Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 21, Nos. 1 y 2, 2003, pág. 25–31

Sobre la oscilabilidad de las soluciones de la ecuación $x'' + f(x, x', t) = 0$

Santiago Vera* Sandy Sánchez** Antonio I. Ruiz**

Resumen. En este trabajo se determinan condiciones necesarias o suficientes para que las soluciones de la ecuación de segundo orden no lineal $x'' + f(x, x', t) = 0$ sean oscilantes. Se analiza el caso particular $f(x, x', t) = a(t)f(x)h(x')$, se comparan los resultados obtenidos en uno y otro caso y se dan ejemplos que patentizan estos resultados.

Abstract. In this work we determine necessary and sufficient conditions in order to the solutions of the second-order, nonlinear differential equation $x'' + f(x, x', t) = 0$ be oscillating. We make the analysis of the particular $f(x, x', t) = a(t)f(x)h(x')$, comparing both cases and bringing examples to support those results.

Introducción

Se conocen diversos trabajos relacionados con las propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales analizadas a partir de su propia expresión, que son generalizaciones de la ecuación del péndulo.

En [1] Bobisud obtiene condiciones necesarias y suficientes para la oscilabilidad de todas las soluciones de la ecuación:

$$x'' + a(t)f(x) = 0. \tag{1}$$

En [2] Burton y Grimmer obtienen condiciones necesarias y suficientes para la oscilabilidad de todas las soluciones de la ecuación (1). Este resultado fue extendido a ecuaciones más generales en [5], [6], [8], [9] y [10]. Este trabajo tiene como objetivos obtener condiciones para la oscilabilidad de las soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + f(x, x', t) = 0 \tag{2}$$

Palabras y frases claves: oscilabilidad, sistema de ecuaciones diferenciales.
MSC2000: Primaria: 34A12. Secundaria: 34K11, 34K60.

* Departamento de Matemática y Computación, I.S.P. "Raúl Gómez García", Guantánamo, Santiago de Cuba.
** Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, *e-mail*: `sandys@csd.uo.edu.cu, iruiz@csd.uo.edu.cu`.

y su caso particular dado por la ecuación

$$x'' + a(t)f(x)h(x') = 0, \tag{3}$$

y comparar estos resultados. En [10] pueden verse resultados referidos a esta ecuación (3), entre los que se incluye el estudio de la oscilabilidad.

1. Oscilabilidad de las soluciones de la ecuación $x'' + f(x, x', t) = 0$

Comenzaremos estudiando bajo qué condiciones de la función f la ecuación (2) tiene soluciones prolongables.

A partir de ahora supondremos ciertas las siguientes condiciones para la función $f(x, y, t)$, lo cual está en correspondencia con lo exigido al caso particular anterior:
(C) $f(x, y, t)$ es una función real y continua respecto a las variables x e y en $(-\infty, +\infty)$ y t en $[0, +\infty)$, y tal que:

1. $xf(x, y, t) > 0$;
2. $f'_y(x, y, t) > 0$ si $x \neq 0$;
3. $xf'_t(x, y, t) < 0$, si $x \neq 0$.

Haciendo el cambio de variables $x' = y$ en la ecuación (2) obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f(x, y, t). \end{cases} \tag{4}$$

Lema 1.1. *Sea $(x(t), y(t))$ solución del sistema (4) tal que $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ para algún $t_0 \geq 0$; entonces esta solución se puede definir para todo $t \geq t_0$.*

Demostración. Sea la función auxiliar

$$V(x, y, t) = F(x, y, t) + \frac{y^2}{2},$$

donde

$$F(x, y, t) = \int_0^x f(s, y, t)ds.$$

Derivando $V(x, y, t)$ con respecto a t a lo largo de las trayectorias del sistema (4) se obtiene

$$V'_t(x, y, t) = F(x, y, t)f(x, y, t) + F'_t(x, y, t).$$

Bajo las condiciones (C) se deduce que $V'_t(x(t), y(t), t) \leq 0$, es decir, V es es una función no creciente a lo largo de las trayectorias del sistema (4).

Una solución $(x(t), y(t))$ del sistema (4) solo puede dejar de estar definida para todo $t \geq t_0$ si existe $T \geq t_0$ tal que

$$x^2(t) + y^2(t) \to \infty \quad \text{para} \quad t \to T - 0. \tag{5}$$

Supongamos que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (4) que no está definida para todo $t \geq t_0$, o sea, existe $T > t_0$ tal que se cumple (5). Por ser V no creciente se tiene entonces

$$V(x(t), y(t), t) \leq V(x(_0), y(t_0), t_0) = V_0,$$

para todo $t_0 \leq t \leq T$, o sea $F(x, y, t) + \dfrac{y^2}{2} \leq V_0$.

Esta acotación solo es posible si $y(t)$ está acotada, es decir, si existe

$$M > 0 \quad \text{tal que} \quad |y(t)| \leq M \quad \text{para todo} \quad t_0 \leq t \leq T. \tag{6}$$

Integrando la primera ecuación del sistema (4) entre t_0 y t y teniendo en cuenta (6), tenemos que $|x(t)| \leq |x_0| + M(t - t_0) \leq |x_0| + M(t - t_0)$.

De aquí que $|x(t)| \leq N$ con $N = |x_0| + M(T - t_0)$.

Se concluye que $x(t)$ está acotada para todo $t_0 \leq t \leq T$. Esto contradice (5), y por consiguiente toda solución del sistema (4) está definida para todo $t_0 \leq t \leq T$. ☑

Daremos a continuación una condición suficiente para que toda solución de la ecuación (4) sea oscilante.

Teorema 1.2. *Si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para* $|x| > \delta$ *se cumple* $|f(x, y, t)| \geq \epsilon$, $\forall t \in [0, +\infty]$ *y para todo* $y \in \mathbb{R}$, *entonces las soluciones de la ecuacion* (4) *son oscilantes.*

Demostración. Basta probar que toda solución del sistema (4) que está en el primer cuadrante pasa al cuarto, y que toda solución que está en el tercer cuadrante pasa al segundo; del cuarto al tercero y del segundo al primero es consecuencia directa de las direcciones de las velocidades y el razonamiento anterior.

Sea t_0 tal que $y(t_0) = k > 0$ y $x(t_0) = 0$. Como $x'(t) = y(t_0) = k > 0$, entonces $x(t) > \delta > 0$ si $t = t_0 + \theta$, $\theta > 0$; por lo tanto, $|f(x, y, t)| \geq \epsilon$ si $t \geq t_0 + \theta$. Integrando la segunda ecuación del sistema (4) entre t_0 y t obtenemos:

$$y(t) = y(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(x, y, s)ds \leq y(t_0) - \epsilon \int_{t_0}^{t} ds = y(t_0) - \epsilon(t - t_0).$$

Cuando $t \to t_0 + \dfrac{y(t_0)}{\epsilon}$ tenemos que $y(t) \to 0$, y por las direcciones de las velocidades llegamos a que la solución pasa al cuarto cuadrante.

De forma similar se demuestra que la trayectoria pasa del tercer cuadrante al segundo. ☑

Ejemplo 1.3. Las soluciones de la ecuación $x'' + x\left[e^{xx' - tx^2} + e^x\right] = 0$, según el Teorema 1.2, son oscilantes.

2. Oscilabilidad de las soluciones de la ecuación $x'' + a(t)f(x)h(x') = 0$

Consideremos ahora el caso particular $f(t,x,x') = a(t)f(x)h(x')$, y supóngase que se satisfacen las siguientes condiciones:

(A) $a(t)$ es continuamente diferenciable para $0 \leq t < \infty$ y tal que $a'(t)$ tiene un número finito de ceros.

(F) $f(x)$ es continua para $-\infty < x < \infty$ y se cumple que $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$.

(H) $h(y)$ es continua para $-\infty < x < \infty$, es no creciente para $y > 0$, no decreciente para $y < 0$ y $\lim\limits_{y \to \pm\infty} h(y) > \epsilon > 0$.

A partir de ahora se supondrían válidas las condiciones (A), (F) y (H).

La ecuación $x'' + a(t)f(x)h(x') = 0$ es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a(t)f(x)h(y). \end{cases} \tag{7}$$

Lema 2.1. *Todas las soluciones del sistema* (7) *se pueden definir para todo* $t \geq t_0 > 0$.

Demostración. La demostración de este lema se realiza siguiendo la idea de la demostración del Lema 1.1. ☑

Teorema 2.2. *Si además de las condiciones antes indicadas se cumple que*

$$\int_0^{\infty} \frac{a'(t)^-}{a(t)} dt < \infty, \tag{8}$$

donde $a'(t)^- = \text{máx}\,(0, -a'(t))$, *entonces todas las soluciones del sistema* (7) *son oscilantes si y solo si*

$$\int_{t_0}^{+\infty} a(t) f\left[\pm k(t - t_0)\right] dt = \pm\infty \tag{9}$$

para todo $k > 0$ *y todo* $t_0 \geq 0$.

Demostración. Supóngase que la condición (9) no se cumple y que todas las soluciones del sistema (7) son oscilantes. Si la condición (9) no se satisface, entonces

$$\int_0^{+\infty} a\left(\frac{s}{k} + t_0\right) f(s) ds = M < \infty$$

para algún $k > 0$ y algún $t_0 > 0$.

Considérense además las funciones

$$b(t) = \exp\left[-\int\limits_0^t \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} d\tau\right] \quad \text{y} \quad c(t) = a(0)\exp\left[-\int\limits_0^t \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} d\tau\right],$$

donde $a'(t)^+ = \text{máx}\,[0, a'(t)]$; aquí se cumple que $a(t) = b(t)c(t)$. Además de la condición (8) se deduce el siguiente acotamiento de $b(t)$, $0 < b_1 \leq b(t) \leq 1$.

Sea la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (7) tal que $x(t_0) = 0$, $y(t_0) = A > k$. Siempre que $y(t) \geq k$, $x'(t) \geq k$, por tanto $x(t) \geq k(t - t_0)$ y existe $x^{-1}(s)$ tal que $x^{-1}(s) \leq \dfrac{s}{k} + t_0$.

De la segunda ecuación del sistema (7) se deduce que

$$y'(t) \geq -h(k)c(t)f(x(t)). \tag{10}$$

Integrando (10) entre t_0 y t se obtiene

$$y(t) \geq A - \frac{h(x)}{k} \int_{t_0}^{t} c(s) f\left(x(s)\right) x'(s) ds,$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} y(t) \geq A - \frac{h(x)}{k} \int_{t_0}^{x(t)} c(x^{-}(t)) f(r) dr &\geq \frac{h(x)}{k} \int_{0}^{x(t)} c\left(\frac{r}{k} + t_0\right) f(r) dr \\ &\geq A - \frac{M_1 h(k)}{k}. \end{aligned}$$

Si se toma A tal que $k^2 - Ak + M_1 h(k) < 0$, $y(t)$ permanece por encima de la recta $y = k$ para $t \geq t_0$, y como $x(t) \geq k(t - t_0)$, entonces $x(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Esto contradice que todas las soluciones del sistema (7) son oscilantes, lo cual prueba la necesidad de la condición (9). Con signo $(-)$ se procede de forma similar.

Para probar la suficiencia de la condición (9) es suficiente ver que cualquier solución contenida en el primer cuadrante pasa al cuarto, y que cualquier solución que esté en el tercero pasa al segundo, pues el paso del cuarto al tercero y del segundo al primero se obtiene por la dirección de la tangente, pues aquí no pueden existir asíntotas verticales.

Sea la solución $(x(t), y(t))$ tal que $x(t_0) = 0$, $y(t_0) = k > 0$. Cuando la trayectoria pase al primer cuadrante, se tiene que $y(t) \leq k$, y así $x'(t) \leq k$.

Integrando la segunda ecuación del sistema (7) se tiene que

$$y'(t) \geq -\frac{b_1 \epsilon}{k} \int_{0}^{x(t)} c\left(\frac{r}{k} f(r) dr\right). \tag{11}$$

Si $x(t) \to \infty$, de la desigualdad (11) y la condición (9) se tiene que $y(t) \to -\infty$, así la solución pasa del primero al cuarto cuadrante.

Si $x(t)$ permanece acotada, es decir, $x(t_0 + \delta) \leq x(t) \leq N$, se tiene que $f(x) \geq P > 0$ para algún P. De la segunda ecuación del sistema (7) se obtiene que

$$y' = -a(t)h(y)f(x) \leq P\epsilon a(t). \tag{12}$$

Integrando (12) entre $t_0 + \delta$ y t, se llega a que

$$y(t) \leq y(t_0 + \delta) - \epsilon P \int_{t_0+\delta}^{t} a(s) ds.$$

Así, $y(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, pues por la condición (A) se tiene que

$$\int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty. \qquad \boxtimes$$

Corolario 2.3. *Si $a'(t) > 0$ y se satisfacen las condiciones (F) y (N), entonces todas las soluciones del sistema* (7) *son oscilantes si y sólo si la condición* (9) *se satisface para todo $k > 0$ y todo $t_0 \geq 0$.*

Corolario 2.4. *Si $a'(t) > 0$, $a(t) > \epsilon\ \forall t \geq 0$ y se satisfacen (F) y (N), entonces todas las soluciones del sistema* (7) *son oscilantes si y sólo si la condición* (9) *se satisface para todo $k > 0$ y todo $t_0 \geq 0$.*

Observación 1. Las condiciones (C_2) y (H) se satisfacen simultáneamente para $y < 0$ cuando $h(y)$ es diferenciable.

Observación 2. Las condiciones (C_3) y (A) se satisfacen sólo para $a'(t) < 0$.

Ejemplo 2.5. Si $a(t) = t+1$, $f(x) = x^{2n-1}$ y $h(y) = Me^{-y^2} + \epsilon$, $\epsilon > 0$, se satisfacen las condiciones del Teorema 2.2.

Referencias

[1] BOBISUD L. E. "Oscilation of Nonlinear Second Order Differential Equation". *Proceedings of the American Mathematical Socity*, Vol. 23, N° 3, 1969.

[2] BURTON T. and GRIMMER R. "On the Asimptotic Behaviour of the Solution of $x'' + a(t)f(x) = 0$". *Proc. Comb. Phil. Soc.*, N° 70, 1971.

[3] BURTON T. and TOWWNSEND C. "Stability Regions of the Forced Liénard Equation". *J. Lon-don Math. Soc.*, 1971.

[4] LAZER A. C. "Stability Condition for the Differential Equation $y'' + p(x)y = 0$". *Michigan Math. J.*, N° 12, 1965.

[5] NÁPOLES J. E. y REPILADO J. A. "Prolongabilidad, acotamiento y oscilación de las soluciones del sistema $x' = \alpha(y) - \beta(y)f(x)$, $y' = a(t)g(x)$". *Revista Científica de Matemáticas*, U. H., Vol. XV, N° 1, 1994.

[6] PASTOR J. R., PI CALLEJA y TREJO C. A. *Análisis Matemático* Tomo III. Edición Revolucionaria, La Habana, 1967.

[7] REPILADO J. A. y RUIZ A. I. "Sobre el acotamiento de las soluciones de la ecuación diferencial $x'' + g(x)x' + a(t)f(x) = 0$ (I)". *Revista Ciencias Matemáticas*, U. H., Vol. VI, N° 1, 1985.

[8] REPILADO J. A. y RUIZ A. I. "Sobre el acotamiento de las soluciones de la ecuación diferencial $x'' + g(x)x' + a(t)f(x) = 0$ (II)". *Revista Ciencias Matemáticas*, U. H., Vol. VI, N° 3, 1986.

[9] Repilado J. A. y Ruiz A. I. "Sobre algunas propiedades de las soluciones de la ecuación $u'' + a(t)f(u)h(u')$". *Revista Ciencias Matemáticas*, U. H., N° 3, Año 1987.

[10] Vera S. y Ruiz A. I. "Sobre la oscilabilidad de la ecuación $a(t)f(x)h(x') = 0$". *Revista Cubana de Ciencias Matemáticas*, Ciudad de la Habana, 1999.

[11] Willet D. and Wong J. S. W. "Some Properties of $p(t)x' + q(t)f(x) = 0$". *J.Math. Anal. Appl.*, N° 23, 1968.

Santiago Vera
Departamento de Matemática y Computación, I.S.P. "Raúl Gómez García"
Guantánamo, Santiago de Cuba.

Sandy Sánchez y Antonio I. Ruiz
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente
La Habana, Santiago de Cuba.
e-mail: sandys@csd.uo.edu.cu,iruiz@csd.uo.edu.cu