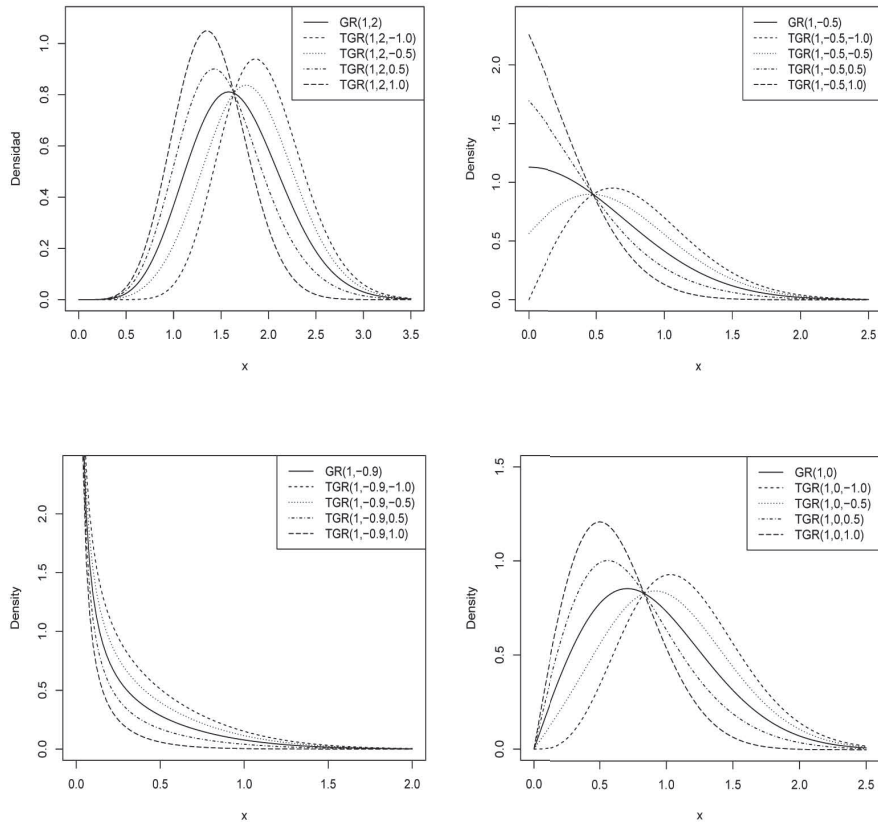


Figura 1. Gráfica de la función de densidad de la distribución Rayleigh generalizada transmutada para diferentes elecciones de sus parámetros, $TGR(\theta, \alpha, \lambda)$.

2. Para $\theta = 1/2\sigma^2$, $\alpha = 0$ y $\lambda = 0$, la expresión (5) se reduce a

$$f_X(x; \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

que es la función de densidad de la distribución Rayleigh [7].

3. Para $\theta = 1/2\sigma^2$, $\alpha = -1/2$ y $\lambda = 0$, la expresión (5) se reduce a

$$f_X(x; \sigma^2) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

que es la función de densidad de la distribución Half-Normal [6].

4. Para $\theta = \sigma/2$, $\alpha = 1/2$ y $\lambda = 0$, la expresión (5) se reduce a

$$f(x, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^{3/2} x^2 e^{-\frac{\sigma}{2} x^2},$$

que es la función de densidad de la distribución Maxwell [5].

5. Para $\theta = 1/2$, $\alpha = \sigma/2 - 1$ y $\lambda = 0$, se obtiene que (5) se reduce a

$$f_X(x; \sigma) = \frac{1}{2^{\sigma/2-1} \Gamma(\sigma/2)} x^{\sigma-1} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

que es la función de densidad de la distribución Chi [7].

2.2. Distribuciones relacionadas

Los siguientes corolarios son consecuencias directas de (5), y se obtienen como extensiones de los casos particulares derivados de la distribución Rayleigh generalizada. En los corolarios 2.4, 2.5 y 2.6, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ corresponde a la función Gamma y $F(x, \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\beta u} du$ es la función de distribución acumulada Gamma.

Corolario 2.1. Sea $X \sim TGR(1/2\sigma^2, 0, \lambda)$. Entonces X se distribuye de acuerdo con la distribución Rayleigh transmutada, denotada por $X \sim TR(\sigma, \lambda)$. La función de densidad de X está dada por

$$f(x; \sigma, \lambda) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \lambda + 2\lambda e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right), \quad (7)$$

donde $x > 0$, $\sigma > 0$ y $|\lambda| \leq 1$.

Corolario 2.2. Sea $T \sim TGR(1/2\sigma^2, -1/2, \lambda)$. Entonces X se distribuye de acuerdo con la distribución Half-normal transmutada, denotada por $X \sim THN(\sigma, \lambda)$. La función de densidad de X está dada por

$$f(x; \sigma, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 + \lambda - 2\lambda H \left(\frac{x^2}{2\sigma^2}; \frac{1}{2}, 1 \right) \right), \quad (8)$$

donde $x > 0$, $\sigma > 0$, $|\lambda| \leq 1$.

Corolario 2.3. Sea $X \sim TGR(\sigma/2, 1/2, q)$. Entonces X se distribuye de acuerdo con la distribución Maxwell transmutada, denotada por $X \sim TM(\sigma, \lambda)$. La función de densidad de X está dada por

$$f(x; \sigma, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^{3/2} x^2 e^{-\frac{\sigma}{2} x^2} \left(1 + \lambda - 2\lambda H \left(\frac{\sigma}{2} x^2; \frac{3}{2}, 1 \right) \right), \quad (9)$$

donde $x > 0$, $\sigma > 0$, $|\lambda| \leq 1$.

Corolario 2.4. Sea $X \sim TGR(1/2, \sigma/2 - 1, \lambda)$. Entonces X se distribuye de acuerdo con la distribución Chi transmutada, denotada por $X \sim T\chi_{\sigma, q}$. La función de densidad de X está dada por

$$f(x; \sigma, \lambda) = \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}-1} \Gamma(\frac{\sigma}{2})} x^{\sigma-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \lambda - 2\lambda H \left(\frac{x^2}{2}; \frac{\sigma}{2}, 1 \right) \right), \quad (10)$$

donde $x > 0$, $\sigma > 0$, $|\lambda| \leq 1$.

2.3. Momentos

Proposición 2.5. Sea $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$. Entonces, para $r = 1, 2, \dots$ se tiene que el r -ésimo momento es

$$\mu_r = E(X^r) = \frac{\theta^{-\frac{r}{2}}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[(1 + \lambda) \Gamma\left(\frac{r}{2} + \alpha + 1\right) - 2\lambda I(r, \alpha) \right], \quad (11)$$

donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ es la función Gamma, mientras que

$$I(r, \alpha) = \int_0^\infty u^{\frac{r}{2} + \alpha} e^{-u} H(u; \alpha + 1, 1)$$

es una función que depende de r y α con

$$H(u; \alpha + 1, 1) = \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} y^\alpha e^{-y} dy.$$

Demostración. Por definición se tiene que los momentos de la distribución Rayleigh generalizada transmutada están dados por

$$\mu_r = \frac{2\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty x^{r+2\alpha+1} e^{-\theta x^2} [1 + \lambda - 2\lambda H(\theta x^2; \alpha + 1, 1)] dx;$$

considerando el cambio de variable $u = \theta x^2$ se obtiene el resultado. ☑

Observación 2.6. Sea $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$. Entonces se tiene que:

1. $\mu_1 = E(X) = \frac{\theta^{-1/2}}{\Gamma(\alpha + 1)} a_1$, donde $a_1 = (1 + \lambda) \Gamma(3/2 + \alpha) - 2\lambda I(1, \alpha)$,
2. $\mu_2 = E(X^2) = \frac{\theta^{-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} a_2$, donde $a_2 = (1 + \lambda) \Gamma(2 + \alpha) - 2\lambda I(2, \alpha)$,
3. $\mu_3 = E(X^3) = \frac{\theta^{-3/2}}{\Gamma(\alpha + 1)} a_3$, donde $a_3 = (1 + \lambda) \Gamma(5/2 + \alpha) - 2\lambda I(3, \alpha)$,
4. $\mu_4 = E(X^4) = \frac{\theta^{-2}}{\Gamma(\alpha + 1)} a_4$, donde $a_4 = (1 + \lambda) \Gamma(3 + \alpha) - 2\lambda I(4, \alpha)$.

Corolario 2.7. Sea $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$. Entonces se tiene

$$E(X) = \frac{\theta^{-1/2}}{\Gamma(\alpha + 1)} a_1 \quad y \quad Var(X) = \frac{\theta^{-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(a_2 - \frac{a_1^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right).$$

Corolario 2.8. Sea $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$. Entonces los coeficientes de asimetría ($\sqrt{\beta_1}$) y curtosis (β_2) son respectivamente

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha + 1) \left(a_3 - \frac{3a_1 a_2}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2a_1^3}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \right)}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^{3/2}}$$

y

$$\beta_2 = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \left(a_4 - \frac{4a_1a_3}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{6a_2a_1^2}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - \frac{3a_1^4}{\Gamma^3(\alpha + 1)} \right)}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2}.$$

Observación 2.9. Cuando $\lambda = 0$ los coeficientes $\sqrt{\beta_1}$ y β_2 de la distribución TGR toman respectivamente los valores

$$\sqrt{\beta_{1GR}} = \frac{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 5/2) - 3\Gamma(\alpha + 3/2)\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + 1) + 2\Gamma^3(\alpha + 3/2)}{[\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2) - \Gamma^2(\alpha + 3/2)]^{3/2}}$$

y

$$\beta_{2GR} = \frac{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 3) - 4\Gamma(\alpha + 3/2)\Gamma(\alpha + 5/2)\Gamma^2(\alpha + 1)}{[\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2) - \Gamma^2(\alpha + 3/2)]^2} + \frac{6\Gamma^2(\alpha + 3/2)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2) - 3\Gamma^4(\alpha + 3/2)}{[\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2) - \Gamma^2(\alpha + 3/2)]^2},$$

que son los respectivos coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución Rayleigh generalizada. La Figura 2 muestra las gráficas de los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución Rayleigh generalizada transmutada para diferentes valores de λ .

3. Inferencia

En esta sección discutimos los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros θ , α y λ de la distribución Rayleigh generalizada transmutada, presentamos la matriz de información observada, realizamos un estudio de simulación y estudiamos una aplicación con datos reales.

3.1. Estimadores de máxima verosimilitud

Dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n que proviene desde la distribución $TGR(\theta, \alpha, \lambda)$, entonces la función log-verosimilitud puede ser escrita como

$$\log l(\vartheta; x_i) = c(\theta, \alpha) + (2\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda - 2\lambda H(\theta x_i^2; \alpha + 1, 1)), \quad (12)$$

donde $c(\theta, \alpha) = n \log(2) + n(\alpha + 1) \log(\theta) - n \log(\Gamma(\alpha + 1))$.

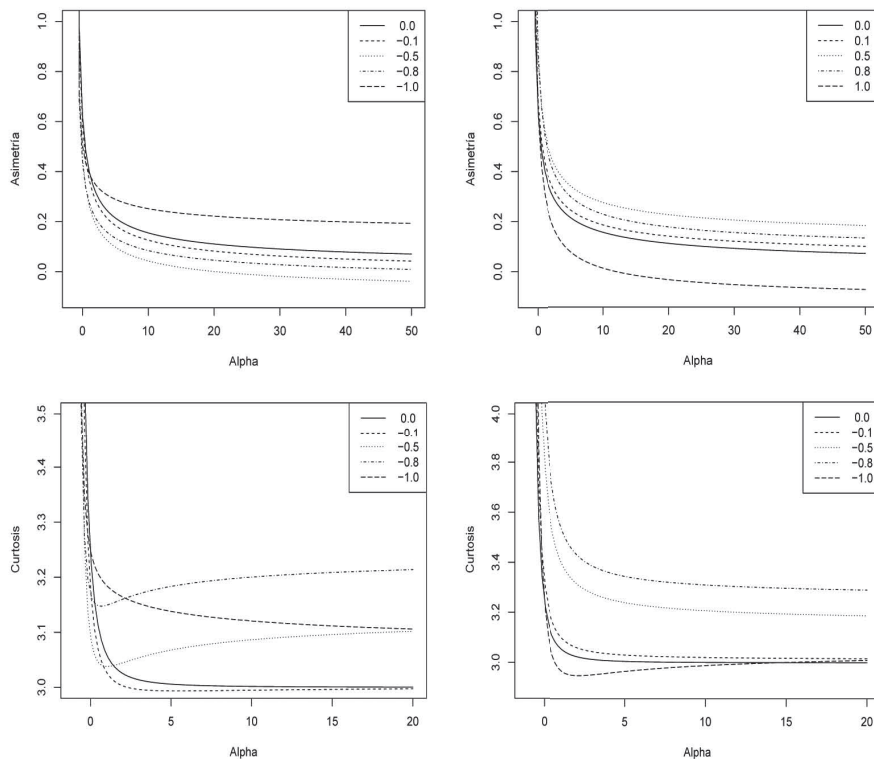


Figura 2. Gráfica del coeficientes de asimetría y de curtosis TGR para diferentes valores del parámetro λ . Cuando $\lambda = 0$ (línea sólida) se obtienen las curvas de asimetría y curtosis del modelo GR, respectivamente.

Las ecuaciones de máxima verosimilitud están dados por

$$\frac{n(\alpha + 1)}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^n \frac{H_1(x_i)}{1 + \lambda - 2\lambda H(x_i)} = 0, \tag{13}$$

$$n \log(\theta) - n\Psi(\alpha + 1) + 2 \sum_{i=1}^n \log(x_i) - 2\lambda \sum_{i=1}^n \frac{H_2(x_i)}{1 + \lambda - 2\lambda H(x_i)} = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1 - 2H(x_i)}{1 + \lambda - 2\lambda H(x_i)} = 0, \tag{15}$$

donde $H(x_i) = H(\theta x_i^2; \alpha + 1, 1)$, $H_1(x_i) = \frac{d}{d\theta} H(x_i)$, $H_2(x_i) = \frac{d}{d\alpha} H(x_i)$. Sin embargo, las ecuaciones (13), (14) y (15) no conducen a soluciones analíticas explícitas para las estimaciones de los parámetros del modelo. Por lo general, es más conveniente utilizar algoritmos de optimización no lineales, tales como el algoritmo de cuasi-Newton, para

maximizar numéricamente la función de log-verosimilitud dada en (12). Por ejemplo, el programa R (2013) posee la librería de optimización no lineal `optim` para resolver estos problemas (ver [10]).

3.2. Matriz de información observada

En esta subsección presentamos la matriz de información observada de la distribución Rayleigh generalizada transmutada.

Sea $X \sim TGR(\theta, \alpha, q)$; entonces la matriz de información observada está dada por

$$\begin{pmatrix} -\frac{n(\alpha+1)}{\theta^2} - 2\lambda G_{\theta,1}(x_i) & \frac{n}{\theta} - 2\lambda G_{\alpha,1}(x_i) & -2 \sum_{i=1}^n \frac{H_1(x_i)}{1+\lambda-2\lambda H(x_i)} - 2\lambda G_{\lambda,1}(x_i) \\ \frac{n}{\theta} - 2\lambda G_{\theta,2}(x_i) & -n\Psi_1(\alpha+1) - 2\lambda G_{\alpha,2}(x_i) & -2 \sum_{i=1}^n \frac{H_1(x_i)}{1+\lambda-2\lambda H(x_i)} - 2\lambda G_{\lambda,2}(x_i) \\ \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\theta} \frac{1-2H(x_i)}{1+\lambda-2\lambda H(x_i)} & \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\alpha} \frac{1-2H(x_i)}{1+\lambda-2\lambda H(x_i)} & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-2H(x_i)}{1+\lambda-2\lambda H(x_i)} \right)^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$G_{\nu,k}(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\nu} \frac{H_k(x_i)}{1+\lambda-2\lambda H(x_i)},$$

$\nu = \theta, \alpha, \lambda$ y Ψ_1 es la función trigamma, con $H_k(x_i)$, $k = 1, 2$, dadas en las ecuaciones de máxima verosimilitud anteriores.

3.3. Estudio de simulación

En esta subsección se realiza un estudio de simulación para ilustrar el comportamiento de las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros θ , α y λ del modelo TGR. Generamos 1000 muestras aleatorias de tamaños $n = 50$, $n = 100$ y $n = 300$ desde la distribución $TGR(\theta, \alpha, \lambda)$ para valores fijos de los parámetros. Los números aleatorios $X \sim TGR(\theta, \alpha, \lambda)$ pueden ser generados computando

$$X = \left(\frac{1}{\theta} F^{-1} \left(\frac{1+\lambda - \sqrt{(1+\lambda)^2 - 4\lambda U}}{2\lambda}; \alpha+1, 1 \right) \right)^{1/2},$$

donde $U \sim U(0,1)$ y F^{-1} es la función de los cuantiles de la distribución Gamma. Los estimadores se pueden obtener utilizando la librería `optim` que utiliza el método L-BFGS-B en el paquete estadístico R. Las medias y las desviaciones estándar empíricas se presentan en el Cuadro 1. Aquí, los parámetros están bien estimados y las estimaciones son asintóticamente insesgadas.

Cuadro 1. Estimaciones de máxima verosimilitud para los parámetros θ , α y λ de la distribución Rayleigh generalizada transmutada.

$n = 50$						
θ	α	λ	$\hat{\theta}$ (SD)	$\hat{\alpha}$ (SD)	$\hat{\lambda}$ (SD)	
1	0,0	-1,0	1,143 (0,281)	-0,391 (0,179)	-0,874 (0,229)	
		0,1	1,040 (0,273)	0,005 (0,218)	0,057 (0,436)	
		1,0	1,259 (0,402)	0,081 (0,179)	0,887 (0,203)	
2	-0,5	-0,5	2,064 (0,549)	-0,421 (0,143)	-0,274 (0,442)	
		0,1	2,063 (0,658)	-0,497 (0,111)	0,088 (0,447)	
		0,5	2,353 (0,798)	-0,509 (0,099)	0,334 (0,451)	
3	1,0	0,1	3,103 (0,750)	1,031 (0,449)	0,072 (0,439)	
		0,5	3,174 (0,694)	1,001 (0,377)	0,383 (0,466)	
		1,0	3,669 (1,106)	1,191 (0,420)	0,865 (0,248)	

$n = 100$						
θ	α	λ	$\hat{\theta}$ (SD)	$\hat{\alpha}$ (SD)	$\hat{\lambda}$ (SD)	
1	0,0	-1,0	1,097 (0,193)	0,152 (0,274)	-0,899 (0,201)	
		0,1	0,989 (0,204)	-0,031 (0,174)	0,056 (0,440)	
		1,0	1,168 (0,317)	0,044 (0,121)	0,916 (0,171)	
2	-0,5	-0,5	1,986 (0,393)	-0,442 (0,126)	-0,314 (0,425)	
		0,1	1,993 (0,499)	-0,512 (0,088)	0,064 (0,430)	
		0,5	2,232 (0,635)	-0,513 (0,077)	0,345 (0,415)	
3	1,0	0,1	2,976 (0,537)	0,965 (0,337)	0,065 (0,429)	
		0,5	3,119 (0,626)	0,965 (0,295)	0,374 (0,422)	
		1,0	3,478 (0,875)	1,125 (0,291)	0,885 (0,223)	

$n = 300$						
θ	α	λ	$\hat{\theta}$ (SD)	$\hat{\alpha}$ (SD)	$\hat{\lambda}$ (SD)	
1	0,0	-1,0	1,053 (0,124)	0,100 (0,217)	-0,921 (0,181)	
		0,1	0,965 (0,147)	-0,033 (0,121)	0,089 (0,385)	
		1,0	1,103 (0,226)	0,023 (0,070)	0,935 (0,157)	
2	-0,5	-0,5	1,959 (0,215)	-0,480 (0,098)	-0,425 (0,323)	
		0,1	1,949 (0,327)	-0,509 (0,062)	0,093 (0,343)	
		0,5	2,117 (0,524)	-0,511 (0,045)	0,411 (0,317)	
3	1,0	0,1	2,906 (0,366)	0,926 (0,237)	0,072 (0,392)	
		0,5	3,044 (0,507)	0,952 (0,188)	0,415 (0,366)	
		1,0	3,279 (0,614)	1,071 (0,175)	0,928 (0,175)	

3.4. Ilustración con datos reales

Consideramos un conjunto de datos de 101 puntos que representan la vida de ruptura por fatiga de los filamentos kevlar 49/epoxy sometidos a una presión constante a nivel de estrés del 90 % hasta que todos hayan fallado. Estos datos fueron analizados anteriormente por Andrews y Herzberg [2]. Calculamos los estimadores de máxima verosimilitud de la distribución Rayleigh generalizada, que fueron $\theta = 0,07604722$ y $\alpha = -0,61119945$. Considerando $\lambda = 0$, utilizamos las estimaciones de máxima verosimilitud del modelo Rayleigh generalizado como valores iniciales en el cálculo de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución Rayleigh generalizada transmutada utilizando procedimientos numéricos, ver Figura 3.

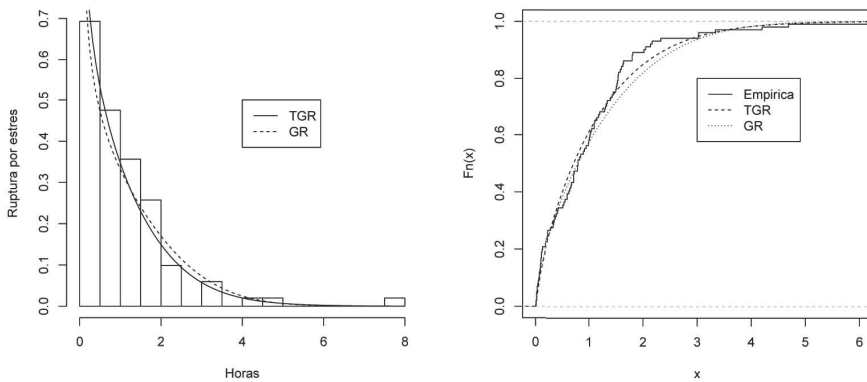


Figura 3. Ajuste de los modelos GR y TGR por el método de máxima verosimilitud para los datos de ruptura por estrés.

La matriz de varianzas y covarianzas Rayleigh generalizada transmutada ($\theta = 0,076$, $\alpha = -0,611$ y $\lambda = 0,862$) está dada por

$$I(\hat{\Theta})^{-1} = \begin{pmatrix} 5,762 \cdot 10^{-4} & 4,874 \cdot 10^{-4} & -1,990 \cdot 10^{-3} \\ 4,874 \cdot 10^{-4} & 1,418 \cdot 10^{-3} & -9,585 \cdot 10^{-5} \\ -1,990 \cdot 10^{-3} & -9,585 \cdot 10^{-5} & 1,958 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Así, la varianza de las estimaciones de máxima verosimilitud de θ , α y λ son $Var(\hat{\theta}) = 5,762 \cdot 10^{-4}$, $Var(\hat{\alpha}) = 1,418 \cdot 10^{-3}$ y $Var(\hat{\lambda}) = 1,958 \cdot 10^{-2}$.

Para comparar el ajuste realizado por las distribuciones GR y TGR, utilizamos los criterios de Kolmogórov-Smirnov (K-S), de información de Akaike [1, AIC] y de información Bayesiano [11, BIC]. Los criterios AIC y BIC están definidos como

$$AIC = 2k - 2 \log(L) \quad y \quad BIC = k \log(n) - 2 \log(L) ,$$

donde k es el número de parámetros del modelo estadístico, n es el tamaño de la muestra y L es el máximo valor de la función de verosimilitud para el modelo estimado. Para el cálculo de los valores correspondientes al criterio K-S usamos las estimaciones del Cuadro 2 de θ , α y λ . El Cuadro 2 muestra las estimaciones de máxima verosimilitud para los parámetros de los modelos GR y TGR. El Cuadro 3 muestra los valores correspondientes a los criterios K-S, AIC y BIC, asociados a los ajustes realizados con los modelos GR y TGR. Del Cuadro 3 se puede observar que la distribución Rayleigh generalizada transmutada ajusta de mejor forma los datos de ruptura por estrés.

Cuadro 2. Estimaciones de máxima verosimilitud para los modelos GR y TGR para datos de tiempo de ruptura por estrés.

Modelo	Parametros estimados	I. C. 95%
TGR	$\hat{\theta} = 0,076$	[0,028 , 0,123]
	$\hat{\alpha} = -0,611$	[-0,685 , -0,537]
	$\hat{\lambda} = 0,862$	[0,588 , 1,136]
GR	$\hat{\theta} = 0,140$	[0,082 , 0,197]
	$\hat{\alpha} = -0,679$	[-0,749 , -0,608]

Cuadro 3. Criterios de comparación.

Modelo	K - S	AIC	BIC
GR	0,118	216,366	221,596
TGR	0,102	211,569	219,414

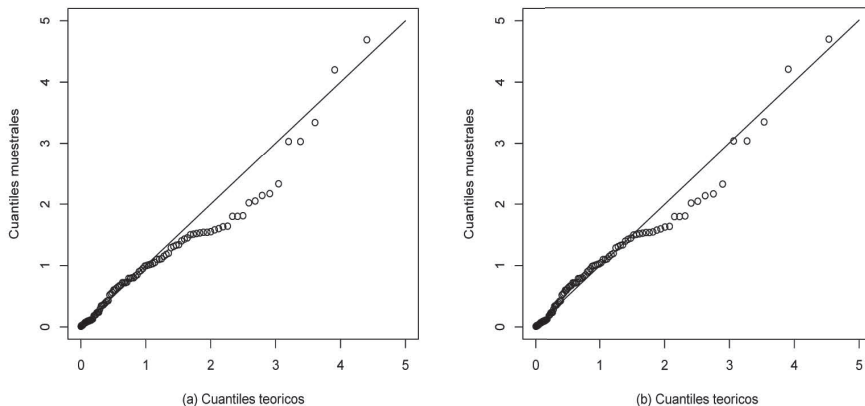


Figura 4. qqplots: (a) modelo GR y (b) modelo TGR.

4. Comentarios finales

En este artículo introducimos una nueva extensión de la distribución Rayleigh generalizada. Esta nueva distribución está orientada a flexibilizar la distribución Rayleigh generalizada en términos de asimetría y curtosis. El nuevo modelo nace usando el mapa de transmutación de rango cuadrático, considerando como función base la función de distribución acumulada Rayleigh generalizada mostrada en (2). La distribución Rayleigh generalizada es un caso particular de la distribución Rayleigh generalizada transmutada. Los estimadores de máxima verosimilitud pueden ser calculados a través de procedimientos numéricos como el método de Newton-Raphson. Con el cálculo de los coeficientes de asimetría y de curtosis se ha ilustrado el hecho de que la distribución Rayleigh generalizada transmutada es capaz de ajustar datos con estructura tipo Rayleigh generalizada pero con mayor o menor asimetría y curtosis. La aplicación con datos reales ha mostrado que la distribución Rayleigh generalizada transmutada puede presentar un mejor ajuste que la distribución Rayleigh generalizada.

Referencias

- [1] Akaike H., "A new look at the statistical model identification. System identification and time-series analysis", *IEEE Trans. Automatic Control*. 19 (1974), 716-723.
- [2] Andrews D.F. and Herzberg A.M., *Data: a collection of problems from many fields for the student and research worker*, Springer, New York, 1985.
- [3] Aryal G.R. and Tsokos C.P., "On the transmuted extreme value distribution with application", *Nonlinear Anal.* 71 (2009), no. 12, 1401-1407.
- [4] Aryal G.R. and Tsokos C.P., "Transmuted Weibull distribution: a generalization of the Weibull probability distribution", *Eur. J. Pure Appl. Math.* 4 (2011), no. 2, 89-102.
- [5] Bekker A. and Roux J.J.J., "Reliability characteristics of the Maxwell distribution: a Bayes estimation study", *Comm. Statist. Theory Methods*. 34 (2005), no.11, 2169-2178.
- [6] Hogg R.V. and Tanis E.A., *Probability and statistical inference*, Macmillan Publishing, New York, 1993.
- [7] Johnson N.L., Kotz S. and Balakrishnan N., *Continuous univariate distributions*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [8] Merovci F., "Transmuted Rayleigh distribution", *Aust. J. Stat.* 42 (2013), no. 1, 21-31.
- [9] Merovci F., "Transmuted Generalized Rayleigh Distribution", *J. Stat. Appl. Prob.* 3 (2014), no. 1, 9-20.
- [10] R Development Core Team R., "A language and environment for statistical computing", R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org> (2013).
- [11] Schwarz G., "Estimating the dimension of a model", *Ann. Statist.* 6 (1978), no. 2, 461-464.
- [12] Shaw W. and Buckley I., "The alchemy of probability distributions: beyond gram-charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map", IMA Primera Conferencia sobre Finanzas Computacionales, Cornell University, <http://arxiv.org/abs/0901.0434> (2007).
- [13] Vodň VG., "Inferential procedures on a generalized Rayleigh variate I", *Apl. Mat.* 21 (1976), no. 6, 395-412.