Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 27, No. 1, 2009, pág. 59–67

Una generalización de la métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Y. Chalco-Cano*
M.D. Jiménez-Gamero**

.

Resumen. En este trabajo hacemos una extensión de la métrica de Hausdorff H sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de todos los conjuntos difusos cerrados en $\mathbb{R}^n$, obteniendo una familia de métricas D_f. Estudiamos algunas propiedades topológicas del espacio métrico $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), D_f)$.

1. Introducción

Existen muchas formas de extender la métrica de Hausdorff H para $\mathbb{F}^n$, el espacio de todos los conjuntos difusos compactos y normales sobre el espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ (ver [6, 14]), es decir, el espacio de todos los conjuntos difusos cuyos niveles son subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, tenemos las métricas d_∞, d_p, con $0 < p < \infty$, las cuales son generadas a partir de los niveles de los conjuntos difusos y la métrica de Hausdorff H (ver [6, 13]). También, tenemos la métrica del sendógrafo y métrica del endógrafo, generadas a partir de los sendógrafos, endógrafos de los conjuntos difusos y la métrica H. En todos estos casos, necesariamente los niveles de los conjuntos difusos son compactos y no vacíos.

Recientemente, en [15] ha sido introducido una nueva familia de métricas para el espacio de conjuntos difusos compactos y convexos sobre el espacio $\mathbb{R}^n$. Esta familia de métricas

Palabras y frases claves: Métrica de Hausdorff, conjunto difuso compacto, conjunto difuso cerrado.
MSC2000: 26E50, 46S40

* Departamento de Matemática, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile. *e-mail*: ychalco@uta.cl
** Departamento de Estadística e I.O., Universidad de Sevilla, 41012 Sevilla, Spain. *e-mail*: dolores@us.es

es una generalización de la métrica de Bertoluzza d_w introducida en [2] para el espacio de intervalos difusos.

Ahora, es muy importante el estudio de conjuntos difusos cuyos niveles no son necesariamente compactos. Particularmente, es necesario estudiar el espacio de todos los conjuntos difusos cerrados $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, es decir, el espacio de todos los conjuntos difusos cuyos niveles son subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$, ver por ejemplo [8, 9, 10].

En este trabajo definimos una familia de métricas D_f para el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. También mostramos que el espacio métrico $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), D_f)$ es completo.

2. Conceptos básicos

Sea $\mathbb{K}^n$ el espacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por H la métrica de Hausdorff sobre $\mathbb{K}^n$ definida por

$$H(A,B) = \text{máx}\{\delta(A,B), \delta(B,A)\},$$

para todo $A, B \in \mathbb{K}^n$, donde $\delta(A,B)$ denota la semidistancia de Hausdorff (ver [1]). Es conocido que el espacio métrico $(\mathbb{K}^n, H)$ es completo y separable (ver [1]).

Extendemos H a una métrica limitada h sobre $\mathbb{K}^n$ (incluyendo el conjunto vacío), como

$$h(A,B) = \begin{cases} \dfrac{H(A,B)}{1+H(A,B)}, & \text{si } H(A,B) < \infty, \\ 1, & \text{si } H(A,B) = \infty, \end{cases}$$

admitiendo que $\delta(\varnothing, A) = 0$ para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta(A, \varnothing) = \infty$ para todo subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$. Siendo así, tenemos que h es una métrica sobre $\mathbb{K}^n$.

La siguiente distancia de Hausdorff generalizada fue introducida en [11]. Para esto, consideramos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo. Sea f una función continua con valores reales tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in [0, \infty)$ y $\int_{[0,\infty)} f(t)dt < \infty$. Se define la distancia entre dos subconjuntos cerrados A y B de $\mathbb{R}^n$ por

$$H_f(A,B) = \int_{[0,\infty)} f(t) h(A \cap K(x_0,t), B \cap K(x_0,t)) dt, \tag{1}$$

donde $K(x_0,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq t\}$ y $\|\cdot\|$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Luego, H_f es una métrica sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ y el espacio métrico $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), H_f)$ es compacto (ver [11]).

3. *El espacio métrico* $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), D_f)$

Un conjunto difuso sobre $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $u : X \to [0,1]$. Esto quiere decir que cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ tiene asociado un grado de pertenencia al conjunto difuso u en cuestión y el cual es dado por $0 \leq u(x) \leq 1$.

Sea u un conjunto difuso sobre $\mathbb{R}^n$; definimos por $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}$ el α-nivel (α-corte) de u, con $0 < \alpha \leq 1$. Para $\alpha = 0$ tenemos $[u]^0 = \text{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}}$, el soporte de u.

Un conjunto difuso u sobre $\mathbb{R}^n$ es llamado (i) compacto si $[u]^\alpha$ es compacto para todo $\alpha \in [0,1]$, (ii) cerrado si $[u]^\alpha$ es cerrado para todo $\alpha \in [0,1]$, (iii) normal si existe x en $\mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = 1$. Nótese que si un conjunto difuso u es normal, quiere decir que los niveles $[u]^\alpha$ son no vacíos, para $\alpha \in [0,1]$.

Denotemos por $\mathbb{F}^n$ el espacio de todos los conjuntos difusos, compactos y normales sobre $\mathbb{R}^n$. Este espacio es el más importante en la teoría de los conjuntos difusos y ha sido motivo de estudio para diversos autores y utilizado en los más diversos tópicos (ver por ejemplo [3, 4, 5, 7]).

Existen varias formas de generalizar la métrica de Hausdorff H sobre $\mathbb{F}^n$; podemos citar las más usuales:

$$d_\infty(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

$$d_p(u,v) = \left(\int_0^1 H([u]^\alpha, [v]^\alpha)^p d\alpha \right)^{1/p}.$$

Se sabe que el espacio métrico $(\mathbb{F}^n, d_\infty)$ es completo, más no es separable, y $(\mathbb{F}^n, d_p)$ es separable mas no completo (para detalles ver [6],[12],[14]).

A continuación presentamos una familia de métricas para el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de todos los conjuntos difusos cerrados, es decir, la familia de conjuntos difusos $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ cuyos niveles $[u]^\alpha$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Consideremos la distancia acotada entre dos conjuntos difusos compactos u, v como siendo

$$D(u,v) = \frac{d_\infty(u,v)}{1 + d_\infty(u,v)}. \tag{2}$$

Podemos verificar que D es una métrica en $\mathbb{F}^n$.

Definición 3.1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo. Sea f una función continua con valores reales tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in [0, \infty)$ y $\int_{[0,\infty)} f(t)dt < \infty$. Definimos la distancia entre dos conjuntos difusos cerrados u y v por

$$D_f(u,v) = \int_{[0,\infty)} f(t) D(u \cap \chi_{K(x_0,t)}, v \cap \chi_{K(x_0,t)}) dt, \tag{3}$$

donde $\chi_{K(x_0,t)}$ denota la función característica del conjunto $K(x_0,t)$.

Proposición 3.2. *$(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, D_f)$ es un espacio métrico.*

Demostración. (i) Como $D_f(u,v) \leq \int_{[0,\infty)} f(t)dt < \infty$. Entonces,

$$0 \leq D_f(u,v) < \infty.$$

(ii) $D_f(u,v) = 0$ y $f(t) > 0$ $\forall t \in [0,\infty)$, implica que

$$D(u \cap \chi_{K(x_0,t)}, v \cap \chi_{K(x_0,t)}) = 0,$$

para casi todo $t \in [0,\infty)$. Como D es una métrica, se sigue que

$$u \cap \chi_{K(x_0,t)} = v \cap \chi_{K(x_0,t)},$$

para casi todo $t \in [0,\infty)$. Consecuentemente, $u = v$.

Recíprocamente, supongamos que $u = v$. Entonces

$$D(u \cap \chi_{K(x_0,t)}, v \cap \chi_{K(x_0,t)}) = 0$$

para todo t. Por tanto $D_f(u,v) = 0$.

(iii) Puesto que

$$D(u \cap \chi_{K(x_0,t)}, v \cap \chi_{K(x_0,t)}) = D(v \cap \chi_{K(x_0,t)}, u \cap \chi_{K(x_0,t)}),$$

para todo t, tenemos que $D_f(u,v) = D_f(v,u)$.

(iv) Como D es una métrica,

$$\begin{aligned} D(u \cap \chi_{K(x_0,t)}, v \cap \chi_{K(x_0,t)}) &\leq D(u \cap \chi_{K(x_0,t)}, w \cap \chi_{K(x_0,t)}) \\ &\quad + D(w \cap \chi_{K(x_0,t)}, v \cap \chi_{K(x_0,t)}), \end{aligned}$$

para todo t, se sigue de las propiedades de la integral que

$$D_f(u,v) \leq D_f(u,w) + D_f(w,v).$$

☑

A continuación debemos mostrar la relación entre la métrica D_f y la métrica H_f.

Lema 3.3. *Sea g una función acotada definida sobre un subconjunto T de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ y $g(t) \geq 0$ para todo $t \in T$. Entonces*

$$\sup_{t\in T} \frac{g(t)}{1+g(t)} = \frac{\sup_{t\in T} g(t)}{1+\sup_{t\in T} g(t)}.$$

Demostración. Puesto que para todo $t \in T$ tenemos que

$$g(t) \leq \sup_{t\in T} g(t);$$

entonces,

$$1 + \frac{1}{\sup_{t\in T} g(t)} \leq 1 + \frac{1}{g(t)},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1+\sup_{t\in T} g(t)}{\sup_{t\in T} g(t)} &\leq \frac{1+g(t)}{g(t)}, \\ \frac{g(t)}{1+g(t)} &\leq \frac{\sup_{t\in T} g(t)}{1+\sup_{t\in T} g(t)}, \\ \sup_{t\in T} \frac{g(t)}{1+g(t)} &\leq \frac{\sup_{t\in T} g(t)}{1+\sup_{t\in T} g(t)}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, para todo $t \in T$ tenemos que

$$g(t) = \frac{g(t)}{1+g(t)}(1+g(t)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in T} g(t) &= \sup_{t\in T} \left(\frac{g(t)}{1+g(t)}(1+g(t)) \right) \\ &\leq \sup_{t\in T} \left(\frac{g(t)}{1+g(t)} \right) \sup_{t\in T}(1+g(t)). \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba del Lema. ☑

Corolario 3.4. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo. Sea f una función continua con valores reales tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in [0,\infty)$ y*

$$\int_{[0,\infty)} f(t)dt < \infty.$$

Entonces

$$D_f(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} H_f([u]^\alpha, [v]^\alpha), \tag{4}$$

para todo $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Es una consecuencia del Lema 3.3 y de (1). ☑

Teorema 3.5. *El espacio métrico* $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), D_f)$ *es completo.*

Demostración. Sea $\{u_n : n \geq 1\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $u_n \cap \chi_{K(x_0,t)}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{F}^n$ para cada $t \in [0, \infty)$. Luego, por la completitud del espacio métrico $(\mathbb{F}^n, d_\infty)$, existe $u_t \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$u_n \cap \chi_{K(x_0,t)} \xrightarrow{d_\infty} u_t.$$

Se sigue de allí que

$$[u_n]^\alpha \cap K(x_0, t) \xrightarrow{H} [u_t]^\alpha \in \mathbb{K}^n \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Consecuentemente,

$$[u_n]^\alpha \cap K(x_0, t) \xrightarrow{h} [u_t]^\alpha \in \mathbb{K}^n \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{5}$$

Por otro lado, $[u_n]^\alpha$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Luego, como el espacio métrico $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), H_f)$ es compacto, este es completo, por lo que existe un conjunto cerrado $M_\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$[u_n]^\alpha \xrightarrow{H_f} M_\alpha.$$

Consecuentemente,

$$[u_n]^\alpha \cap K(x_0, t) \xrightarrow{h} M_\alpha \cap K(x_0, t) \tag{6}$$

para casi todo $t \in [0, \infty)$. Se sigue de (5) y (6) que

$$[u_t]^\alpha = M_\alpha \cap K(x_0, t), \tag{7}$$

para casi todo $t \in [0, \infty)$.

Ahora, consideremos la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$. Esta familia verifica:

(i) Sea $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$. Dado que u_t es un conjunto difuso, sigue de (7) que $M_\alpha \cap K(x_0, t) \subset M_\beta \cap K(x_0, t)$ para casi todo $t \in [0, \infty)$. Por tanto

$$M_\alpha \subset M_\beta.$$

(ii) Sea α_n una sucesión no decreciente tal que $\alpha_n \to \alpha$. Considerando que u_t es un conjunto difuso y tomando en cuenta (7), tenemos que

$$\begin{aligned} M_\alpha \cap K(x_0, t) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(M_{\alpha_n} \bigcap K(x_0, t) \right) \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \right) \cap K(x_0, t), \end{aligned}$$

para casi todo $t \in [0, \infty)$. Por tanto, $M_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$.

Luego, la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ satisface las condiciones del Teorema de Representación de Negoita & Ralescu [6], por lo que existe un conjunto difuso $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ tal que

$$[u]^\alpha = M_\alpha,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ y

$$[u_n]^\alpha \overset{H_f}{\to} M_\alpha.$$

Ahora veamos que $u_n \overset{D_f}{\to} u$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, dado que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe n_ϵ tal que si $m, n > n_\epsilon$,

$$D_f(u_n, u_m) < \epsilon.$$

Sea $n > n_\epsilon$ fijo. Entonces,

$$\begin{aligned} H_f([u_n]^\alpha, [u]^\alpha) &= \lim_{m\to\infty} H_f([u_n]^\alpha, [u_m]^\alpha) \\ &\leq \overline{\lim}_{m\to\infty} \sup_{\alpha>0} H_f([u_n]^\alpha, [u_m]^\alpha) \\ &= \overline{\lim}_{m\to\infty} D_f(u_n, u_m) < \epsilon. \end{aligned}$$

De esta manera, $\sup_{\alpha>0} H_f([u_n]^\alpha, [u]^\alpha) \leq \epsilon$, es decir, $D_f(u_n, u) < \epsilon$ para $n > n_\epsilon$. Lo que completa la prueba. ☑

4. Conclusiones

En este trabajo hemos introducido una familia de métricas D_f para el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Hemos mostrado que este espacio con la familia de métricas D_f es un espacio métrico completo.

En futuros trabajos, investigaremos otras propiedades topológicas del espacio métrico $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), D_f)$, particularmente, debemos estudiar la compacidad y la separabibilidad de este espacio. También estudiaremos la relación que existe con otras métricas, por ejemplo, saber si la topología generada por esta familia de métricas es la misma topología cuando se usan otras métricas.

Agradecimientos

Este artículo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación, España, proyecto MTM2008-00018 y Conicyt-Chile por proyecto Fondecyt 1080438.

Referencias

[1] J.P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*, Springer- Verleg, New york Tokyo, 1984.

[2] C. Bertoluzza, N. Corral, A. Salas. “On new class of distances between fuzzy numbers”, *Mathware Soft Computing*, **2** (1995) 71-84.

[3] S. Barro and R. Marín. *Fuzzy Logic in Medicine*, Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.

[4] Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores. “On the new solution of fuzzy differential equations”, *Chaos, Solitons & Fractals*, **38** (2008) 112-119.

[5] D.P. Datta. “The Golden mean, scale free extension of real number system, fuzzy sets and $1/f$ spectrum in physics and biology”, *Chaos, Solitons& Fractals*, **17** (2003) 781-788.

[6] P. Diamond and P. Kloeden. *Metric Space of Fuzzy Sets:Theory and Application*, Singapure World Scientific, 1994.

[7] M. Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*, Springer Verlag, Berlin, 2005.

[8] F. Hiai. “Strong laws of large numbers for multivalued random variables, Multifunctions and Integrands” (G. Salinetti, ed.), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1091, Springer-Berlag, (1984) 160-172.

[9] F. Hiai. “Convergence of conditional expectations and strong laws of large numbers for multivalued random variables”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **291** (1985) 613-627.

[10] C. Hess. “The distribution of Unbounded Random Sets and the Multivalued Strong Law of Large Numbers in Nonreflexive Banach Spaces”, *J. Convex Anal.*, **6** (1999) 163-182.

[11] S.P. Moshokoa. “The Hausdorff metric and its extensions”, *Demostratio Mathematica*, Vol XXXV,No 2 (2002) 233-241.

[12] E.P. Klement, M.L. Puri and D.A. Ralescu. “Limit theorems for fuzzy random variables”, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A-407** (1986) 171-182.

[13] V. Kratschmer. “Some complete metrics on spaces of fuzzy subsets”, *Fuzzy Sets and Systems*, **130** (2002) 357-365.

[14] M.L. Puri, D.A. Ralescu. “Fuzzy random variables”, *J. Math. Anal. Appl.* **114** (1986) 409-422.

[15] W. Trutschnig, G. González-Rodríguez, A. Colubi, M.A. Gil. “A new family of metrics for compact, convex (fuzzy) sets based on a generalized concept of mid and spread”, *Infromation Sciences* (2009).

(Recibido el 10 de octubre de 2009; aceptado el 15 de noviembre de 2009)

Y. Chalco-Cano
Departamento de Matemática
Universidad de Tarapacá
Casilla 7D, Arica, Chile
e-mail: ychalco@uta.cl

M.D. Jiménez-Gamero
Departamento de Estadística e I.O.
Universidad de Sevilla
41012 Sevilla, España
e-mail: dolores@us.es