

## Geometría afín del paraboloides de revolución

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ\*

**Resumen.** Dados un paraboloides de revolución  $\mathcal{P}$  y un plano  $\mathcal{H}$  normal a su eje de rotación, se demuestra que todo rectángulo, todo polígono regular y toda circunferencia en  $\mathcal{H}$  es la sombra ortogonal de un paralelogramo, de un polígono regular afín y de una elipse inscritos en  $\mathcal{P}$ , respectivamente. Recíprocamente, la intersección (condicionada) de un plano con  $\mathcal{P}$  es una elipse cuya sombra ortogonal sobre  $\mathcal{H}$  es una circunferencia. Por ende se obtiene que todo teselado regular o semirregular en  $\mathcal{H}$  es la proyección ortogonal de una superficie poliédrica no acotada de polígonos regulares afines inscritos en  $\mathcal{P}$ . Estas composiciones de figuras, así como otras armoniosas combinaciones con elipses inscritas en  $\mathcal{P}$ , ponen de manifiesto las implicaciones de las mencionadas propiedades de  $\mathcal{P}$  en el diseño de formas geométricas novedosas en el arte y la arquitectura.

### Introducción

Al hacer girar una parábola alrededor de su eje se obtiene un paraboloides de revolución, una superficie de frecuente presencia tanto en el cálculo diferencial e integral como en la geometría diferencial. En estos contextos apenas se la describe cartesianamente haciendo referencia a ella en la aplicación o ilustración de una variada gama de nociones matemáticas.

Abordaremos aquí el estudio de esta cuádrica desde un punto de vista de la geometría afín, introduciendo una metodología allende los métodos estándar que la describen. Resulta sorprendente el hecho de que hasta el presente no se haya realizado un análisis del paraboloides de revolución involucrando los bellos y poderosos conceptos de la geometría afín.

En efecto, como una alternativa distinta a la geometría diferencial, descubriremos relevantes propiedades de la mencionada superficie de naturaleza fácilmente manifiesta en los dominios de la geometría afín.

Bajo la noción de polígono regular afín (Definición 1.2) probaremos que todo polígono regular y rectángulo en  $\mathbb{R}^2$  es la proyección ortogonal de un polígono regular afín y paralelogramo inscritos en un paraboloides de revolución prefijado, respectivamente

---

**Palabras y frases claves:** geometría afín, paraboloides de revolución, superficie poliédrica.

**MSC2000:** Primaria: 51M15. Secundaria: 51M20, 51M99.

\* Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, Colombia, e-mail: leruizh@yahoo.es.

(Teorema 1.3). Más adelante demostraremos que toda circunferencia es la proyección ortogonal de una elipse inscrita en dicha superficie (Teorema 3.1), y recíprocamente, se establece que la intersección (condicionada) de un plano con la cuádrica en cuestión es también una elipse (Teorema 4.1) cuyos elementos geométricos son determinados de manera unívoca en pocos caracteres matemáticos.

Estas importantes propiedades del paraboloides de revolución nos conducen a un número infinito de variadas combinaciones de figuras afines cuyas sombras ortogonales son rectángulos, polígonos regulares o circunferencias. En la sección 2 apenas se exponen casos particulares de un hecho general y sorprendente: todo teselado regular o semirregular ([6, pp. 35–41]) en  $\mathbb{R}^2$  es la proyección ortogonal de una superficie poliédrica de polígonos regulares afines inscritos en un paraboloides de revolución predeterminado (ver figuras 3 y 4).

Así mismo en la sección 5 se realiza una composición de elipses tangentes inscritas en un paraboloides de revolución dado, de tal suerte que su sombra ortogonal es un paquete de círculos ([6, pp. 34–35]) congruentes (ver figura 6).

Los modelos descritos en los citados capítulos constituyen de hecho escasas muestras de un gran potencial artístico y arquitectónico en el diseño de formas geométricas de novedosa belleza, como aportes e implicaciones de los resultados teóricos aquí expuestos.

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los puntos o vectores (fila) de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , y por  $Q^T$  la traspuesta de una matriz  $Q$ . En particular el producto matricial  $AB^T$  indicará el producto interior ordinario de dos vectores  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$ .

Los resultados y figuras consignadas en las secciones 2 y 3, lo mismo que los teoremas 1.3, 3.1 y 4.1, son novedosos en la literatura matemática, y fueron concebidos y demostrados por el autor.

## 1. *El polígono regular como la sombra ortogonal de un polígono regular afín inscrito en un paraboloides de revolución prefijado*

**Lema 1.1.** *Consideremos la matriz ortogonal*

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

la cual representa una rotación a través del ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$ , y para cada punto  $P(p_1, p_2)$  en  $\mathbb{R}^2$  hagamos

$$P^* = PQ \left( -\frac{\pi}{2} \right) = (p_2, -p_1), \quad (2)$$

que es la rotación de  $P$  en un ángulo de  $-\frac{\pi}{2}$ . Entonces

$$(i) \quad Q(\alpha + \beta) = Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\beta)Q(\alpha);$$

$$(ii) \quad Q(\theta)^T = Q(-\theta);$$

$$(iii) \quad \|PQ(\theta)\| = \|P\|;$$

$$(iv) PQ(\theta)P^T = P^*Q(\theta)(P^*)^T = \|P\|^2 \cos \theta;$$

$$(v) Q(\theta) - I = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) Q \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right),$$

para todo punto  $P$  en  $\mathbb{R}^2$  y todo  $(\alpha, \beta, \theta) \in \mathbb{R}^3$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2.

*Demostración.* Es rutinaria. ☑

**Definición 1.2.** La imagen de un  $n$ -gono regular de plano  $\mathcal{H}$  bajo una transformación afín biyectiva de dominio  $\mathcal{H}$  se denomina  $n$ -gono regular afín (ver figura 1).

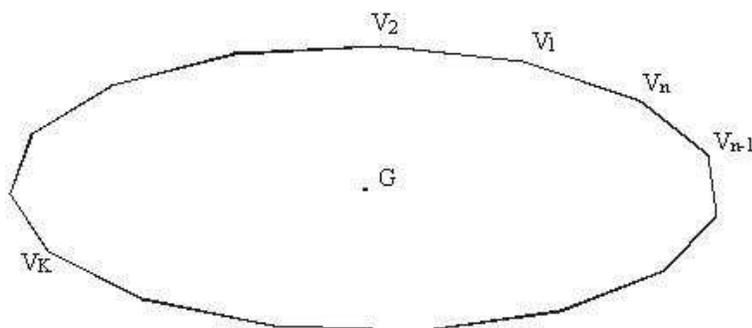


Figura 1.  $V_1 \dots V_n$  es un  $n$ -gono regular afín de centroide  $G$ .

En el siguiente teorema probaremos que todo polígono regular en el plano es la sombra ortogonal de un polígono regular afín inscrito en un paraboloido de revolución predeterminado.

**Teorema 1.3.** Sean  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  constantes reales dadas y consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuya expresión

$$f(X) = ax_1^2 + ax_2^2 + bx_1 + cx_2 + d, \tag{3}$$

para todo  $X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , representa un paraboloido de revolución de vértice

$$\left( A, -\frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right), \tag{4}$$

donde

$$A = -\frac{1}{2a}(b, c). \tag{5}$$

Entonces,

(i) Si  $W_1 \dots W_4$  es un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ , entonces

$$(W_1, f(W_1)) \dots (W_4, f(W_4))$$

es un paralelogramo inscrito en la gráfica de  $f$ .

(ii) Si  $V_1 \dots V_n$  es un  $n$ -gono regular ( $n \geq 3$ ) en  $\mathbb{R}^2$  de centro  $G$  y circunradio  $\rho$ , entonces

$$(V_1, f(V_1)) \dots (V_n, f(V_n))$$

es un  $n$ -gono regular afín inscrito en la gráfica de  $f$ , de centroide

$$\bar{G} = \left( G, a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \quad (6)$$

y de plano

$$N(X - \bar{G})^T = 0 \quad (7)$$

donde  $\delta = \|A - G\|$  y

$$N = (2a(A - G), 1). \quad (8)$$

(Ver figura 2).

*Demostración.* Primero debemos percibir que la representación de la función  $f$  en (3) también puede adoptar la forma

$$f(X) = a \|X - A\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d, \quad (9)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ , donde  $A$  aparece en (5).

Si  $W_1 \dots W_4$  es un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ , entonces

$$W_1 - W_2 = W_4 - W_3, \quad (10)$$

y su traslado por  $-A$  es el rectángulo

$$(W_1 - A) \dots (W_4 - A), \quad (11)$$

por lo cual se cumple la relación

$$\|W_1 - A\| - \|W_2 - A\| = \|W_4 - A\| - \|W_3 - A\|. \quad (12)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & (W_1, f(W_1)) - (W_2, f(W_2)) = (W_1 - W_2, f(W_1) - f(W_2)) \\ & = (W_4 - W_3, a \|W_1 - A\|^2 - a \|W_2 - A\|^2) \quad (\text{por (9) y (28)}) \\ & = (W_4 - W_3, a \|W_4 - A\|^2 - a \|W_3 - A\|^2) \quad (\text{por (12)}) \\ & = \left( W_4, a \|W_4 - A\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) - \left( W_3, a \|W_3 - A\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ & = (W_4, f(W_4)) - (W_3, f(W_3)) \quad (\text{por (9)}), \end{aligned}$$

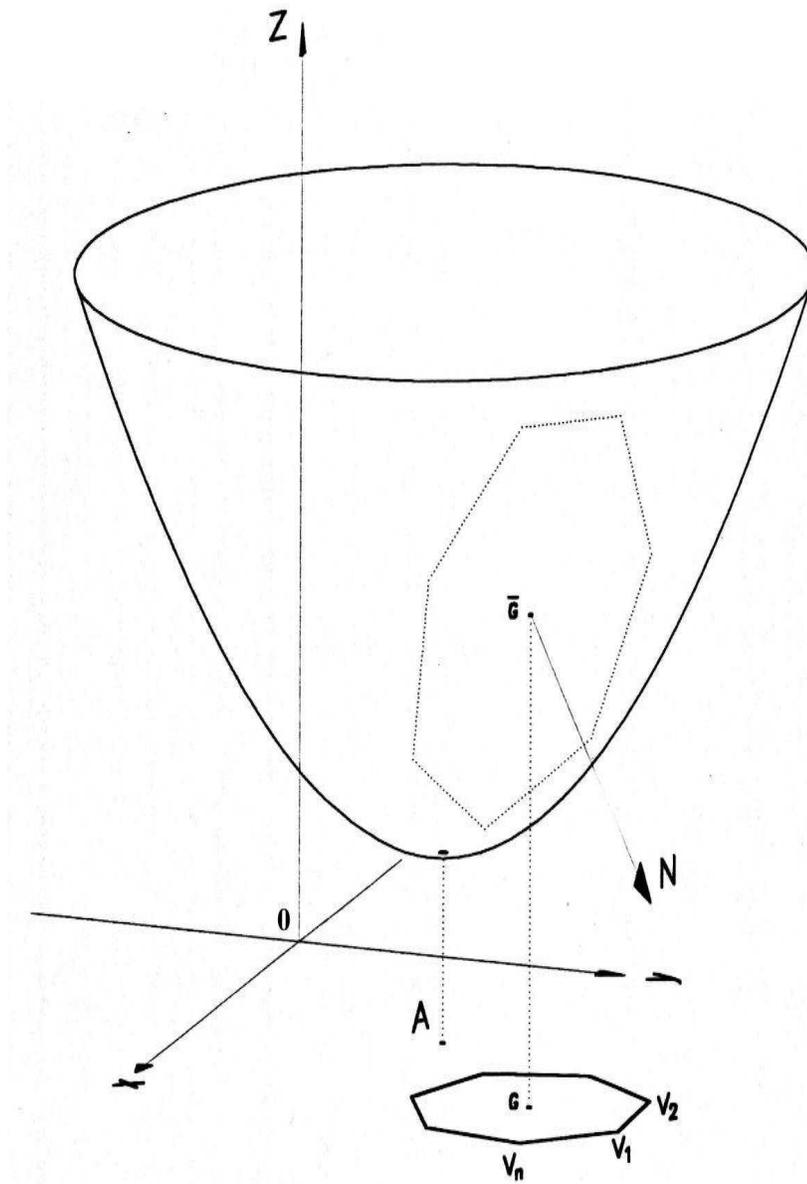


Figura 2. El polígono regular  $V_1 \dots V_n$  es la sombra ortogonal de un polígono regular afín inscrito en un paraboloides de revolución.

esto es,

$$(W_1, f(W_1)) \dots (W_4, f(W_4))$$

es un paralelogramo inscrito en la gráfica de  $f$ .

Sea  $V_1 \dots V_n$  un  $n$ -gono regular ( $n \geq 3$ ) en  $\mathbb{R}^2$  de centro  $G$  y circunradio  $\rho$ .

Si  $G = A$ , entonces

$$f(V_k) = a \|V_k - G\| - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d = a\rho^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d, \quad (\text{por (9)})$$

y para  $k = 1, \dots, n$ ,

$$(V_k, f(V_k)) = (V_k, 0) + (0, 0, f(V_k)) = (V_k, 0) + \left(0, 0, a\rho^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d\right);$$

por tanto,  $(V_1, f(V_1)) \dots (V_n, f(V_n))$  es un traslado del  $n$ -gono regular  $(V_1, 0) \dots (V_n, 0)$ , de centroide  $\bar{G} = (G, 0) + \left(0, 0, a\rho^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d\right)$ , expresión que se obtiene de (6) haciendo  $\delta = \|A - G\| = 0$ , como es aquí el caso.

Si  $G \neq A$ , para una rotulación adecuada podemos considerar los vértices de  $V_1 \dots V_n$  en circuito positivo, de tal manera que  $V_1 - G$  tiene la misma dirección y sentido que la rotación positiva de  $A - G$  a través del ángulo  $\theta = \angle AGV_1$  (lo cual siempre es posible). Es decir,

$$V_1 - G = \rho\delta^{-1}(A - G)\mathcal{Q}(\theta),$$

donde  $\delta = \|A - G\|$ . Consecuentemente

$$V_k - G = (V_1 - G)\mathcal{Q}\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right),$$

o bien, teniendo presente la parte (i) del Lema 1.1,

$$V_k = G + \rho\delta^{-1}(A - G)\mathcal{Q}\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (13)$$

donde  $\mathcal{Q}(\theta)$  es la matriz ortogonal representada en (1). Así, se obtiene

$$f(V_k) = a \|V_k - G\| - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \quad (\text{por (9)})$$

$$= a \left\| G - A + \rho\delta^{-1}(A - G)\mathcal{Q}\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right) \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \quad (\text{por (13)})$$

$$= a \left\| \rho\delta^{-1}(A - G) \left[ \mathcal{Q}\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right) - I \right] + (\rho\delta^{-1} - 1)(A - G) \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d$$

$$= a \left\| 2\rho\delta^{-1} \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] (A - G)\mathcal{Q}\left(\frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta + \pi}{2}\right) + (\rho\delta^{-1} - 1)(A - G) \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d$$

$$= 4a\rho^2\delta^{-2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right) \left\| (A - G)\mathcal{Q}\left(\frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta + \pi}{2}\right) \right\|^2$$

$$+ a(\rho\delta^{-1} - 1)^2 \|A - G\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d + 4a\rho\delta^{-1}(\rho\delta^{-1} - 1) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right) (A - G)\mathcal{Q}\left(\frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta + \pi}{2}\right) (A - G)^T$$

$$= 4a\rho\delta^{-2} \|A - G\|^2 \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] + a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d$$

$$+ 4a\rho\delta^{-1}(\rho\delta^{-1} - 1) \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] \|A - G\|^2 \cos \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta + \pi}{2} \right]$$

(Lema 1.1, partes (iii) y (iv))

$$= 4a\rho^2 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] + a(\rho - \delta)^2$$

$$- 4a\rho\delta(\rho\delta^{-1} - 1) \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d$$

$$= 4a\rho\delta \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] + a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d;$$

reduciendo a una sola igualdad, tenemos para  $k = 1, \dots, n$ ,

$$f(V_k) = 4a\rho\delta \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] + a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d, \quad (14)$$

de lo cual se sigue

$$\sum_{k=1}^n f(V_k) = 4a\rho\delta \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] + n \left[ a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right]; \quad (15)$$

utilizando identidades trigonométricas (ver, por ejemplo, [1, pp. 106]), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( 1 - \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( n - \cos \theta \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} \operatorname{sen} \theta \sum_{k=1}^n \operatorname{sen} \frac{2\pi(k-1)}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( n - \cos \theta - \cos \theta \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{2\pi k}{n} \operatorname{sen} \theta \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( n - \cos \theta - \cos \theta \frac{\operatorname{sen} \frac{n-1}{2} \frac{2\pi}{n} \cos \frac{n}{2} \frac{2\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}} + \operatorname{sen} \theta \frac{\operatorname{sen} \frac{n-1}{2} \frac{2\pi}{n} \operatorname{sen} \frac{n}{2} \frac{2\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (n - \cos \theta + \cos \theta + 0) = \frac{n}{2};
 \end{aligned}$$

al reemplazar en (15) se obtiene

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(V_k) = a(\rho^2 + \delta^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d,$$

y por tanto, si  $\bar{G}$  es el centroide de los puntos  $(V_1, f(V_1)), \dots, (V_n, f(V_n))$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \bar{G} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (V_k, f(V_k)) = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(V_k) \right) \\
 &= \left( G, a(\rho^2 + \delta^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right),
 \end{aligned}$$

tal como aparece en (6).

Además, si  $N$  es el vector introducido en (8), entonces se obtiene después de utilizar

(6), (13) y la parte (iv) del Lema 1.1 que

$$\begin{aligned}
N [(V_k, f(V_k)) - \bar{G}]^T &= N \left( V_k - G, f(V_k) - a(\rho^2 + \delta^2) + \frac{b^2 + c^2}{4a} - d \right)^T \\
&= N \left( \rho\delta^{-1}(A - G) \mathcal{Q} \left( \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right), 4a\rho\delta \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] - 2a\rho\delta \right)^T \\
&= N \left( \rho\delta^{-1}(A - G) \mathcal{Q} \left( \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right), 2a\rho\delta \left\{ 2 \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2} \right] - 1 \right\} \right)^T \\
&= N \left( \rho\delta^{-1}(A - G) \mathcal{Q} \left( \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right), -2a\rho\delta \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] \right)^T \\
&= 2a\rho\delta^{-1}(A - G) \mathcal{Q} \left( \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right) (A - G)^T - 2a\rho\delta \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] \\
&= 2a\rho\delta^{-1} \|A - G\|^2 \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] - 2a\rho\delta \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] \\
&= 2a\rho\delta \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] - 2a\rho\delta \cos \left[ \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right] = 0.
\end{aligned}$$

Se infiere así que todos los puntos  $(V_1, f(V_1)), \dots, (V_n, f(V_n))$ , y su centroide  $\bar{G}$  están en el plano representado en (7).

Probaremos a continuación que  $(V_1, f(V_1)), \dots, (V_n, f(V_n))$  es un  $n$ -gono regular afín de centroide  $\bar{G}$ . Al respecto notemos primero que los puntos  $(V_1, f(V_1)), \dots, (V_n, f(V_n))$  y  $\bar{G}$  (los cuales están en el plano dado en (7)) no son colineales. De lo contrario existe un escalar  $t \neq 0$  tal que

$$(V_2, f(V_2)) - \bar{G} = t [(V_1, f(V_1)) - \bar{G}],$$

esto es,

$$(V_2 - G, -2a\rho^2 \cos(2\pi/n)) = t(V_1 - G, -2a\rho^2),$$

lo que implica  $V_2 - G = t(V_1 - G)$ , lo cual es imposible dado que  $V_1 - G$  y  $V_2 - G$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}^2$  por ser  $V_1 \dots V_n$  un polígono regular, de hecho no degenerado. Por lo tanto, el plano

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^3 : X \text{ satisface (7)}\} \quad (16)$$

a través del punto  $\bar{G}$ , es generado por los vectores  $(V_1, f(V_1)) - \bar{G}$  y  $(V_2, f(V_2)) - \bar{G}$ , es decir,

$$\mathcal{H} = \{\bar{G} + s[(V_1, f(V_1)) - \bar{G}] + t[(V_2, f(V_2)) - \bar{G}] : s, t \in \mathbb{R}\} \quad (17)$$

([1, pp. 478–480, Theorem 13.10]). Ahora consideremos la transformación afín  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$  representada por

$$\varphi(X) = X\mathcal{L} + \left[ 2a(A - G)G + a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right] (0, 0, 1),$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\mathcal{L}$  es la matriz  $2 \times 3$  cuya primera, segunda y tercera columnas son  $(1, 0)^T$ ,  $(0, 1)^T$  y  $-2a(A - G)^T$ , respectivamente. Por lo tanto, más explícitamente

$$\varphi(X) = \left( X, -2a(A - G)(X - G)^T + a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right), \quad (18)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ . Debemos probar primero que  $\varphi$  es, en efecto, una función de codominio  $\mathcal{H}$  (un conjunto afín):

$$\begin{aligned} N[\varphi(X) - \bar{G}]^T &= N(X - G, -2a(A - G)(X - G)^T)^T && \text{(por (6) y (18))} \\ &= 2a(A - G)(X - G)^T - 2a(A - G)(X - G)^T = 0 && \text{(por (8)).} \end{aligned}$$

Así pues,  $\varphi(X) \in \mathcal{H}$  para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ .

Además,

$$\begin{aligned} \varphi(V_k) &= \left( V_k, -2a(A - G)(V_k - G)^T + a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) && \text{(por (18))} \\ &= \left( V_k, -2a\rho\delta^{-1}(A - G)\mathcal{Q}\left(-\frac{2\pi(k-1)}{n} - \theta\right)(A - G)^T \right. \\ &\quad \left. + a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) && \text{(por (13) y Lema 1.1 parte (ii))} \\ &= \left( V_k, -2a\rho\delta \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right) + 2a\rho\delta + a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ &\quad \text{(Lema 1.1 parte (iv))} \\ &= \left( V_k, 2a\rho\delta \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right) \right] + a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ &= \left( V_k, 4a\rho\delta \sin^2\left(\frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\theta}{2}\right) + a(\rho - \delta)^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ &= (V_k, f(V_k)), \quad k = 1, \dots, n && \text{(por (14))} \end{aligned}$$

y

$$\varphi(X) = \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(V_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (V_k, f(V_k)) = \bar{G},$$

dado que las transformaciones afines preservan las combinaciones lineales promedio ([3, pp. 423]). Así las cosas, probaremos seguidamente que  $\varphi$  es una biyección. Si  $\varphi(X) = \varphi(Y)$  entonces, por (18),

$$(X - Y, -2a(A - G)(X - Y)^T) = 0,$$

lo que implica  $X = Y$  y  $\varphi$  es inyectiva. Si  $Y \in \mathcal{H}$  entonces según (17) existen escalares  $s$  y  $t$  tales que

$$\begin{aligned} Y &= \bar{G} + s[(V_1, f(V_1)) - \bar{G}] + t[(V_2, f(V_2)) - \bar{G}] \\ &= \varphi(G) + s[\varphi(V_1) - \varphi(G)] + t[\varphi(V_2) - \varphi(G)] \\ &= s\varphi(V_1) + t\varphi(V_2) + (1 - s - t)\varphi(G) \\ &= \varphi(sV_1 + tV_2 + (1 - s - t)G), \end{aligned}$$

por lo cual  $\varphi$  es sobre.

Se infiere que  $(V_1, f(V_1)) \dots (V_n, f(V_n))$  es un  $n$ -gono regular afín de centroide  $\bar{G}$  (ver Definición 1.2) inscrito en la gráfica de  $f$ .  $\square$

## 2. *Teselados regulares y semirregulares como sombras ortogonales de superficies poliédricas de polígonos regulares afines*

Las anteriores propiedades del paraboloides de revolución inducen a una inusitada composición estética de superficies poliédricas de polígonos regulares afines (ver Definición 1.2) inscritos en la cuádrica.

### 2.1. *Un teselado regular*

Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el teselado regular  $\{4, 4\}$  constituido de cuadrados con vértices de coordenadas enteras.

Según el Teorema 1.3, los puntos

$$(m, n, f(m, n)),$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros, son los vértices de una superficie poliédrica de paralelogramos inscritos en el paraboloides de revolución representado en (3), tal como se muestra en la Figura 3 cuando la cuádrica abre hacia abajo.

### 2.2. *Un teselado semirregular*

Sea  $V_1 \dots V_4$  un cuadrado en  $\mathbb{R}^2$  dado en circuito positivo, y tal que su centro es el origen  $O$ , sus lados son paralelos a los ejes coordenados y el vértice  $V_1$  está en el primer cuadrante.

Consideremos ahora el teselado semirregular  $4.8^2$  compuesto de cuadrados y octágonos regulares en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $V_1 \dots V_4$  es uno de sus cuadrados (ver Figura 4). Entonces con ayuda del computador puede verificarse que los puntos

$$P_{ijk} = \left\{ 1 + [1 + (-1)^k]^{1/2} \right\} V_1 + \frac{1}{4} \left\{ 7i - 7 - \frac{3}{2}(-1)^{i+k} \right\} (V_1 - V_2) \\ + \left\{ j - 1 + \frac{1}{4}[2j - 2 - (-1)^k - (-1)^{j+k}]\sqrt{2} \right\} (V_1 + V_2), \quad i, j = 1, 2, \dots; k = 1, 2,$$

son todos los vértices del teselado contenidos en el primer cuadrante, y

$$\mathcal{F} = \{\pm P_{ijk} \mathcal{A}^n \mid i, j = 1, 2, \dots; k, n = 1, 2\}$$

es el conjunto de todos los vértices del teselado, donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

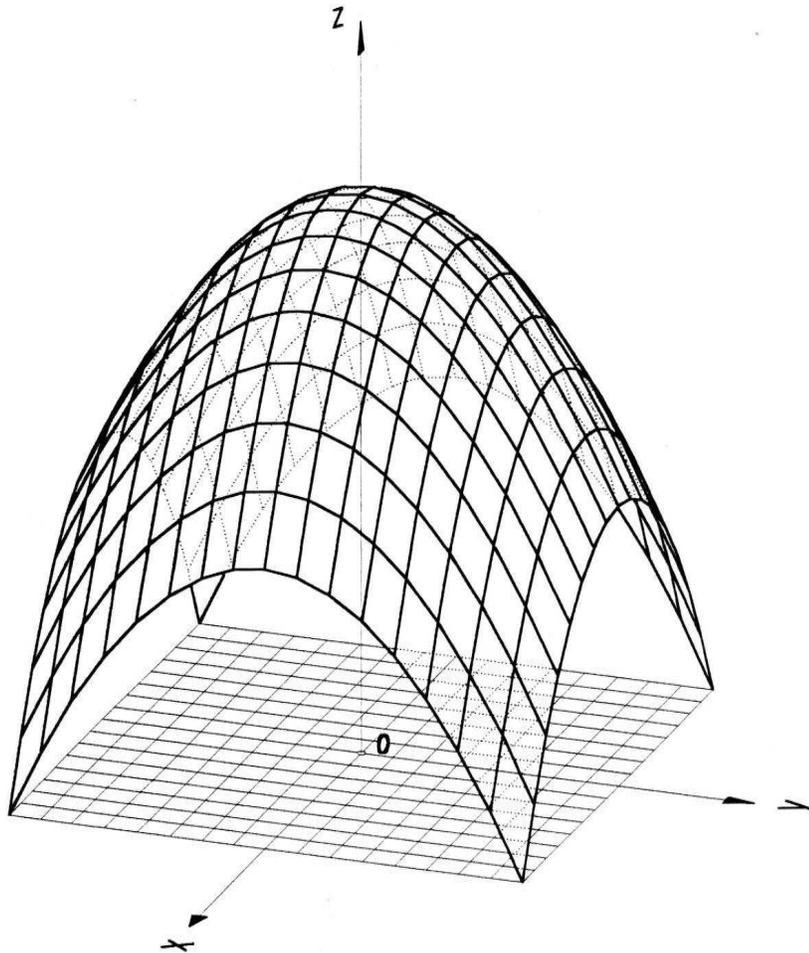


Figura 3. El teselado regular  $\{4, 4\}$  como la sombra ortogonal de paralelogramos.

es una matriz involutoria que representa una reflexión a través del eje coordenado vertical.

Para un paraboloides de revolución (3) abierto hacia abajo y eje de rotación a través del origen  $O$ , de acuerdo con el Teorema 1.3 los puntos

$$(\pm P_{ijk} \mathcal{A}^n, f(\pm P_{ijk} \mathcal{A}^n)), i, j = 1, 2, \dots; k, n = 1, 2,$$

son los vértices de una superficie poliédrica de paralelogramos y octágonos regulares afines (ver Definición 1.2) inscritos en el paraboloides.

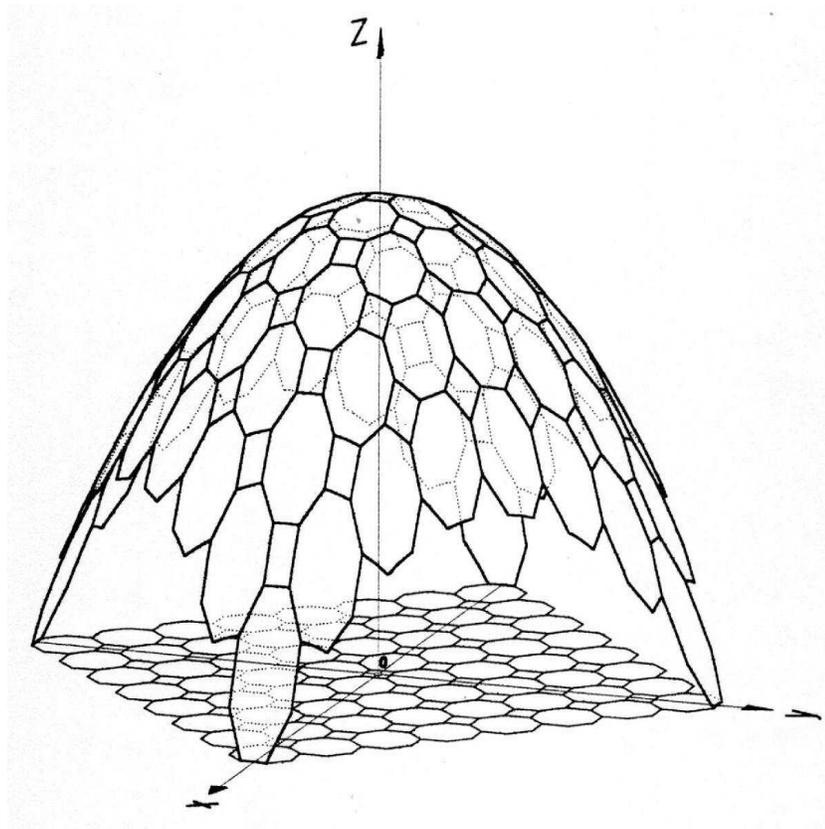


Figura 4. El teselado semirregular  $4.8^2$  como la sombra ortogonal de paralelogramos y octágonos regulares afines.

### 3. *La circunferencia como la sombra ortogonal de una elipse inscrita en un paraboloides de revolución prefijado*

Probaremos a continuación que todo círculo en el plano es la proyección ortogonal de una elipse inscrita en un paraboloides de revolución prefijado.

**Teorema 3.1.** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuya expresión en (3) representa un paraboloides de revolución de vértice dado por (4) y (5). Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia en  $\mathbb{R}^2$  de centro  $G$  y radio  $\rho$ . Entonces

- (i) Si  $G = A$ , el traslado de  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}$  como figura del plano coordenado  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ ) por

$$\left\{ a\rho^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right\} (0, 0, 1) \quad (19)$$

está inscrito en la gráfica de  $f$ . Por tanto, su proyección ortogonal sobre  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  es la circunferencia  $\mathcal{C}$ .

- (ii) Si  $G \neq A$  el lugar geométrico

$$\mathcal{E} = \{(X, f(X)) \mid X \in \mathcal{C}\} \quad (20)$$

es una elipse inscrita en la gráfica de  $f$ , descrita explícitamente como sigue:

- (a) El punto  $\bar{G}$  dado en (6) es el centro de  $\mathcal{E}$ , donde  $\delta = \|A - G\|$ .

- (b) Los puntos

$$\bar{G} \pm \rho\delta^{-1}(A - G, -2a\delta^2) \quad (21)$$

son los vértices mayores de  $\mathcal{E}$ . Por tanto, su semieje mayor mide  $\rho\sqrt{1 + 4a^2\delta^2}$ .

- (c) Los puntos

$$\bar{G} \pm \rho\delta^{-1}((A - G)^*, 0) \quad (22)$$

son los vértices menores de  $\mathcal{E}$ . Por tanto, su semieje menor mide  $\rho$ .

- (d) Los focos de  $\mathcal{E}$  son los puntos

$$\bar{G} + \frac{2\|a\|\rho}{\sqrt{1 + 4a^2\delta^2}}(-1)^k(A - G, -2a\delta^2), \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

- (e) La ecuación (7) representa el plano de  $\mathcal{E}$ , donde  $N$  aparece en (8).

- (f) La elipse  $\mathcal{E}$  está descrita paramétricamente por la función  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = \bar{G} + (\rho(\cos(2\pi t + \theta)), \text{sen}(2\pi t + \theta)), -2a\rho\delta \cos 2\pi t, \quad (24)$$

para todo  $t \in [0, 1]$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $A - G$  y el vector coordenado unitario  $(1, 0)$ . Los vértices mayores y menores de la elipse están representadas por

$$\alpha(0) = \alpha\left(\frac{3 + (-1)^k}{4}\right) = \bar{G} + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G, -2a\delta^2)$$

y

$$\alpha\left(\frac{2 + (-1)^k}{4}\right) = \bar{G} + \rho\delta^{-1}(-1)^k((A - G)^*, 0),$$

respectivamente, para todo  $k = 1, 2$  (ver Figura 5).

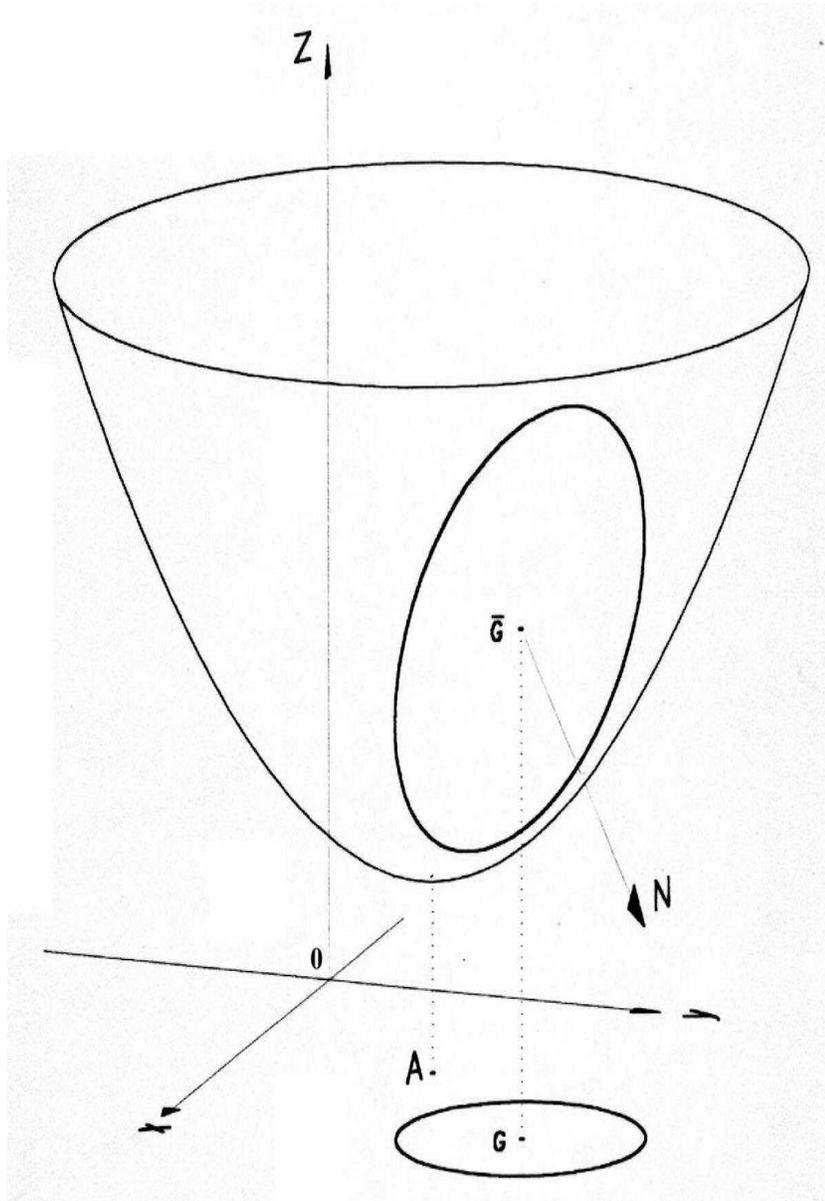


Figura 5. La circunferencia como la sombra ortogonal de una elipse inscrita en un paraboloides de revolución.

*Demostración.* Si  $G = A$  y  $X \in \mathcal{C}$ , de (9) recibimos

$$\begin{aligned} (X, f(X)) &= (X, 0) + f(X)(0, 0, 1) \\ &= (X, 0) + \left( a\rho^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) (0, 0, 1), \end{aligned}$$

puesto que  $\|X - G\| = \rho$ . Por tanto, el traslado de  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}$  como figura del plano coordinado  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ ), por el vector dado en (19) está inscrito en la gráfica de  $f$ , y su proyección ortogonal sobre  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  es la circunferencia  $\mathcal{C}$ .

De acuerdo con las partes (2), (ii) y (vi) del Lema 1.1, obtenemos

$$\begin{aligned} (A - G)[(A - G)^*]^T &= (A - G) \left[ (A - G) \mathcal{Q} \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right]^T \\ &= (A - G) \mathcal{Q}^T \left( -\frac{\pi}{2} \right) (A - G)^T \\ &= (A - G) \mathcal{Q} \left( \frac{\pi}{2} \right) (A - G)^T \\ &= \|A - G\|^2 \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

por lo cual si  $G \neq A$  entonces los dos segmentos de recta con extremos en los puntos en (21) y (22), respectivamente, se bisecan perpendicularmente en el punto  $\bar{G}$ . De la expresión anterior no es difícil probar que dichos puntos satisfacen la ecuación (7), es decir, están en el plano  $\mathcal{H}$  definido en (16).

Además los puntos en (21) y (23) están en la recta

$$X(t) = \bar{G} + t(A - G, -2a\delta^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

puesto que están representados por

$$X(\rho\delta^{-1}(-1)^k) \quad \text{y} \quad X \left( \frac{2\|a\|\rho}{\sqrt{1 + 4a^2\delta^2}}(-1)^k \right),$$

respectivamente,  $k = 1, 2$ , lo que implica, a la luz de estas expresiones, que los puntos en (23) (además de equidistar de  $\bar{G}$ ) están entre los puntos dados en (21).

También pueden verificarse directamente las siguientes relaciones, teniendo presentes (6), (9) y (25):

$$\bar{G} + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G, -2a\delta^2) = (G + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G), f(G + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G))),$$

$$G + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G) \in \mathcal{C},$$

$$\bar{G} + \rho\delta^{-1}(-1)^k((A - G)^*, 0) = (G + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G)^*, f(G + \rho\delta^{-1}(-1)^k(A - G)^*))$$

y

$$\bar{G} + \rho\delta^{-1}(-1)^k((A - G)^*, 0) \in \mathcal{C},$$

para todo  $k = 1, 2$ .

De estas expresiones se sigue, como probaremos a continuación, que los puntos en (21) y (22) están en la siguiente elipse  $\mathcal{F}$  con eje mayor de longitud  $2\rho\sqrt{1 + 4a^2\delta^2}$ .

Sea entonces  $\mathcal{F}$  la elipse de centro  $\bar{G}$  dado en (6), con vértices mayores y menores en los puntos que aparecen en (21) y (22), respectivamente, y con focos en los puntos en (23). En efecto, tales puntos están correlacionados satisfaciendo las distancias esenciales asociadas a una elipse ([5, pp. 254–256]).

Si  $X \in \mathcal{C}$  y  $d_k(X)$  es la distancia entre  $(X, f(X))$  y el punto en (23), entonces

$$d_k^2(X) = \left\| (X, f(X)) - \bar{G} - \frac{2|a|\rho}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k(A-G, -2a\delta^2) \right\|^2. \quad (26)$$

Se puede ver que la expresión dentro de la norma es el vector

$$\left( X - G - \frac{2|a|\rho}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k(A-G), a\|X - A\|^2 - a(\delta^2 + \rho^2) + \frac{4a|a|\rho\delta^2}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k \right).$$

Si se denota como  $\xi_2$  la componente derecha del vector anterior, se puede ver que

$$\begin{aligned} \xi_2 &= a\|(X-G) - (A-G)\|^2 - a(\delta^2 + \rho^2) + \frac{4a|a|\rho\delta^2}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k \\ &= a\left[\|X-G\|^2 + \|A-G\|^2 - 2(X-G)(A-G)^T\right] - a(\delta^2 + \rho^2) + \frac{4a|a|\rho\delta^2}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k \\ &= -2a(X-G)(A-G)^T + \frac{4a|a|\rho\delta^2}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k, \end{aligned}$$

y al reemplazar en (26) se tiene

$$\begin{aligned} d_k^2(X) &= \|X-G\|^2 + \frac{4a^2\delta^2}{1+4a^2\delta^2}\|A-G\|^2 - \frac{4|a|\rho}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k(X-G)(A-G)^T \\ &\quad + 4a^2[(X-G)(A-G)^T]^2 + \frac{16a^4\delta^4\rho^2}{1+4a^2\delta^2} - \frac{16a^2|a|\delta^2\rho}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k(X-G)(A-G)^T \\ &= \rho^2 + \frac{4a^2\delta^2\rho^2}{1+4a^2\delta^2} - \frac{4|a|\rho}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k(X-G)(A-G)^T \\ &\quad + 4a^2[(X-G)(A-G)^T]^2 + \frac{16a^4\delta^4\rho^2}{1+4a^2\delta^2} - \frac{16a^2|a|\delta^2\rho}{\sqrt{1+4a^2\delta^2}}(-1)^k(X-G)(A-G)^T \\ &= \rho^2(1+4a^2\delta^2) - 4|a|\rho\sqrt{1+4a^2\delta^2}(-1)^k(X-G)(A-G)^T \\ &\quad + 4a^2[(X-G)(A-G)^T]^2 \\ &= \left[ \rho\sqrt{1+4a^2\delta^2} - 2|a|(-1)^k(X-G)(A-G)^T \right]^2; \end{aligned}$$

por tanto,

$$d_k(X) = \left| \rho\sqrt{1+4a^2\delta^2} - 2|a|(-1)^k(X-G)(A-G)^T \right|, \quad k = 1, 2, \quad X \in \mathcal{C}. \quad (27)$$

Pero

$$\begin{aligned}
-2|a|(-1)^k(X-G)(A-G)^T &= -2|a| [(-1)^k(X-G)(A-G)^T] \\
&\geq -2|a| |(X-G)(A-G)^T| \\
&\hspace{15em} \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)} \\
&\geq -2|a| \|X-G\| \|A-G\| \\
&= -2|a|\delta\rho \hspace{15em} \text{(si } X \in \mathcal{C}),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\rho\sqrt{1+4a^2\delta^2} - 2|a|(-1)^k(X-G)(A-G)^T &\geq \rho\sqrt{1+4a^2\delta^2} - 2|a|\delta\rho \quad \text{(si } X \in \mathcal{C}), \\
&> \rho\sqrt{4a^2\delta^2} - 2|a|\delta\rho \\
&= 2|a|\delta\rho - 2|a|\delta\rho = 0.
\end{aligned}$$

Se sigue de (27) que

$$d_k(X) = \rho\sqrt{1+4a^2\delta^2} - 2|a|(-1)^k(X-G)(A-G)^T, \quad k=1,2, \quad X \in \mathcal{C}, \quad (28)$$

por lo cual

$$d_1(X) + d_2(X) = 2\rho\sqrt{1+4a^2\delta^2}$$

para todo  $X \in \mathcal{C}$ , donde el miembro derecho es la longitud del eje mayor de  $\mathcal{F}$ . Así se infiere que

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}, \quad (29)$$

donde  $\mathcal{E}$  es el lugar geométrico definido en (20).

Si  $(P, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  y  $(P, z) \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H}$  es el plano definido en (16), entonces

$$N[(P, z) - \bar{G}]^T = 0,$$

o bien, según (6), (7) y (8),

$$z = a(\delta^2 + \rho^2) + d - \frac{b^2 + c^2}{4a} - 2a(A-G)(P-G)^T \quad (30)$$

Si  $P = G$ , entonces por (30) y (6) tendríamos  $(P, z) = \bar{G}$ , lo cual es imposible dado que  $\bar{G} \notin \mathcal{F}$ , y por tanto debe tenerse  $P \neq G$ .

Si  $P \notin \mathcal{C}$  entonces el rayo  $\overrightarrow{GP}$  corta la circunferencia  $\mathcal{C}$  en el punto  $P_o$ . Ahora, por el Teorema de la Curva de Jordan,  $P$  está en la componente acotada o en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 \sim \mathcal{C}$  ([2, pp. 183-184, Theorem 8.40]).

Si  $P$  está en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 \sim \mathcal{C}$ , entonces  $\|P-G\| < \rho$ , por lo cual el punto  $P$  está entre  $G$  y  $P_o$ , así que existe  $t \in (0, 1)$  tal que

$$P = (1-t)G + tP_o.$$

Por otro lado, la transformación afín biyectiva  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$  definida en (18) preserva las combinaciones lineales promedio, así:

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= (1-t)\varphi(G) + t\varphi(P_o) \\ &= (1-t) \left( G, a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ &\quad + t \left( P_o, -2a(A-G)(P_o-G)^T + a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ &= (1-t)\bar{G} + t(P_o, f(P_o)), \quad (\text{por (6) y (9)}),\end{aligned}$$

dado que  $P_o \in \mathcal{C}$ . Pero por (18),

$$\varphi(P) = \left( P, -2a(A-G)(P-G)^T + a(\delta^2 + \rho^2) - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) = (P, z). \quad (31)$$

Por tanto,

$$(P, z) = (1-t)\bar{G} + t(P_o, f(P_o)),$$

lo cual implica que  $(P, z)$  es un punto del interior relativo de  $\text{conv}(\mathcal{F})$ , que es la envolvente convexa de  $\mathcal{F}$  ([4, pp. 45, Theorem 6.1]); pero además  $(P, z) \in \mathcal{F} = \text{Fr}(\text{conv}(\mathcal{F}))$ , lo cual es imposible.

Así que  $P$  debe estar en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 \sim \mathcal{C}$ , esto es, debemos tener  $\|P - G\| > \rho$ . Pero entonces el punto  $P_o$  está entre  $G$  y  $P$ , es decir,

$$P_o = (1-s)G + sP$$

para algún  $s \in (0, 1)$ , de donde

$$\begin{aligned}\varphi(P_o) &= (P_o, f(P_o)) && (\text{por (18) y (9)}) \\ &= (1-s)\varphi(G) + s\varphi(P) && (\text{por (31)}) \\ &= (1-s)\bar{G} + s(P, z).\end{aligned}$$

De esta expresión, y por un argumento análogo al caso anterior,  $(P_o, f(P_o))$  está en el interior relativo de  $\text{conv}(\mathcal{F})$  y en  $\mathcal{F}$  (pues  $P_o \in \mathcal{C}$ ), lo cual también es imposible.

Por tanto, si  $(P, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  y  $(P, z) \in \mathcal{F}$ , entonces  $P \in \mathcal{C}$ , y consecuentemente de (30), (9) y (20) se tiene que  $z = f(P)$  y  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ . De esta contención y de (23) concluimos que  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ .

Finalmente procederemos a probar la parte (f) del Teorema 3.1. Si  $\theta$  es el ángulo entre  $A - G$  y el vector coordenado unitario  $(1, 0)$ , entonces

$$A - G = \delta(\cos \theta, \text{sen } \theta), \quad (32)$$

y  $\mathcal{C}$  está descrita paramétricamente por la función  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\beta(t) = G + \rho(\cos(2\pi t + \theta), \text{sen}(2\pi t + \theta)),$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Puesto que otra expresión para  $\alpha(t)$  en (24) es

$$\alpha(t) = (\beta(t), f(\beta(t))), \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

se sigue de (20) que

$$\mathcal{E} = \{\alpha(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} = \alpha([0, 1]).$$

Además, teniendo presentes las relaciones

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(-1)^k + \theta\right) &= -\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}(-1)^k + \theta\right) = (-1)^k \cos \theta, \\ \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(-1)^k + \theta\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}(-1)^k + \theta\right) = (-1)^k \operatorname{sen} \theta, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

obtenemos de (24), (32) y (2) las últimas relaciones que aparecen en la parte (f) del Teorema 3.1.  $\square$

#### 4. Intersección de un plano con el paraboloides de revolución

Recíprocamente, ahora probaremos que todo plano que corta al eje de rotación de un paraboloides de revolución en un solo punto, si interseca al paraboloides lo hace en una elipse. Además, la proyección ortogonal de la elipse sobre un plano normal a dicho eje es una circunferencia. Con apenas unos pocos caracteres matemáticos se determinan unívocamente los diferentes elementos geométricos de la elipse y su sombra ortogonal.

**Teorema 4.1.** *Consideremos nuevamente la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuya expresión en (3) representa un paraboloides de revolución de vértice dado por (4) y (5), cuyo eje de rotación es la recta  $\mathcal{L}$  a través del vértice paralela al vector coordenado unitario  $(0, 0, 1)$ .*

*Sea  $\mathcal{H}$  un plano en  $\mathbb{R}^3$  a través de un punto  $(P_o, f(P_o)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  de la gráfica de  $f$  intersecando a  $\mathcal{L}$  en exactamente un punto, y de ecuación*

$$N(X - \bar{G})^T = 0, \quad (33)$$

donde son dados

$$N = (\Lambda, 1), \quad \Lambda \in \mathbb{R}^2, \quad (34)$$

$$\bar{G} = \left( G, \frac{a^{-1} \|\Lambda\|^2}{4} + a \left\| P_o - A + \frac{a^{-1} \Lambda}{2} \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \quad (35)$$

y

$$G = A - \frac{a^{-1} \Lambda}{2}. \quad (36)$$

Consideremos también la circunferencia  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{R}^2$  de centro  $G$  y radio

$$\rho = \left\| P_o - A + \frac{a^{-1} \Lambda}{2} \right\|, \quad (37)$$

y el lugar geométrico

$$\mathcal{E} = \{(X, f(X)) \mid (X, f(X)) \in \mathcal{H}\}, \quad (38)$$

que es la intersección del plano  $\mathcal{H}$  con la gráfica de  $f$ .

Entonces,

(i) Si  $\Lambda = \mathbf{0}$ , entonces

$$\mathcal{E} = \mathcal{C} + f(P_o)(0, 0, 1), \quad (39)$$

y por tanto  $\mathcal{C}$  (como figura del plano coordenado  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ ) es la proyección ortogonal de  $\mathcal{E}$ .

(ii) Si  $\Lambda \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\mathcal{E}$  es una elipse inscrita en la gráfica de  $f$ , descrita explícitamente como sigue:

(a) El punto  $\bar{G}$  dado en (35) es el centro de  $\mathcal{E}$ .

(b) Los vértices mayores de  $\mathcal{E}$  son los puntos

$$\left( A - \frac{a^{-1}\Lambda}{2}, \frac{a^{-1}\|\Lambda\|^2}{4} + a \left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ + a^{-1}|a| \|\Lambda\|^{-1} \left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\| (-1)^k (\Lambda, -\|\Lambda\|^2), \quad k = 1, 2. \quad (40)$$

Por tanto su semieje mayor mide

$$\left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\| \sqrt{1 + \|\Lambda\|^2}. \quad (41)$$

(c) los vértices menores de  $\mathcal{E}$  son los puntos

$$\left( A - \frac{a^{-1}\Lambda}{2}, \frac{a^{-1}\|\Lambda\|^2}{4} + a \left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ + a^{-1}|a| \|\Lambda\|^{-1} \left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\| (-1)^k (\Lambda^*, 0), \quad k = 1, 2. \quad (42)$$

Por tanto su semieje menor mide

$$\left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\|. \quad (43)$$

(d) Los focos de  $\mathcal{E}$  son los puntos

$$\left( A - \frac{a^{-1}\Lambda}{2}, \frac{a^{-1}\|\Lambda\|^2}{4} + a \left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\|^2 - \frac{b^2 + c^2}{4a} + d \right) \\ + \frac{a^{-1}|a| \left\| P_o - A + \frac{a^{-1}\Lambda}{2} \right\|}{\sqrt{1 + \|\Lambda\|^2}} (-1)^k (\Lambda, -\|\Lambda\|^2), \quad k = 1, 2. \quad (44)$$

*Demostración.* Bajo las hipótesis del teorema existe un único punto  $P$  en  $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}$ , y por tanto, si  $(u, v, z) \in \mathbb{R}^3$  es un vector normal del plano  $\mathcal{H}$ , se cumple

$$(u, v, z)(P - \bar{G})^T = 0,$$

dado que  $\bar{G} \in \mathcal{H}$  según (33). El eje  $\mathcal{L}$  tendría así la representación paramétrica

$$X(t) = P + t(0, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

por ser  $(0, 0, 1)$  un valor director de  $\mathcal{L}$ . Pero entonces

$$\begin{aligned} (u, v, z)[X(t) - \bar{G}]^T &= (u, v, z)[(P - \bar{G}) + t(0, 0, 1)]^T \\ &= (u, v, z)(P - \bar{G})^T + t(u, v, z)(0, 0, 1)^T \\ &= 0 + tz = tz, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si  $z = 0$  entonces el miembro derecho de la última igualdad sería nulo para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es decir,  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ , en contravía a lo supuesto sobre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{L}$ . Se infiere que todo vector normal de  $\mathcal{H}$  tiene su tercera componente no nula, y por esto (salvo múltiplos) es de la forma mostrada en (34).

Si  $\Lambda = \mathbf{0}$ , de (34) obtenemos  $N = (0, 0, 1)$ ; de (36),  $G = A$ ; de (35) y (9),  $\bar{G} = (A, f(P_o))$ , y de (37),  $\rho = \|P_o - A\|$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ y } (0, 0, 1)[(x_1, x_2, x_3) - (A, f(P_o))]^T = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ y } x_3 = f(P_o)\} \quad (\text{por (33)}) \\ &= \{(X, f(P_o)) \mid X \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(X, 0) + f(P_o)(0, 0, 1) \mid X \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathbb{R}^2 \times \{0\} + f(P_o)(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Por esto,

$$(X, f(X)) = (X, 0) + f(X)(0, 0, 1) \in \mathcal{H} \quad \text{si y solo si} \quad f(X) = f(P_o),$$

y (38) queda definido así:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(X, f(X)) \mid f(X) = f(P_o)\} \\ &= \{(X, f(X)) \mid \|X - A\|^2 = \|P_o - A\|^2 = \rho^2\} \quad (\text{por (9)}) \\ &= \{(X, f(P_o)) \mid X \in \mathcal{C}\} = \{(X, 0) + (0, f(P_o)) \mid X \in \mathcal{C}\} \\ &= \{(X, 0) + f(P_o)(0, 0, 1) \mid X \in \mathcal{C}\} \\ &= \mathcal{C} + f(P_o)(0, 0, 1), \end{aligned}$$

considerando a  $\mathcal{C}$  como una figura del plano coordenado  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $\Lambda \neq \mathbf{0}$ , hagamos  $\delta = \|A - G\|$ , o bien (por (36))

$$\delta = \frac{|a|^{-1} \|\Lambda\|}{2}; \quad (45)$$

así  $\bar{G}$  en (35) toma la forma (6) teniendo en mente (37).

Por esto,

$$\begin{aligned}
N[(X, f(X)) - G]^T &= N\left(X - G, f(X) - a(\delta^2 + \rho^2) + \frac{b^2 + c^2}{4a} - d\right)^T \\
&= N\left(X - G, a\|X - G\|^2 - a(\delta^2 + \rho^2)\right)^T \quad (\text{por (9)}) \\
&= N\left(X - G, a[\|X - G\|^2 + \|A - G\|^2 - 2(X - G)(A - G)^T] - a(\delta^2 + \rho^2)\right)^T \\
&= N\left(X - G, a\|X - G\|^2 - a\rho^2 - 2a(X - G)(A - G)^T\right)^T \\
&= (2a(A - G), 1)\left(X - G, a\|X - G\|^2 - a\rho^2 - 2a(X - G)(A - G)^T\right)^T \\
&\hspace{15em} (\text{por (34) y (36)}) \\
&= 2a(X - G)(A - G)^T + a\|X - G\|^2 - a\rho^2 - 2a(X - G)(A - G)^T \\
&= a[\|X - G\|^2 - \rho^2],
\end{aligned}$$

esto es, reduciendo a una sola igualdad

$$N[(X, f(X)) - G]^T = a[\|X - G\|^2 - \rho^2] \quad (46)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ . Consecuentemente en (38) obtenemos

$$\mathcal{E} = \{(X, f(X)) \mid N[(X, f(X)) - \bar{G}]^T = 0\}$$

por (33), o bien, según (46),

$$\mathcal{E} = \{(X, f(X)) \mid X \in \mathcal{C}\},$$

justamente la propiedad que define a  $\mathcal{E}$  en (20).

Concluimos de la (ii) parte, literales (a), (b), (c), (d) del Teorema 3.1, que el lugar geométrico  $\mathcal{E}$  definido en (38) es una elipse inscrita en la gráfica de  $f$ , descrita explícitamente en la (ii) parte y los correspondientes literales del presente teorema. Sustituyendo los valores de  $G$ ,  $\rho$  y  $\delta$  dados en (36), (37) y (45), respectivamente, en (21), (22) y (23) obtenemos las expresiones (40), (42) y (44), respectivamente. También así se obtienen los semiejes de  $\mathcal{E}$  tal como aparecen en (41) y (43).  $\square$

## 5. Un paradigma de composición artística de aros elípticos en el espacio

Sea  $\mathcal{F}_p$  el paquete de todas las circunferencias de radio  $\rho > 0$  cuyos centros son los vértices del teselado regular  $\{3, 6\}$  ([6, pp. 34-35, Figure 2-4]), uno de los cuales es el origen  $\mathbf{0}$ .

Dado un paraboloides de revolución (3) abierto hacia arriba y eje de rotación a través de  $\mathbf{0}$ , aplicando directamente la expresión (24) del Teorema 3.1 a cada elemento de  $\mathcal{F}_p$  obtenemos un “paquete de elipses” inscritas en el paraboloides tales que

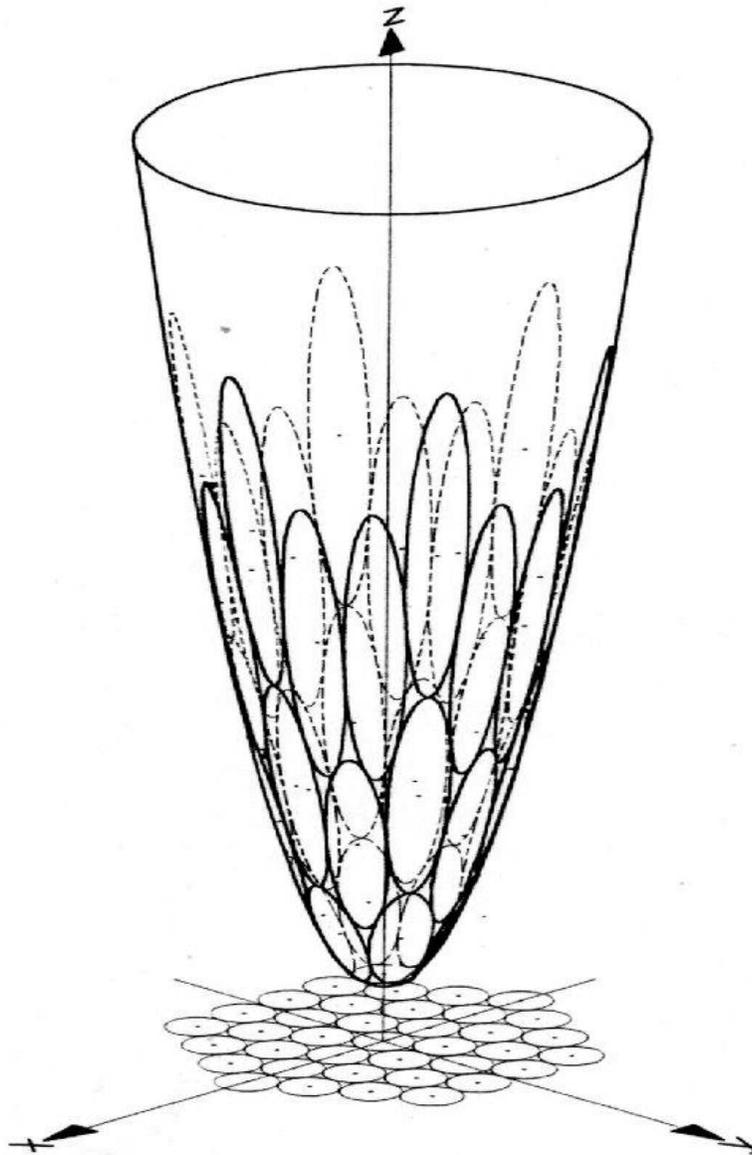


Figura 6. Una composición en el espacio de elipses tangentes inscritas en un paraboloides de revolución.

- (i)  $\rho$  es el semieje menor de cada elipse (parte (c) del Teorema 3.1);
- (ii) una de las elipses es una circunferencia con centro en el eje de rotación del paraboloides, y radio  $\rho$ ;
- (iii) cada elipse es tangente a exactamente seis elipses.

La composición artística así obtenida es mostrada en la figura 6.

### Referencias

- [1] APOSTOL Tom M. *Calculus, Vol. I*. Second edition. Xerox College Publishing, 1967.
- [2] APOSTOL Tom M. *Mathematical Analysis*. Second Printing. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- [3] BIRKHOFF G. and MAC LANE S. *Algebra*. Fourth printing. The Macmillan Company, 1970.
- [4] ROCKAFELLAR Ralph T. *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972.
- [5] SCHWARTZ Abraham. *Calculus and Analytic Geometry*. Third edition. Holt Rinehart and Winston, Inc., 1974.
- [6] WILLIAMS Robert. *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. First edition. Dover Publications, Inc., New York, 1979.

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
Duitama, Boyacá, Colombia.  
e-mail: leruizh@yahoo.es