Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 27, No. 1, 2009, pág. 37–57

Ecuaciones de Boussinesq: estimaciones uniformes en el tiempo de las aproximaciones de Galerkin espectrales

R. C. Cabrales*
M. Poblete-Cantellano*
M. A. Rojas-Medar***

Resumen. Obtenemos cotas para el error de las soluciones fuertes de las ecuaciones de Boussinesq que modelan los fluidos incompresibles y conductores de calor, suponiendo que dichas soluciones son condicionalmente asintóticamente estables.

1. Introducción

El propósito de este trabajo es estudiar las tasas de convergencia de las soluciones fuertes del problema de contorno y valores iniciales para el modelo de Boussinesq de los fluidos viscosos, incompresibles y conductores de calor. Sean $\boldsymbol{u}, \pi, \theta$ la velocidad, la presión y la temperatura del fluido, respectivamente, definidas en el cilindro $Q = \Omega \times (0, \infty)$, siendo Ω un dominio acotado de clase $C^{1,1}$ con frontera $\partial\Omega$. En la aproximación de Oberbeck-Boussinesq, el estado de tal sistema se describe mediante el siguiente conjunto

Palabras y frases claves: Método de Galerkin, Estimaciones uniforme en el tiempo, Modelo de Boussinesq.
MSC2000: 35Q30, 76M22, 65M15, 65M60.
* Grupo de Matemáticas Aplicadas, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile. Casilla 447. *e-mail*: rcabrale@ubiobio.cl
** Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Copiapó, Chile. *e-mail*: mpoblete@uda.cl
*** Grupo de Matemáticas Aplicadas, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Casilla 447. *e-mail*: marko@ueubiobio.cl

de ecuaciones en derivadas parciales (ver [4]) y condiciones iniciales y de contorno:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \theta \boldsymbol{f} \quad \text{en } Q, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{en } Q, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \theta = g \quad \text{en } Q, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \theta(0, \boldsymbol{x}) = \theta_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{para } \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \theta = 0 \quad \text{para } (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty). \tag{5}$$

En el sistema anterior, $\boldsymbol{f}$ representa un campo de fuerzas externo (usualmente igual a $f\boldsymbol{g}$, donde f es una función dada y $\boldsymbol{g}$ es el campo gravitacional), ν y λ son constantes positivas que representan los coeficientes de viscosidad y conductividad térmica, respectivamente. Este problema ha sido estudiado extensivamente en los últimos años. El problema en dominios acotados fue estudiado, por ejemplo por Korenev [5], Morimoto [6], Hishida [3], Rojas-Medar y Lorca [9], [10], [11]. Los resultados obtenidos son análogos a los de las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes y los argumentos utilizados son el método de Galerkin, semigrupos, potenciales hidrodinámicos, etc. Aquí, estamos interesados en el método de Galerkin aplicado al sistema (1)-(5), la palabra espectral siendo utilizada para indicar que las autofunciones de los operadores asociados, a saber de Stokes para la velocidad y el Laplaciano para la temperatura, son usados como base de las aproximaciones.

Es muy importante derivar cotas de error para los métodos de Galerkin, debido a la amplia aplicación de estos métodos en experimentos numéricos. Además el caso del método de Galerkin espectral puede ser usado como una preparación y guía para el método más práctico de los elementos finitos.

Un desarrollo sistemático de cotas de error para el método de Galerkin espectral aplicado a las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes fue hecho por Rautmann en [8]. Estas cotas de error son locales en el tiempo en el sentido de que ellas dependen de funciones que crecen exponencialmente con el tiempo. Como fue observado por Heywood en [2], esto es lo mejor que se puede esperar sin ninguna hipótesis acerca de la estabilidad de la solución que está siendo aproximada. Estimaciones óptimas uniformes en el tiempo para la velocidad en la norma Dirichlet fueron también obtenidas por Heywood en [2], suponiendo acotación uniforme en el tiempo de la norma L^2 del gradiente de la velocidad y estabilidad exponencial en la norma Dirichlet de la solución.

Aquí obtendremos cotas de error suponiendo que la solución $(\boldsymbol{u}, \theta)$ es condicionalmente asintóticamente estable. En [2], una noción similar fue usada para tratar las clásicas ecuaciones de Navier-Stokes. Con esta suposición, obtendremos una cota de error uniforme en el tiempo, óptima para la velocidad y temperatura. Los resultados que mostraremos extienden los resultados de [12]. Finalmente, este trabajo está distribuido de la siguiente manera: en la Sección 2 introducimos los conceptos y resultados preliminares. En la Sección 3 obtendremos algunos resultados que nos permitirán nuestro resultado principal, la última sección se dedica a la prueba de nuestra principal contribución

2. Preliminares

Recogemos aquí como referencia algunas notaciones usuales que usaremos en el trabajo. El espacio de funciones p-medibles $(1 \leq p < \infty)$ sobre Ω es denotado por $L^p(\Omega)$, y su norma por $\|\cdot\|_p$. En particular, omitiremos el subíndice para $p = 2$; así $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$, y denotamos por $(\cdot,\cdot)$ el producto escalar de L^2. Los espacios de Sóbolev serán denotados de la forma usual, esto es, $H^m(\Omega)$ y $H_0^m(\Omega)$. Espacios de funciones de valor vectorial serán denotados en negrita.

Ahora introducimos los espacios usuales en el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\ :\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},\\
\boldsymbol{V} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)\ :\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega\},\\
L_0^2(\Omega) &= \left\{p \in L^2(\Omega)\ :\ \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Las normas $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1}$ y $\|\nabla\boldsymbol{u}\|$ son equivalentes en $\boldsymbol{V}$, además, $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^2}$ y $\|A\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2}$ son equivalentes en $\boldsymbol{H}^2(\Omega)\cap\boldsymbol{V}$. Por otro lado, las normas $\|p\|_{H^1}$ y $\|\nabla p\|$ son equivalentes en $H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)$.

También consideraremos el operador de Stokes $A : D(A) \to \boldsymbol{H}$ definido por $A = P(-\Delta)$ con dominio $D(A) := \boldsymbol{H}^2(\Omega)\cap\boldsymbol{V}$, donde $P : \boldsymbol{L}^2(\Omega) \to \boldsymbol{H}$ es la proyección ortogonal de Helmholtz. El operador A es autoadjunto y positivo. Su inverso A^{-1} es continuo de $\boldsymbol{H}$ en $D(A)$. Dado que la inmersión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, la inmersión de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{H}$ es compacta. Así, A^{-1} es un operador autoadjunto, continuo y compacto en $\boldsymbol{H}$, y por los teoremas espectrales clásicos existe un conjunto de autovalores $\{\lambda^i\}_{i=1}^\infty$ satisfaciendo $A\boldsymbol{w}^i = \lambda^i\boldsymbol{w}_i$ tal que $\lambda^i \to \infty$, y una base de autofunciones $\{\boldsymbol{w}^i\}_{i=1}^\infty$ que es completa y ortogonal en los espacios $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$ y $D(A)$ dotados con los productos internos usuales $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, $(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})$, y $(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$, respectivamente. También consideramos que si $k \in \mathbb{N}$ entonces P_k denota la proyección ortogonal de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ sobre $\boldsymbol{V}_k = \text{span}\{\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{x}),\ldots,\boldsymbol{w}^k(\boldsymbol{x})\}$ y R_k

denota la proyección ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre $H_k = \mathrm{span}\{\phi^1(\boldsymbol{x}), \ldots, \phi^k(\boldsymbol{x})\}$, donde $\{\phi^i\}_{i=1}^{\infty}$ son las autovalores del operador $B = -\Delta$ con autovalores asociados γ^i.

Con las notaciones anteriores, reescribimos el problema (1)-(5) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nu A\boldsymbol{u} + P(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) = P\theta\boldsymbol{f}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \lambda B\theta + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta = g, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \theta(\boldsymbol{x},0) = \theta_0(\boldsymbol{x}), \tag{8}$$

que resulta ser equivalente a la formulación débil:

$$(\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{v}) + \nu(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\theta\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \tag{9}$$

$$(\theta_t, \phi) + \lambda(B\theta, \phi) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta, \phi) = (g, \phi), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \theta(\boldsymbol{x},0) = \theta_0(\boldsymbol{x}), \tag{11}$$

válida para toda $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ y para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$. En cuanto a la existencia de soluciones de las ecuaciones anteriores, una manera de proceder es utilizar el método de Galerkin. Consideramos entonces, las aproximaciones de Galerkin

$$\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\boldsymbol{w}^i(\boldsymbol{x}) \quad \text{y} \quad \theta^n(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{n} d_{in}(t)\phi^i(\boldsymbol{x}),$$

satisfaciendo las ecuaciones

$$\frac{d\boldsymbol{u}^n}{dt} + \nu A\boldsymbol{u}^n + P_n(\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\boldsymbol{u}^n) = P_n\theta^n\boldsymbol{f}, \tag{12}$$

$$\frac{d\theta^n}{dt} + \lambda B\theta^n + R_n(\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\theta^n) = R_n g, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{u}^n(0) = P_n\boldsymbol{u}_0, \quad \theta^n(0) = R_n, \theta_0, \tag{14}$$

lo cual es equivalente a la formulación débil,

$$(\boldsymbol{u}_t^n, \boldsymbol{v}) + \nu(A\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v}) = (\theta^n\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \tag{15}$$

$$(\theta_t^n, \phi) + \lambda(B\theta^n, \phi) + (\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\theta^n, \phi) = (g, \phi), \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u}^n(0) = P_n\boldsymbol{u}_0, \quad \theta^k(0) = R_n\theta_0, \tag{17}$$

que es válida para toda $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_n$, y para toda $\phi \in H_n$.

Las cotas dadas por el lema siguiente y la observación serán útiles para nuestros fines.

Lema 2.1 (Rautmann[8]). *Si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, entonces*

$$\|\boldsymbol{v} - P_k\boldsymbol{v}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2.$$

Además, si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)$*, entonces*

$$\|\boldsymbol{v} - P_k\boldsymbol{v}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}^2}\|P\Delta\boldsymbol{v}\|^2 \quad y \quad \|\nabla\boldsymbol{v} - \nabla P_k\boldsymbol{v}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\|P\Delta\boldsymbol{v}\|^2.$$

Observación 2.2. Del Lema 2.1, tenemos que si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, entonces

$$\|(I - P_k)P\boldsymbol{f}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\nabla P\boldsymbol{f}\|^2.$$

Por otro lado, dado que $P : \boldsymbol{H}^1(\Omega) \to \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ es un operador continuo (vea [14]), tenemos que $\|\nabla P\boldsymbol{f}\|^2 \leq C\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{H}^1}$. Así, para toda $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, tenemos

$$\|(I - P_k)P\boldsymbol{f}\| \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}}\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{H}^1}.$$

Ya que $PP_k = P_kP = P_k$, tenemos

$$\|P\boldsymbol{f} - P_k\boldsymbol{f}\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}}\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{H}^1}.$$

Las relaciones anteriores también se verifican si cambiamos P por cualquier P_m, con $m > k$. Análogamente, para toda $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$ puede probarse que

$$\|(I - P_k)P\boldsymbol{f}\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}^2}\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{H}^2}.$$

Como una consecuencia de la ortogonalidad L^2 de las funciones $\{\boldsymbol{w}^k\}_{k=1}^{\infty}$, se tiene lo siguiente: si $m > k$, $m, k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{v}^m \in \boldsymbol{V}_m$, $\boldsymbol{v}^k \in \boldsymbol{V}_k$, entonces

$$((P_m - P_k)\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}^m - \boldsymbol{v}^k) = (\boldsymbol{f}, (I - P_k)\boldsymbol{v}^m).$$

3. Concepto de estabilidad y resultado principal

En lo que sigue, asumiremos que los datos satisfacen las siguientes hipótesis:

$$\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega), \;\; \theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{18}$$

$$\sup_{t\geq 0}\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^1} < \infty \,, \quad \sup_{t\geq 0}\|\boldsymbol{f}_t\| < \infty, \tag{19}$$

$$\sup_{t\geq 0}\|g\| < \infty \,, \quad \sup_{t\geq 0}\|g_t\| < \infty. \tag{20}$$

También supondremos que existe $M > 0$ tal que la solución $(\boldsymbol{u}, \theta)$ de (1)-(5) satisface

$$\sup\{\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|, \|\nabla\theta(t)\|\} \leq M \;\text{ para todo } t \geq 0. \tag{21}$$

Si $n = 2$, entonces las condiciones (18) y (19) implican que (21) se satisface. Si $n = 3$, entonces la desigualdad (21) se verifica para $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$ y θ_0 suficientemente pequeños (ver

[11]). También supondremos que $(\boldsymbol{u}, \theta)$ es *condicionalmente asintóticamente estable* (vea [2] para nociones similares de estabilidad). Para definir esta noción de estabilidad, primero definimos las perturbaciones del sistema (1)-(5). El par $(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t), \eta(\boldsymbol{x}, t))$, definido para $t \geq t_0 \geq 0$, se llama una perturbación de $(\boldsymbol{u}, \theta)$ en el tiempo t_0 si el par $(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\theta}) := (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\xi}, \theta+\eta)$ es una solución de (1)-(5), tal que $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ y $\theta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, definiendo $\boldsymbol{\xi}_0 := \boldsymbol{\xi}(\cdot, t_0)$, $\eta_0 := \eta(\cdot, t_0)$, el par $(\boldsymbol{\xi}, \eta)$ es una solución del siguiente problema de contorno y valores iniciales:

$$\boldsymbol{\xi}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} + \nabla q = \nu\Delta\boldsymbol{\xi} + \eta \boldsymbol{f} \quad \text{en } \Omega \times (t_0, \infty), \tag{22}$$

$$\eta_t + ((\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{u}) \cdot \nabla)\eta + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\theta = \lambda\Delta\eta \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, \infty), \tag{23}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (t_0, \infty), \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \theta = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{x}), \eta(\boldsymbol{x}, t_0) = \eta_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{para toda } \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{26}$$

Ahora, definimos el concepto de solución condicionalmente asintóticamente estable.

Definición 3.1. El par $(\boldsymbol{u}, \theta)$ se dice condicionalmente asintóticamente estable si para todo $t_0 \geq 0$ existen números positivos δ_1, δ_2, M_1, M_2 y funciones continuas decrecientes $F, G : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$, $F(0) = G(0) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \lim\limits_{t\to\infty} G(t) = 0$ tales que, para toda $\boldsymbol{\xi}_0 \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)$ y para toda $\eta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, satisfaciendo $\sup\{\|P\Delta\boldsymbol{\xi}_0\|, \|B\eta_0\|\} < \delta_1$, $\sup\{\|\nabla\boldsymbol{\xi}_0\|, \|\nabla\eta_0\|\} < \delta_2$, el problema (22)-(26) es soluble de manera única con

$$\boldsymbol{\xi} \in L^2_{loc}([t_0, \infty); \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)), \qquad \boldsymbol{\xi}_t \in L^2_{loc}([t_0, \infty); \boldsymbol{H}^1(\Omega)),$$
$$\eta \in L^2_{loc}([t_0, \infty); H^1_0(\Omega) \cap H^{2,}(\Omega)), \qquad \eta_t \in L^2_{loc}([t_0, \infty); H^1(\Omega)).$$

Además,

$$\|\nabla\eta(\cdot, t)\| \leq M_1\|\nabla\theta_0\|G(t - t_0)\ ,\ \forall\, t \geq t_0, \tag{27}$$

$$\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\| \leq M_2\|\nabla\boldsymbol{\xi}_0\|F(t - t_0)\ ,\ \forall\, t \geq t_0. \tag{28}$$

Observación 3.2. Utilizamos funciones generales $F(t), G(t)$ en la definición 3.1 sólo para destacar que los resultados que deduciremos no requieren de una tasa de decaimiento exponencial.

Finalizamos esta sección enunciando nuestro principal resultado.

Teorema 3.3. *Suponga que* $(\boldsymbol{u}, \theta)$ *es condicionalmente asintóticamente estable. Entonces, existen constantes* $N \in \mathbb{N}$ *y* $C \geq 0$ *tales que si* $n \geq N$*, entonces para todo* $t \geq 0$*,*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}(\cdot,t) - \nabla \boldsymbol{u}^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} + \frac{C}{\gamma_{n+1}}, \tag{29}$$

$$\|\nabla \theta(\cdot,t) - \nabla \theta^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} + \frac{C}{\gamma_{n+1}}. \tag{30}$$

Las constantes N *y* C *dependen sólo del dominio, de las normas y de los datos de los problemas* (6)-(8) *y* (9)-(11)*, así como de las constantes mencionadas en* (21) *y en la Definición* 3.1.

4. Estimaciones a priori

Recordaremos primero un resultado general que usaremos más adelante. Una prueba se puede encontrar en [1].

Lema 4.1. *Sea* $h(t)$ *una función integrable no negativa. Supóngase que existen constantes positivas* a_1*,* a_2 *tales que*

$$\int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau \leq a_1(t - t_0) + a_2,$$

para cualesquiera t*,* t_0 *con* $0 \leq t_0 \leq t$*. Entonces,*

$$\sup_{t\geq 0}\left(e^{-t}\int_0^t e^{\tau}h(\tau)d\tau\right) < \infty.$$

Para $(\boldsymbol{u}, \theta)$ solución del problema (1)-(5), y las perturbaciones $(\boldsymbol{\xi}, \eta)$, tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.2. *Las siguientes cotas se cumplen para todo* $t \geq 0$*:*

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d}{dt}\left(\|\nabla \boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla\theta(\cdot,t)\|^2\right) &+ C_2(\|P\Delta \boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2 + \|\Delta\theta(\cdot,t)\|^2) \\ + C_3(\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2 + \|\theta_t(\cdot,t)\|^2) &\leq C\left(\|g(\cdot,t)\|^2 + \|\boldsymbol{f}(\cdot,t)\|_3^2\|\nabla\theta(\cdot,t)\|^2\right) \\ &+ C\left(\|\nabla \boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^4\|\nabla\theta(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^6\right), \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1\left(\|\theta(\cdot,t)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}_t(\cdot,t)\|^2\right) &+ \alpha_2\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\eta(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^2\right) \\ &+ \alpha_3\left(\|P\Delta\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^2 + \|\Delta\theta\|^2\right) \\ \leq C\left(\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^2\|P\Delta\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^6\right)&\|\nabla\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2\|\nabla\eta(\cdot,t)\|^2 \\ + \|\nabla\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^4\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^2 &+ \|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^2\|\nabla\eta(\cdot,t)\|^2 \\ + \|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|^2\|\nabla\theta(\cdot,t)\|^2 &+ \|\nabla\eta(\cdot,t)\|^2\|\boldsymbol{f}\|_3^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Demostración. La demostración de la desigualdad (31) puede ser consultada en [9] y [11]. Análogamente, la desigualdad (32) se puede probar usando argumentos similares. ☑

Corolario 4.3. *Para todo $t \geq t_0$, tenemos*

$$\int_{t_0}^{t} \|P\Delta \boldsymbol{u}(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \qquad \int_{t_0}^{t} \|\Delta \theta(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \tag{33}$$

$$\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \qquad \int_{t_0}^{t} \|\theta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \tag{34}$$

$$\int_{t_0}^{t} \|P\Delta \boldsymbol{\xi}(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \qquad \int_{t_0}^{t} \|\Delta \eta(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \tag{35}$$

$$\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{\xi}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0), \qquad \int_{t_0}^{t} \|\theta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t-t_0). \tag{36}$$

Además, combinando las desigualdades (33), (34), (35) *y* (36) *con el Lema* 4.1, obtenemos:

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\theta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \tag{37}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|P\Delta \boldsymbol{u}(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\Delta\theta(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \tag{38}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\boldsymbol{\xi}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\eta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \tag{39}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|P\Delta \boldsymbol{\xi}(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\Delta\eta(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty. \tag{40}$$

El siguiente lema establece algunas cotas para $\boldsymbol{u}$ y θ, las cuales son muy importantes para nuestros futuros argumentos.

Lema 4.4. *Si $(\boldsymbol{u},\theta)$ son soluciones del problema* (1)-(5)*, tenemos que:*

$$\sup_{t\geq 0} \|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\| < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} \|\theta_t(\cdot,t)\| < \infty, \tag{41}$$

$$\sup_{t\geq 0} \|P\Delta\boldsymbol{u}(\cdot,t)\| < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} \|\Delta\theta(\cdot,t)\| < \infty, \tag{42}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\nabla \boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\nabla\theta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau < \infty. \tag{43}$$

Demostración. Comenzaremos probando (42), suponiendo que (41) es verdadera. Poniendo $\boldsymbol{v} = -P\Delta\boldsymbol{u}$ en (9), obtenemos

$$-(\boldsymbol{u}_t, P\Delta\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, P\Delta\boldsymbol{u}) + \|P\Delta\boldsymbol{u}\|^2 = -(\theta\boldsymbol{f}, P\Delta\boldsymbol{u}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|P\Delta\boldsymbol{u}\| &\leq \|\boldsymbol{u}_t\| + \|\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\| + \|\theta\boldsymbol{f}\| \\ &\leq \|\boldsymbol{u}_t\| + \|\boldsymbol{u}\|_6\|\nabla\boldsymbol{u}\|_3 + \|\theta\boldsymbol{f}\| \\ &\leq \|\boldsymbol{u}_t\| + \|P\Delta\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac{3}{2}} + \|\theta\|_6\|\boldsymbol{f}\|_3 \\ &\leq \|\boldsymbol{u}_t\| + \|\nabla\theta\|\|\boldsymbol{f}\|_3 + \frac{C^2}{2}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^3 + \frac{1}{2}\|P\Delta\boldsymbol{u}\| \\ &\leq 2\|\boldsymbol{u}_t\| + 2M\|\boldsymbol{f}\|_3 + C^2M^3 + \frac{1}{2}\|P\Delta\boldsymbol{u}\|.\end{aligned}$$

Aplicando (41) y (19), tenemos

$$\sup_{t\geq 0}\|P\Delta\boldsymbol{u}(\cdot,t)\| \leq 2\sup_{t\geq 0}\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\| + 2M\sup_{t\geq 0}\|\boldsymbol{f}(\cdot,t)\|_3 + C^2M^3 < \infty,$$

lo que prueba (42). Para probar (41) y (43), tomamos $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_t$ en (9), y diferenciamos para obtener

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_t\|^2 + \nu\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|^2 = (\theta_t\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_t) + (\theta\boldsymbol{f}_t,\boldsymbol{u}_t) - (\boldsymbol{u}_t\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_t). \tag{44}$$

Ahora, acotamos cada término del lado derecho de (44) como sigue:

$$\begin{aligned}|(\theta_t\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_t)| &= C\|\theta_t\|^2\|\boldsymbol{f}\|_3^2 + \epsilon\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|^2, \\ |(\theta\boldsymbol{f}_t,\boldsymbol{u}_t)| &\leq \frac{1}{2}\|\nabla\theta\|^2\|\boldsymbol{f}_t\|^2 + \epsilon\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|^2, \\ |(\boldsymbol{u}_t\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_t)| &\leq \|\boldsymbol{u}_t\|_3\|\nabla\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}_t\|_6 = C\|\nabla\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}_t\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C_\epsilon(C\|\nabla\boldsymbol{u}\|)^4\|\boldsymbol{u}_t\|^2 + \epsilon\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|^2.\end{aligned}$$

Además, de la ecuación (44) obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_t\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|^2 \leq C\|\boldsymbol{u}_t\|^2 + C\|\boldsymbol{f}_t\|^2\|\theta_t\|^2 + C\|\boldsymbol{f}\|_3^2. \tag{45}$$

Consecuentemente,

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2 + \widetilde{C}\|\nabla\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2 \leq C + C\|\theta_t(\cdot,t)\|^2 + C\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2, \tag{46}$$

donde $\widetilde{C} > 0$ es una constante absoluta, y la constante C depende sólo de Ω, $\sup_{t\geq 0}\|\boldsymbol{f}\|_3$, $\sup_{t\geq 0}\|\boldsymbol{f}_t\|$, $\sup_{t\geq 0}\|\nabla\boldsymbol{u}\|$. Ahora, multiplicando la desigualdad (46) por e^t e integrando en $[0,t]$, obtenemos

$$\begin{aligned}&e^t\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2 + \widetilde{C}\int_0^t e^\tau\|\nabla\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \\ &\qquad\leq \|\boldsymbol{u}_t(\cdot,0)\|^2 + C\int_0^t e^\tau\|\theta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau + C\int_0^t e^\tau d\tau + C\int_0^t e^\tau\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2+\widetilde{C}e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|\nabla\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau\\
&\le e^{-t}\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,0)\|^2+Ce^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|\theta_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau+Ce^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau+Ce^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad (37), obtenemos el resultado deseado. Análogamente podemos probar las cotas para θ. ☑

Corolario 4.5. *Para todo $t_0, t\in\mathbb{R}$, $0\le t_0\le t$, tenemos las siguientes desigualdades*

$$\int_{t_0}^t\|\nabla\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau\le C(t-t_0)+C,\quad \int_{t_0}^t\|\nabla\theta_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau\le C(t-t_0)+C. \tag{47}$$

Demostración. Integrando la desigualdad (46) de t_0 a t, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2+\widetilde{C}\int_{t_0}^t\|\nabla\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau\\
&\le\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t_0)\|^2+C\int_{t_0}^t d\tau+C\int_{t_0}^t\|\theta_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau+C\int_{t_0}^t\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2d\tau\\
&\le\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t_0)\|^2+C(t-t_0)+C(t-t_0)\left(\sup_{t\ge0}\|\theta_t(\cdot,t)\|^2\right)+C(t-t_0)\left(\sup_{t\ge0}\|\boldsymbol{u}_t(\cdot,t)\|^2\right).
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (41) y (42), obtenemos la cota (47). Análogamente probamos la estimación para θ. ☑

Estimaciones a priori para la solución $(\boldsymbol{\xi},\eta)$ del problema (22)-(25), similares a aquellas dadas en el Lema 4.4 para $(\boldsymbol{u},\theta)$, también se satisfacen. En efecto, si $\|\nabla\boldsymbol{\xi}_0\|, \nabla\|\eta\|<\delta_2$, donde δ_2 es el número mencionado en la Definición 3.1, entonces se sigue por (28) que $\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|\le\delta_2M_2$ y $\|\nabla\eta(\cdot,t)\|\le\delta_2M_1$. Además, las funciones $\widehat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\xi}$ y $\widehat{\theta}=\theta+\eta$ son soluciones de las ecuaciones de Boussinesq satisfaciendo $\|\nabla\widehat{\boldsymbol{u}}\|\le M+\delta M_2$ y $\|\nabla\widehat{\theta}\|\le M+\delta M_1$. Además, si $\|P\Delta\boldsymbol{\xi}(\cdot,t_0)\|$ es acotado, entonces $\|P\Delta\widehat{\boldsymbol{u}}(\cdot,t_0)\|$ es también acotado. Análogamente tenemos para la temperatura, es decir, si $\|B\theta(\cdot,t_0)\|$ es acotado entonces $\|B\widehat{\theta}(\cdot,t_0)\|$ es también acotado. En este caso, análogamente a la prueba del Lema 4.4, podemos acotar $\|P\Delta\widehat{\boldsymbol{u}}(\cdot,t)\|$ y $\|B\widehat{\theta}(\cdot,t)\|$, para $t\ge t_0$. Estas cotas implican que $\|P\Delta\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|$ y $\|B\eta(\cdot,t)\|$ son acotados, para $t\ge t_0$. En resumen,

Lema 4.6. *Para perturbaciones $(\boldsymbol{\xi},\eta)$ satisfaciendo $\sup\{\|\nabla\boldsymbol{\xi}_0\|,\|\nabla\eta_0\|\}<\delta$ y $\sup\{\|P\Delta\boldsymbol{\xi}_0\|,\|B\eta_0\|\}\le C_0$, $C_0>0$, tenemos $\|P\Delta\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|,\|B\eta(\cdot,t)\|\le C$, para todo $t\ge t_0$. La constante C depende de $\|P\Delta\boldsymbol{\xi}_0\|$, $\|B\eta_0\|$,C_0, Ω, de los datos iniciales del problema* (1)-(5) *y de las normas y constantes que aparecen en* (18), (19), (20) *y* (21).

También se verifica el siguiente

Lema 4.7. *Las funciones* $\boldsymbol{\xi}$ *y* η *satisfacen las siguientes desigualdades*

$$\int_{t_0}^{t} \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C(t-t_0) + C, \quad \int_{t_0}^{t} \|\nabla \eta_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C(t-t_0) + C, \tag{48}$$

para cualesquiera t_0, t, $0 \leq t_0 \leq t$.

Demostración. Obsérvese que

$$\int_{t_0}^{t} \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leq C \left(\int_{t_0}^{t} \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau + \int_{t_0}^{t} \|\nabla \boldsymbol{u}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \right).$$

El segundo término del lado derecho de esta desigualdad es acotado (Corolario 4.5). La acotación del término $\int_{t_0}^{t} \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot,\tau)\|^2 d\tau$, se prueba de manera completamente análoga a la cota de $\boldsymbol{u}$.

La demostración de la segunda desigualdad se hace de manera análoga. ☑

Ahora, sean $\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\boldsymbol{w}^k(\boldsymbol{x})$ y $\theta = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)\phi^n(\boldsymbol{x})$ las expansiones de $(\boldsymbol{u}, \theta)$, la solución del problema (1)-(5), en términos de las autofunciones del operador de Stokes y del Laplaciano, respectivamente. Sean $\boldsymbol{v}^n := \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\boldsymbol{w}^k(\boldsymbol{x})$ y $\chi^n := \sum_{k=1}^{n} d_k(t)\phi^k(\boldsymbol{x})$ sus respectivas n-ésimas sumas parciales, y defínase $\boldsymbol{e}^n := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^n$, $\boldsymbol{\psi}^n := \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n$, $\varepsilon^n = \theta - \chi^n$ y $\sigma^n = \theta^n - \chi^n$. Comenzaremos acotando $\boldsymbol{e}^n$.

Lema 4.8. *Las siguientes cotas se verifican para todo* $t \geq 0$

$$\|\nabla \boldsymbol{e}^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}}, \tag{49}$$

$$\|\boldsymbol{e}^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}^2}. \tag{50}$$

Demostración. En primer lugar, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\nabla \boldsymbol{e}^n(\cdot,t)\|^2 &= \left\| \nabla \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(t)\boldsymbol{w}^k(\cdot) \right\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left\| P\Delta \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(t)\boldsymbol{w}^k(\cdot) \right\|^2 \\ &\leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} \|P\Delta \boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}}, \end{aligned} \tag{51}$$

como se desea. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{e}^n(\cdot,t)\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(t)\boldsymbol{w}^k(\cdot) \right\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left\| \nabla \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(t)\boldsymbol{w}^k(\cdot) \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\nabla \boldsymbol{e}^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}^2}. \end{aligned} \tag{52}$$

☑

Análogamente, podemos probar el siguiente lema para ε^n.

Lema 4.9. *Las siguientes cotas se verifican para todo $t \geq 0$:*

$$\|\nabla \varepsilon^n(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{n+1}}, \tag{53}$$

$$\|\varepsilon^n(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{n+1}^2}. \tag{54}$$

A seguir, probaremos que una cota conveniente para $\|\nabla \boldsymbol{\psi}^n(\cdot, t)\|$ implica una cota para $\|P\Delta \boldsymbol{\psi}^n(\cdot, t)\|$.

Lema 4.10. *Si para alguna constante $K > 0$ la desigualdad $\|\nabla \boldsymbol{\psi}^n(\cdot, t)\|^2 \leq \dfrac{K}{\lambda_{n+1}}$ se satisface en un intervalo $[0, t^*]$, entonces existe $C > 0$, independiente de n, tal que para todo $t \in [0, t^*]$ se tiene*

$$\|P\Delta \boldsymbol{\psi}^n(\cdot, t)\|^2 \leq C. \tag{55}$$

Demostración. Puesto que $\boldsymbol{\psi}^n = \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n$ y $\sup_{t\geq 0} \|P\Delta \boldsymbol{v}^n(\cdot, t)\| \leq \sup_{t\geq 0} \|P\Delta \boldsymbol{u}(\cdot, t)\| < \infty$, necesitamos sólo acotar $\|P\Delta \boldsymbol{u}^n\|$. Para hacer esto último, observe que

$$\|\nabla \boldsymbol{\psi}^n\|^2 = \|\nabla \boldsymbol{u}^n - \nabla \boldsymbol{v}^n\|^2 \leq \frac{K}{\lambda_{n+1}}.$$

Además,

$$\|\nabla \boldsymbol{u}^n\| \leq \left(\frac{K}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \boldsymbol{v}^n\| \leq \left(\frac{K}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} + M.$$

También tenemos las siguientes cotas para $\boldsymbol{u}^n$,

$$\int_{t_0}^{t} \|P\Delta \boldsymbol{u}^n(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t - t_0),$$

$$\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{u}_t^n(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq C + C(t - t_0),$$

las cuales son análogas a las cotas (33) y (34) para $\boldsymbol{u}$, y pueden ser probadas con argumentos análogos. Además, por el Lema 4.1 tenemos que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|\boldsymbol{u}_t^n(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq C,$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \|P\Delta \boldsymbol{u}^n(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq C.$$

Usando estas desigualdades, podemos mostrar que

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_t^n\|^2 + \widetilde{C}\|\nabla \boldsymbol{u}_t^n\|^2 \leq C + C\|P\Delta \boldsymbol{u}^n\|^2 + C\|\boldsymbol{u}_t^n\|^2 + C\|\theta_t^n\|^2, \tag{56}$$

para todo $t \in [0, t^*]$. En este punto, tenemos que limitar el intervalo de tiempo, ya que la constante C también depende de $\sup_{t\geq 0} \|\nabla \boldsymbol{u}^n\|$ y $\sup_{t\geq 0} \|\nabla \theta^n\|$, y podemos asegurar que este término es acotado, uniformemente con respecto a n, sólo en el intervalo $[0, t^*]$.

Usando la desigualdad (56), se sigue que

$$\|\boldsymbol{u}_t^n(\cdot, t)\| \leq C. \tag{57}$$

Finalmente, la desigualdad (57) permite probar

$$\|P\Delta \boldsymbol{u}^n(\cdot, t)\| \leq C, \tag{58}$$

para todo $t \in [0, t^*]$. No daremos los detalles de la prueba, dado que es completamente análoga a la prueba del Lema 4.4. ☑

Es posible demostrar un resultado análogo para σ^n, que enunciamos a seguir.

Lema 4.11. *Si para alguna constante $K > 0$ la desigualdad $\|\nabla \sigma^n(\cdot, t)\|^2 \leq \dfrac{K}{\gamma_{n+1}}$ se satisface en un intervalo $[0, t^*]$, entonces existe $C > 0$, independiente de n, tal que para todo $t \in [0, t^*]$*

$$\|\Delta \sigma^n(\cdot, t)\|^2 \leq C. \tag{59}$$

A continuación, para su uso posterior, estimaremos el término $\nabla P_n(\boldsymbol{\psi}^n - \boldsymbol{\xi}) = \nabla \boldsymbol{\psi}^n - \nabla P_n \boldsymbol{\xi}$. Primero, obsérvese que $\boldsymbol{v}^n$ satisface

$$(\boldsymbol{v}_t^n, \boldsymbol{\phi}^n) + \nu(\nabla \boldsymbol{v}^n, \nabla \boldsymbol{\phi}^n) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi}^n) = (\theta \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}^n), \tag{60}$$

para todo $\boldsymbol{\phi}^n$ de la forma $\boldsymbol{\phi}^n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^n d_k \boldsymbol{w}^k(\boldsymbol{x})$. Substrayendo la ecuación (15) de la ecuación (60), obtenemos

$$(\boldsymbol{\psi}_t^n, \boldsymbol{\phi}^n) + \nu(\nabla \boldsymbol{\psi}^n, \nabla \boldsymbol{\phi}^n) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi}^n) - (\boldsymbol{u}^n \cdot \nabla \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) + (\sigma^n \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}^n) - (\varepsilon^n \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}^n),$$

o equivalentemente, para toda $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{V}$ y para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\psi}_t^n, \boldsymbol{\phi}) &+ \nu(\nabla \boldsymbol{\psi}^n, \nabla \boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^n, \boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\psi}^n \cdot \nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\psi}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^n, \boldsymbol{\phi}) \\
&= (\sigma^n \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) - (\varepsilon^n \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) \\
&\quad + (Q_n(\varepsilon^n \boldsymbol{f}), \boldsymbol{\phi}) - (Q_n(\sigma^n \boldsymbol{f}), \boldsymbol{\phi}) + (Q_n(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^n), \boldsymbol{\phi}) \\
&\quad + (Q_n(\boldsymbol{\psi}^n \cdot \nabla \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi}) + (Q_n(\boldsymbol{\psi}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^n), \boldsymbol{\phi}) + (P_n(\boldsymbol{\psi}^n \cdot \nabla \boldsymbol{e}^n), \boldsymbol{\phi}) \\
&\quad + (P_n(\boldsymbol{e}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^n), \boldsymbol{\phi}) + (P_n(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{e}^n), \boldsymbol{\phi}) + (P_n(\boldsymbol{e}^n \cdot \nabla \boldsymbol{v}^n), \boldsymbol{\phi}) \\
&= (\sigma^n \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) - (\varepsilon^n \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) + (Q_n(\varepsilon^n \boldsymbol{f}), \boldsymbol{\phi}) - (Q_n(\sigma^n \boldsymbol{f}), \boldsymbol{\phi}) + (\mathcal{K}, \boldsymbol{\phi}),
\end{aligned} \tag{61}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= Q_n(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n) + Q_n(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\boldsymbol{u}) + Q_n(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n)\\ &\quad + P_n(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\boldsymbol{e}^n) + P_n(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n) + P_n(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{e}^n) + P_n(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n).\end{aligned}$$

Por otro lado, tomando el producto interno de la ecuación (22) con $\boldsymbol{\phi}$ e integrando por partes, obtenemos

$$(\boldsymbol{\xi}_t,\boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\phi}) + \nu(\nabla\boldsymbol{\xi},\nabla\boldsymbol{\phi}) = (\eta\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}). \tag{62}$$

Substrayendo la ecuación (62) de la ecuación (61) obtenemos

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Theta}_t,\boldsymbol{\phi}) + \nu(\nabla\boldsymbol{\Theta},\nabla\boldsymbol{\phi}) &= -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n,\boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\phi})\\ &\quad - (\Psi\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}) + (Q_n(\sigma^n\boldsymbol{f}),\boldsymbol{\phi}) - (\varepsilon^n\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}) + (Q_n(\varepsilon^n\boldsymbol{f}),\boldsymbol{\phi}) + (\mathcal{K},\boldsymbol{\phi}),\end{aligned} \tag{63}$$

donde $\boldsymbol{\Theta} := \boldsymbol{\psi}^n - \boldsymbol{\xi}$ y $\Psi = \sigma^n - \eta$. Haciendo $\boldsymbol{\phi} = A\boldsymbol{\Theta}$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \nu\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 &= -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta},A\boldsymbol{\Theta}) - (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\boldsymbol{u},A\boldsymbol{\Theta}) - (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n,A\boldsymbol{\Theta})\\ &\quad - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta},A\boldsymbol{\Theta}) - (\Psi\boldsymbol{f},A\boldsymbol{\Theta}) + (Q_n(\sigma^n\boldsymbol{f}),A\boldsymbol{\Theta})\\ &\quad + (\varepsilon^n\boldsymbol{f},A\boldsymbol{\Theta}) + (Q_n(\varepsilon^n\boldsymbol{f}),A\boldsymbol{\Theta}) + (\mathcal{K},A\boldsymbol{\Theta}).\end{aligned} \tag{64}$$

Ahora acotamos cada término del lado derecho de la identidad (64). Dado $\epsilon > 0$, encontramos:

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta},A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + C(\epsilon)\|A\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2,\\ |(\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\boldsymbol{u},A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + C(\epsilon)\|A\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2,\\ |(\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n,A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + C(\epsilon)\|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2,\\ |(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta},A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + C(\epsilon)\|A\boldsymbol{\xi}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2,\\ |(P_n(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{u}\|^2,\\ |(P_n(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{e}^n),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{u}\|^2,\\ |(P_n(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2,\\ |(P_n(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\boldsymbol{e}^n),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|(Q_n(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+\frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{\psi}^n\|^4,\\
|(Q_n(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\boldsymbol{u}),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+\frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n\|^2,\\
|(Q_n(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+\frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n\|^2,\\
|(Q_n(\sigma^n\boldsymbol{f}),A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+\frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|\Delta\sigma^n\|^2,\\
|(Q_n(\varepsilon^n\boldsymbol{f},A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+\frac{C(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|\Delta\theta\|^2,\\
|(\varepsilon^n\boldsymbol{f},A\boldsymbol{\Theta})| &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+\frac{C(\epsilon)}{\gamma_{n+1}}\|\boldsymbol{f}\|_3^2,\\
|(\Psi\boldsymbol{f},A\boldsymbol{\Theta}) &\le \epsilon\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2+C_\epsilon\|\nabla\Psi\|^2\|\boldsymbol{f}\|_3^2.
\end{aligned}
$$

Para uso posterior, vamos a acotar el término $\nabla\Psi=\nabla\sigma^n-\nabla\eta$. Obsérvese que χ^n verifica

$$
(\chi_t^n,\varrho^n)+(\nabla\chi^n,\nabla\varrho^n)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta,\varrho^n)=(g,\varrho^n), \tag{65}
$$

para toda ϱ^n de la forma $\varrho^n(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^n b_k\phi^k(\boldsymbol{x})$. Substrayendo la ecuación (16) de la ecuación (65), obtenemos

$$
(\sigma_t^n,\varrho^n)+\lambda(\nabla\sigma^n,\nabla\varrho^n)=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta-\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\theta^n,\varrho^n). \tag{66}
$$

Obsérvese que,

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta-\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla\theta^n,\varrho^n)\\
&=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n,\varrho^n)-(\sigma^n\cdot\nabla\theta^n,\varrho^n)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon^n,\varrho^n)+(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\theta^n,\varrho^n)\\
&=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n,\varrho^n)-(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\theta,\varrho^n)-(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\sigma^n,\varrho^n)+(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\varepsilon^n,\varrho^n)\\
&\quad+(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\sigma^n,\varrho^n)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon^n,\varrho^n)+(\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\chi^n,\varrho^n).
\end{aligned}
$$

Usando esta identidad en (66), para todo $\varrho\in H_0^1(\Omega)$ y $t\ge 0$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_t^n,\varrho)+\lambda(\nabla\sigma^n,\nabla\varrho)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n,\varrho)+(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\theta,\varrho)\\
&\quad+(\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\sigma^n,\varrho)=-(S_n[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n],\varrho),\\
&(S_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\theta],\varrho)+(S_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\sigma^n],\varrho)+(R_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\varepsilon^n],\varrho)\\
&\quad+(R_n[\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n],\varrho)+(R_n[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon^n],\varrho)+(R_n[\mathbf{e}^n\cdot\nabla\chi^n],\varrho)=(\pi^n,\varrho).
\end{aligned} \tag{67}
$$

Por otro lado, tomando el producto interno de ϱ con (23) e integrando por partes, obtenemos

$$
(\eta_t,\varrho)+\lambda(\nabla\eta,\nabla\varrho)+((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\xi})\cdot\nabla\eta,\varrho)+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\theta,\varrho)=0. \tag{68}
$$

Substrayendo la ecuación (68) de la ecuación (66), obtenemos

$$(\Psi_t, \varrho) + \lambda(\nabla\Psi, \nabla\varrho) + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\theta, \varrho) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Psi, \varrho) + (\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\Psi, \varrho) + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla\eta, \varrho) = (\pi^n, \varrho). \quad (69)$$

Después de algunos cálculos podemos mostrar la siguiente desigualdad, tomando $\varrho = \Delta\Psi$:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\Psi\|^2 + \lambda\|B\Psi\|^2 \leq C(\|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2)\|\nabla\Psi\|^2 + C\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2(\|B\eta\|^2 + \|B\theta\|^2) + \|\pi^n\|^2. \quad (70)$$

Ahora, vamos a estimar $\|\pi^n\|^2$. Tenemos

$$\|\pi^n\|^2 \leq \|Q_n[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n]\|^2 + \|S_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\theta]\|^2 + \|S_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\sigma^n]\|^2 + \|R_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\varepsilon^n]\|^2 + \|R_n[\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n]\|^2 + \|R_n[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon^n]\|^2 + \|R_n[\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\chi^n]\|^2.$$

Recordemos que

$$\|S_n\Upsilon\|^2 \leq \frac{1}{\gamma_{n+1}}\|\Upsilon\|^2_{H^1}.$$

Usando esto, deducimos:

$$\begin{aligned}
\|S_n[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n]\|^2 &\leq \frac{C}{\gamma_{n+1}}\|\boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma^n\|^2_{H^1},\\
\|S_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\theta]\|^2 &\leq \frac{C}{\gamma_{n+1}}\|\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\theta\|^2_{H^1},\\
\|S_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\sigma^n]\|^2 &\leq \frac{C}{\gamma_{n+1}}\|\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\sigma^n\|^2_{H^1},\\
\|R_n[\boldsymbol{\psi}^n\cdot\nabla\varepsilon^n]\|^2 &\leq \frac{C}{\gamma_{n+1}}\|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2\|B\theta\|^2,\\
\|R_n[\mathbf{e}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^n]\|^2 &\leq \frac{C}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2\|A\boldsymbol{u}\|^2\\
\|R_n[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon^n]\|^2 &\leq \frac{C}{\gamma_{n+1}}\|A\boldsymbol{u}\|^2\|B\theta\|^2,\\
\|R_n[\boldsymbol{e}^n\cdot\nabla\chi^n]\|^2 &\leq \frac{C}{\lambda_{n+1}}\|A\boldsymbol{u}\|^2\|B\theta\|^2.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, tenemos

$$\|\pi^n\|^2 \leq C\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)\mathfrak{F} + C\frac{1}{\lambda_{n+1}}\mathfrak{G}, \quad (71)$$

donde $\mathfrak{F} = \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2\|B\theta\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2\|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|A\boldsymbol{u}\|^2\|B\theta\|^2$ y $\mathfrak{G} = \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2 + \|\nabla\sigma^n\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2\|B\sigma^n\|^2$.

Usando esta estimativa en (70), tenemos

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\Psi\|^2 + \lambda\|B\Psi\|^2 \leq C(\|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2)\|\nabla\Psi\|^2 + C\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2(\|B\eta\|^2 + \|B\theta\|^2) + C\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)\mathfrak{F} + C\frac{1}{\lambda_{n+1}}\mathfrak{G}. \tag{72}$$

Sumando las desigualdades (64) y (72), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \|\nabla\Psi\|^2) + C_1(\|A\boldsymbol{\Theta}\|^2 + \|\Delta\Psi\|^2)\\
&\leq C\Big(\|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2 + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^3}\Big)\|\nabla\Psi\|^2\\
&\quad + C\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^2\Big(\|\Delta\eta\|^2 + \|\Delta\theta\|^2 + \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2 + \|A\boldsymbol{\xi}\|^2\Big)\\
&\quad + C\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)(\mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|\Delta\theta\|^2 + \|\Delta\sigma^n\|^2).
\end{aligned} \tag{73}$$

Usando el Lema de Gronwall, obtenemos:

$$\|\nabla\boldsymbol{\Theta}(t)\|^2 + \|\nabla\Psi(t)\|^2 \leq \exp\left(\int_{t_0}^t \mathfrak{H}(s)ds\right)\left(\|\nabla\boldsymbol{\Theta}(t_0)\|^2 + \|\nabla\Psi(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^t \mathfrak{L}(s)ds\right), \tag{74}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H} &= C\Big(\|\Delta\eta\|^2 + \|\Delta\theta\|^2 + \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n\|^2 + \|\boldsymbol{f}\|^2_3 + \|A\boldsymbol{\xi}\|^2\Big),\\
\mathfrak{L} &= C\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)(\mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|\Delta\theta\|^2 + \|B\sigma^n\|^2).
\end{aligned}$$

Resumimos los resultados en el siguiente lema.

Lema 4.12. *Supóngase que* $\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t)\| \leq K/\lambda_{k+1}$ *y* $\|\nabla\sigma^n(\cdot,t)\| \leq K/\gamma_{k+1}$ *se satisface para alguna constante* $K > 0$ *y todo* t *en un intervalo dado* $0 \leq t_0 \leq t \leq \bar{t}$. *Sean* $\boldsymbol{\xi}$ *y* η *como en el problema (22)-(26), y las funciones* $\boldsymbol{\Theta}$, Ψ, $\mathfrak{H}$ *y* $\mathfrak{L}$ *definidas anteriormente. Entonces, para todo* $t \in [t_0, \bar{t}\,]$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\boldsymbol{\Theta}(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla\Psi(\cdot,t)\|^2\\
&\leq C\left(\|\nabla\boldsymbol{\Theta}(\cdot,t_0)\|^2 + \|\nabla\Psi(\cdot,t_0)\|^2 + \frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)Z(t)\\
&\quad + C(t-t_0)\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)Z(t),
\end{aligned} \tag{75}$$

donde $Z(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathfrak{H}(\tau)d\tau\right)$

Observación 4.13. Observemos que, al usar la hipótesis (19) y debido a las estimaciones (48), (42) y el Lema 4.10 tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \mathfrak{H}(\tau)d\tau \\
&\quad = C\int_{t_0}^{t} (\|\Delta\eta(\tau)\|^2 + \|\Delta\theta(\tau)\|^2 + \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 + \|A\boldsymbol{u}(\tau)\|^2 + \|A\boldsymbol{\psi}^n(\tau)\|^2 + \|\boldsymbol{f}(\tau)\|_3^2)d\tau \\
&\quad \leq \widetilde{C}(t-t_0).
\end{aligned} \tag{76}$$

De ahora en adelante fijamos las constantes C y $\widetilde{C}$ que aparecen en las desigualdades (75) y (76). Probaremos ahora que las cotas para $\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n\|$ y $\|\nabla\sigma^n\|$, necesarias en los Lemas 4.10 y 4.12, se satisfacen para n suficientemente grande.

Proposición 4.14. *Existen $K>0$ y $N\in\mathbb{N}$ tales que si $n\geq N$, entonces $\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t)\|^2 < \dfrac{K}{\lambda_{n+1}}$ y $\|\nabla\sigma^n(\cdot,t)\|^2 < \dfrac{K}{\gamma_{n+1}}$ para todo $t\geq 0$.*

Demostración. Escojamos T tal que $\sup[M_1^2F(T)^2, M_2^2G(T)^2] \leq \frac{1}{4}$. Sea $K := 8C(1+T)e^{\widetilde{C}+\widetilde{C}T}$, y sea N suficientemente grande tal que $\sup\left\{\dfrac{K}{\lambda_{n+1}}, \dfrac{K}{\gamma_{n+1}}\right\} < \delta$ si $n\geq N$. Bajo estas condiciones, tenemos

$$\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla\sigma^n(\cdot,t)\|^2 < \frac{K}{\lambda_{n+1}} + \frac{K}{\gamma_{n+1}}, \tag{77}$$

para todo $t\geq 0$. En efecto, supóngase que la desigualdad (77) no se satisface. Así, existen $n\geq N$ y $t^*>0$ tales que

$$\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t^*)\|^2 + \|\nabla\sigma^n(\cdot,t^*)\|^2 = \frac{K}{\lambda_{n+1}} + \frac{K}{\gamma_{n+1}}. \tag{78}$$

Podemos tener $t^*\leq T$ o $t^*>T$. Si $t^*\leq T$, considérese $t_0=0$, $\boldsymbol{\xi}=0$, $\eta=0$, $\bar{t}=t^*$. En este caso, $\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\| = \|\nabla\boldsymbol{\psi}^n\|$ y $\|\nabla\Psi\| = \|\nabla\sigma^n\|$. Además, usando el Lema 4.12, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t^*)\|^2 + \|\sigma^n(\cdot,t^*)\|^2 &\leq \left(\frac{C}{\lambda_{n+1}} + \frac{C}{\gamma_{n+1}} + \left(\frac{C}{\lambda_{n+1}} + \frac{C}{\gamma_{n+1}}\right)T\right)e^{\widetilde{C}+\widetilde{C}T} \\
&= \frac{K}{9}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right) \\
&< \frac{K}{\lambda_{n+1}} + \frac{K}{\gamma_{n+1}},
\end{aligned}$$

lo cual contradice (78). Si $t^*>T$, aplicando el Lema 4.12 con $\bar{t}=t^*$, $t_0=t^*-T$ y

$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)$, $\eta(\boldsymbol{x},t)$ tales que $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t_0)=\boldsymbol{\psi}^n(\boldsymbol{x},t_0)$, y $\eta(\boldsymbol{x},t_0)=\sigma^n(\boldsymbol{x},t_0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t^*)-\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t^*)\|^2+\|\nabla\sigma^n(\cdot,t^*)-\nabla\eta(\cdot,t^*)\|^2 &\le \left(\frac{C}{\lambda_{n+1}}+\frac{C}{\gamma_{n+1}}T\right)e^{\widetilde{C}+\widetilde{C}T}\\ &=\frac{K}{9}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}+\frac{1}{\gamma_{n+1}}\right).\end{aligned}$$

En particular obtenemos

$$\begin{aligned}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t^*)\|^2 &\le 2\left(\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t^*)-\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t^*)\|^2+\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t^*)\|^2\right)\\ &\le 2\left(\frac{K}{9}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}+\frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)+M_2^2\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t_0)\|^2F(T)^2\right);\end{aligned}$$

también tenemos

$$\begin{aligned}\|\nabla\sigma^n(\cdot,t^*)\|^2 &\le 2\left(\|\nabla\sigma^n(\cdot,t^*)-\nabla\eta(\cdot,t^*)\|^2+\|\nabla\eta(\cdot,t^*)\|^2\right)\\ &\le 2\left(\frac{K}{9}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}+\frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)+M_1^2\|\nabla\eta(\cdot,t_0)\|^2G(T)^2\right).\end{aligned}$$

Sumando estas dos últimas desigualdades tenemos que el resultado aún contradice (78). Esto prueba la proposición. ☑

5. Prueba del Teorema 3.3

Usando (49) y la Proposición 4.14, obtenemos directamente

$$\|\nabla\boldsymbol{u}(\cdot,t)-\nabla\boldsymbol{u}^n(\cdot,t)\|^2\le 2(\|\nabla\boldsymbol{\psi}^n(\cdot,t)\|^2+\|\nabla\mathbf{e}^n(\cdot,t)\|^2)\le\frac{C}{\lambda_{n+1}}+\frac{C}{\gamma_{n+1}},\tag{79}$$

que es la primera cota establecida en el Teorema 3.3. Para demostrar la segunda, usamos nuevamente la Proposición 4.14 y la desigualdad (53), obteniendo

$$\|\nabla\theta(\cdot,t)-\nabla\theta^n(\cdot,t)\|^2\le 2(\|\nabla\sigma(\cdot,t)\|^2+\|\nabla\varepsilon^n(\cdot,t)\|^2)\le\frac{C}{\lambda_{n+1}}+\frac{C}{\gamma_{n+1}},\tag{80}$$

que es la estimación deseada. Esto completa la prueba del Teorema 3.3.

Agradecimientos

Los autores son parcialmente financiado por DGI-MEC (España) Proyecto MTM2006-07932 y por Fondecyt proyecto 1080628.

Referencias

[1] Braz e Silva P., Rojas-Medar M.A. "Error Bounds for Semi-Galerkin Approximations of Nonhomogeneous Incompressible Fluids", *J. Math. Fluid Mech.*, **11** (2009), n° 2, 186-207.

[2] Heywood J.G. "An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations of the Navier-Stokes problem, *Pacific J. Math.*, **98** (1982), 333-345.

[3] Hishida T. "Existence and regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem", *Funkcialy Ekvaciy*, **34** (1991), 449-474.

[4] Joseph D.D. *Stability of Fluid Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] Korenev N.K. "On some problems of convection in a viscous incompressible fluid", *Vestnik Leningrand Univ. Math.*, **4** (1977), 125-137.

[6] Morimoto H. "Nonstationary Boussinesq equations", *J. Fac. Sci., Univ Tokyo*, Sect., IA Math., **39** (1992), 61-75.

[7] $\overline{O}$eda K. "Periodic solutions of the heat convection equation in exterior domain", *Proc. Japan Acad.*, **73** (1997), Ser. A, 49-54.

[8] Rautmann R. "On the convergence rate of nonstationary Navier-Stokes approximations, Approximation methods for Navier-Stokes problems" (Proc. Sympos., Univ. Paderborn, Paderborn, 1979) (Berlin), *Lecture Notes in Math.*, vol. 771, Springer, 1980, pp. 425-449.

[9] Rojas-Medar M.A. and Lorca, S.A. "The equation of a viscous incompressible chemical active fluid I: uniqueness and existence of the local solutions", *Rev. Mat. Apl.*, **16** (1995), 57-80.

[10] Rojas-Medar M.A. and Lorca S.A. "The equation of a viscous incompressible chemical active fluid II: regularity of solutions", *Rev. Mat. Apl.*, **16** (1995), 81- 95.

[11] Rojas-Medar M.A. and Lorca S.A. "Global strong solution of the equations for the motion of a chemical active fluid", *Matemática Contemporânea*, V. **8** (1995), 319-335.

[12] Rojas-Medar M. A. and Lorca S. A. "An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations for the equations for the motion of a chemical active fluid", *Rev. Mat. Univ. Complut*, Madrid, **8** (1995), no. 2, 431–458.

[13] Simon J. "Non-homogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and pressure", *SIAM J. Math. Anal.* **21(5)** (1990), 1093-1117.

[14] W. von Wahl. "The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations", *Aspects of Mathematics E8*, Friedr. Vieweg-Sohn, Braunschweig, 1985.

(Recibido el 10 de octubre de 2009; aceptado el 15 de noviembre de 2009)

R. C. Cabrales
Grupo de Matemáticas Aplicadas
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad del Bío-Bío
Chillán, Chile
Casilla 447
e-mail: `rcabrale@ubiobio.cl`

M. Poblete-Cantellano
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Atacama
Copiapó, Chile
e-mail: `mpoblete@mat.uda.cl`

M. A. Rojas-Medar
Grupo de Matemáticas Aplicadas
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad del Bío-Bío
Chillán, Chile
Casilla 447
e-mail: `marko@ueubiobio.cl`