Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 21, Nos. 1 y 2, 2003, pág. 33–48

Soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío mediante el formalismo de Ernst*

Javier F. Ramos C.** Guillermo A. González**

Resumen. En este trabajo se muestra, a través del formalismo de Ernst, la generación de una clase particular de soluciones estacionarias axialmente simétricas a partir de soluciones tipo Kerr-NUT y Tomimatsu-Sato. Se analizan las condiciones de asintoticidad de las soluciones obtenidas, observando que un caso particular de ellas corresponde a un campo gravitacional asintóticamente plano. El método de Ernst es ilustrado brevemente mediante algunos ejemplos conocidos. Todo lo anterior es presentado en coordenadas esferoidales generalizadas (CEG), que contienen como casos particulares a las coordenadas prolatas, oblatas y esféricas.

1. Introducción

El objetivo central del trabajo que proponemos es abordar el problema del campo gravitacional estacionario con simetría axial a través del método de Ernst [6]. Este formalismo se ocupa de la obtención de clases específicas de soluciones particulares. Mostraremos que es posible obtener soluciones estacionarias a partir de soluciones estáticas conocidas. Apoyados en ciertas propiedades de simetría, se revela la conexión entre los casos estático y estacionario.

Como veremos, gran parte de las soluciones estacionarias que obtendremos partirán de un núcleo común: la solución de Schwarszchild. Por medio de la aplicación sucesiva de las propiedades de simetría en la ecuación de Ernst podemos pasar de la métrica estática isotrópica a espacio-tiempos estacionarios más complejos, como por ejemplo las métricas de Kerr y Taub-NUT, o inclusive nuevas soluciones.

Una de las mencionadas propiedades de simetría está íntimamente ligada con la naturaleza de los sistemas de coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas y esféricas. Por este hecho introduciremos el sistema CEG (Coordenadas Esferoidales Generalizadas) que contiene como casos particulares cada uno de los anteriores.

Palabras y frases claves: ecuaciones de Einstein, soluciones estacionarias axialmente simétricas.

MSC2000: Primaria: 83C05. Secundaria: 83D05.

* Este trabajo fue realizado con la financiación de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

** Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: `javiramos1976@hotmail.com`, `guillego@uis.edu.co`.

Mostraremos algunas de las nuevas soluciones que se pueden obtener a través de los procedmientos antes mencionados, verificando su respectiva asintoticidad. Dado que estarán expresadas en CEG, cada una de ellas contendrá tres casos particulares, dependiendo del valor que tome un determinado parámetro característico.

2. Métrica estacionaria con simetría axial en CEG

Como sabemos, el espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico está representado por el elemento de línea de Weyl-Lewis-Papapetrou [17]

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\Lambda}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2], \tag{1}$$

expresado en coordenadas cilíndricas de Weyl (t, ϕ, ρ, z). Las ecuaciones de campo de Einstein que determinan $f(\rho, z)$, $\omega(\rho, z)$ y $\Lambda(\rho, z)$ tienen la siguiente forma [17]:

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \rho^{-2} f^4 \nabla\omega \cdot \nabla\omega, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (\rho^{-2} f^2 \nabla\omega) = 0, \tag{3}$$

$$4\Lambda,_\rho = \rho f^{-2}[f^2,_\rho - f^2,_z] - \rho^{-1} f^2[\omega^2,_\rho - \omega^2,_z], \tag{4}$$

$$2\Lambda,_z = \rho f^{-2} f,_\rho f,_z - \rho^{-1} f^2 \omega,_\rho \omega,_z . \tag{5}$$

La estructura particular del anterior sistema de ecuaciones, sugiere su propio esquema de solución: comenzamos resolviendo (2) y (3), un sistema de ecuaciones acopladas para f y ω; luego, teniendo la forma explícita de estos dos campos, resolvemos el sistema sobredeterminado (4)–(5) para obtener Λ.

Para efectos prácticos, introduciremos el sistema de *coordenadas esferoidales generalizadas* CEG. Su definición se basa en los siguientes dos hechos:

(i) Las superficies coordenadas prolatas y oblatas se obtienen de la rotación acimutal (respecto al eje Z) de las curvas coordenadas elípticas [16].

(ii) Las superfícies coordenadas esféricas se obtienen cuando reducimos a cero la distancia focal de las anteriores [16].

Con base en esto, podemos considerar que cada punto del espacio tridimensional está representado por una terna ordenada de números reales $(\tilde{x}, y, \phi)$, donde $\tilde{x}$ y y están definidos mediante las relaciones [16]

$$\tilde{x} = \frac{R_+ + R_-}{2\kappa}, \qquad \tilde{x} \geq \frac{\sigma^2 + \kappa^2}{2\kappa^2}, \tag{6}$$

$$y = \frac{R_+ - R_-}{2\sigma}, \qquad -1 \leq y \leq 1, \tag{7}$$

y el número ϕ corresponde al ángulo acimutal, definido de la manera usual en el sistema de coordenadas cilíndricas.

El factor σ representa, de alguna manera, la distancia focal de los elipsoides e hiperboloides coordenados y sólo toma tres posibles valores: real, imaginario puro y cero. El factor κ se expresa en términos de σ como

$$2\kappa = (1-i)\sigma + (1+i)\sigma^*, \tag{8}$$

y los términos R_+, R_- están relacionados con las coordenadas cilíndricas [15] mediante las fórmulas

$$R_+ = \sqrt{\rho^2 + (z+\sigma)^2}, \tag{9}$$

$$R_- = \sqrt{\rho^2 + (z-\sigma)^2}. \tag{10}$$

Estos términos representan, en cierta forma, las distancias a cada uno de los focos del punto en cuestión.

Combinando adecuadamente las anteriores relaciones obtenemos las siguientes fórmulas de transformación:

$$\rho^2 \;=\; (\kappa^2\tilde{\mathrm{x}}^2 - \sigma^2)(1-y^2), \tag{11}$$

$$z \;=\; \kappa\tilde{\mathrm{x}}y. \tag{12}$$

Puede notarse fácilmente que en los casos en que escogemos σ real (o imaginario puro), estas expresiones adquieren la estructura de las fórmulas de transformación entre las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esferoidales prolatas (o esferoidales oblatas).

Si observamos las relaciones (6), (9) y (10), y recordamos la relación entre las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), puede mostrarse lo siguiente [16]:

$$\lim_{\sigma\to 0} \kappa\tilde{\mathrm{x}} = r, \qquad \lim_{\sigma\to 0} y = \cos\theta.$$

Esto significa que cuando σ toma el valor de cero, las expresiones (11) y (12) toman la forma de la transformación entre coordenadas cilíndricas y esféricas. Como vemos, el sistema CEG contiene como casos particulares los sistema de coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas y esféricas, según escojamos σ real, imaginario o cero, respectivamente.

Para efectos prácticos en los cálculos resulta conveniente establecer la siguiente definición:

$$\kappa\tilde{\mathrm{x}} = \sigma x, \tag{13}$$

con la cual, las fórmulas de transformación (11),(12) quedan:

$$\rho^2 \;=\; \sigma^2(x^2-1)(1-y^2), \tag{14}$$

$$z \;=\sigma xy. \tag{15}$$

Esta forma, que es bastante similar a la transformación entre coordenadas prolatas y cilíndricas, es mucho más manejable que (11),(12) y la utilizaremos a lo largo del presente trabajo. Sin embargo, es preciso aclarar que, en últimas, cada vez que se necesite analizar alguna solución en cualquiera de los tres casos particulares (prolatas, oblatas o esféricas) nos tendremos que remitir a la relación (13).

De acuerdo con (14) y (15), el elemento de línea de Weyl-Lewis-Papapetrou, en CEG, tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} ds^2 =& - f(dt - \omega d\phi)^2 + \sigma^2 f^{-1}(x^2-1)(1-y^2)d\phi^2 \\ &+ \sigma^2 f^{-1} e^{2\Lambda}(x^2-y^2)\left[\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Así mismo, las ecuaciones de campo, en dicho sistema de coordenadas se escribirán:

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \frac{f^4}{\sigma^2(x^2-1)(1-y^2)}\nabla\omega\cdot\nabla\omega, \tag{17}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{f^2}{(x^2-1)(1-y^2)}\nabla\omega\right) = 0; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} 4\Lambda,_x =& f^{-2}\frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[x(x^2-1)f^2,_x - x(1-y^2)f^2,_y - 2y(x^2-1)f,_x f,_y\right] \\ &- \frac{f^2}{\sigma^2(x^2-y^2)}\left[x\,\omega^2,_x - \frac{1-y^2}{x^2-1}x\,\omega^2,_y - 2y\,\omega,_x\,\omega,_y\right]; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} 4\Lambda,_y =& f^{-2}\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\left[y(x^2-1)f^2,_x - y(1-y^2)f^2,_y - 2x(1-y^2)f,_x f,_y\right] \\ &+ \frac{f^2}{\sigma^2(x^2-y^2)}\left[y\,\omega^2,_y - \frac{x^2-1}{1-y^2}y\,\omega^2,_x - 2x\,\omega,_x\,\omega,_y\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

En las anteriores fórmulas hemos introducido la siguiente notación:

$$\nabla = \frac{1}{\sigma\sqrt{x^2-y^2}}\left[\sqrt{x^2-1}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \sqrt{1-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y\right], \tag{21}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sigma^2(x^2-y^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\right]\right\}. \tag{22}$$

Bajo esta particular escogencia de las coordenadas, como veremos, se transparenta una de las propiedades de simetría de la ecuación de Ernst, cuyo formalismo esbozaremos a continuación.

3. El formalismo de Ernst

La naturaleza de los términos que conforman el sistema (17)-(18) nos permite reducirlo a una sola ecuación diferencial para una función compleja, cuyas partes real e imaginaria están íntimamente relacionadas con f y ω. Este hecho notable, descubierto por Frederick J. Ernst hacia 1968, vislumbra un mecanismo de generación de soluciones que se apoya en las simetrías de dicha ecuación.

Empecemos a esbozar el formalismo observando que para cualquier función φ se cumple lo siguiente [6]:

$$\nabla \cdot \{[(x^2-1)(1-y^2)]^{-1/2}\mathbf{e}_\phi \times \nabla\varphi\} = 0, \tag{23}$$

donde $\mathbf{e}_\phi$ es el vector unitario en la dirección acimutal. Podemos proponer entonces que, de acuerdo con (3), el campo ω está relacionado con φ de la siguiente manera:

$$\nabla\omega = \sigma\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}f^{-2}\mathbf{e}_\phi \times \nabla\varphi, \tag{24}$$

con lo cual las ecuaciones de campo para f y ω quedan modificadas de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (f^{-2}\nabla\varphi) = 0, \tag{25}$$

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi, \tag{26}$$

y podemos combinarlas para obtener la siguiente expresión:

$$f(\nabla^2 f + i\nabla^2\varphi) = (\nabla f + i\nabla\varphi)\cdot(\nabla f + i\nabla\varphi).$$

Entonces, si definimos una función compleja $\mathcal{E}$ de la siguiente manera.

$$\mathcal{E} = f + i\varphi, \tag{27}$$

podemos escribir:

$$(\mathrm{Re}\,\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E}\cdot\nabla\mathcal{E}. \tag{28}$$

De esta manera, a través de la definición (27), la labor de determinar f y φ consiste ahora ya no en integrar el sistema (25)-(26), sino en resolver (28).

Por lo general, resulta conveniente establecer la siguiente definición:

$$\mathcal{E} = \frac{\xi-1}{\xi+1}. \tag{29}$$

Al introducir la expresión anterior en (28), toma la siguiente forma:

$$(\xi\xi^*-1)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi\cdot\nabla\xi. \tag{30}$$

Esta última ecuación, que denominaremos comúnmente como “Ecuación de Ernst”, será en adelante nuestra referencia básica en la búsqueda de soluciones particulares.

Es fácil verificar que si reemplazamos, en la ecuación (30), ξ por $e^{i\alpha}\xi$, siendo α una constante real, dicha ecuación queda invariante. También, observando (21) y (22), podemos notar que ∇ y ∇^2 son invariantes ante la transformación $x \to y$, $y \to x$. Es decir, (30) en CEG es invariante ante el intercambio simultáneo de las coordenadas esferoidales x, y. Estas consideraciones dan lugar al siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Si* $\xi(x,y)$ *es solución de* (30), *entonces:*

(i). *La función* $e^{i\alpha}\xi(x,y)$*, siendo* α *una constante real, es solución de la ecuación de Ernst.*

(ii). *La función* $\xi(y,x)$*, que resulta de efectuar el intercambio simultáneo de las coordenadas* (x,y)*, también es solución de* (30).

Estas dos propiedades de simetría constituyen en sí mismas un mecanismo de obtención de soluciones, por lo que serán una herramienta fundamental de este trabajo. Es importante observar el efecto que la propiedad (ii) genera sobre el campo gravitacional mismo, es decir sobre las funciones f, ω y Λ. Para ver esto introduzcamos una transformación T tal que:

$$T[h(x,y)] = h(y,x) = \boldsymbol{h}(x,y). \tag{31}$$

Si denotamos además por $h_1(x,y)$ y $h_2(x,y)$ las soluciones resultantes de tomar $\xi(x,y)$ y $\xi(y,x)$, respectivamente, puede verse fácilmente que se satisface:

$$f_2(x,y) = \boldsymbol{f}_1(x,y) = f_1(y,x), \tag{32}$$

$$\varphi_2(x,y) = \boldsymbol{\varphi}_1(x,y) = \varphi_1(y,x). \tag{33}$$

El efecto de esta transformación sobre ω se puede observar si recordamos la ecuación (24):

$$\omega_{1,x} = -\sigma f_1^{-2}(1-y^2)\varphi_{1,y}\,, \tag{34}$$

$$\omega_{1,y} = \sigma f_1^{-2}(1-y^2)\varphi_{1,x}\,. \tag{35}$$

La solución ω_2, correspondiente a aplicar la transformación T sobre $\xi(x,y)$, satisface el mismo sistema, pero intercambiando el subíndice 1 por el subíndice 2. Introduciendo las relaciones (32)-(33), tendremos:

$$\omega_{2,x} = -\sigma \boldsymbol{f}_1^{-2}(1-y^2)\boldsymbol{\varphi}_{1,y}\,, \tag{36}$$

$$\omega_{2,y} = \sigma \boldsymbol{f}_1^{-2}(x^2-1)\boldsymbol{\varphi}_{\;1,x}\,. \tag{37}$$

Si aplicamos la transformación T al sistema (34)-(35) y comparamos el resultado con las dos ecuaciones anteriores, es fácil verificar que

$$\omega_{2,x} = \boldsymbol{\omega}_{1,x}\,, \qquad\qquad \omega_{2,y} = \boldsymbol{\omega}_{1,y}\,.$$

Esto implica simplemente que

$$\omega_2(x,y) = T[\omega_1(x,y) + C] = \omega_1(y,x) + C, \tag{38}$$

donde C es una constante de integración. Si establecemos un análisis similar al anterior, llegamos a la misma conclusión para Λ:

$$\Lambda_2(x,y) = T[\Lambda_1(x,y) + D] = \Lambda_1(y,x) + D, \tag{39}$$

siendo D otra constante de integración. De las consideraciones anteriores, establecidas a la luz del formalismo de Ernst, podemos proponer el siguiente corolario:

Corolario 3.2. *Si $f(x,y)$, $\omega(x,y)$ y $\Lambda(x,y)$ son soluciones de las ecuaciones de campo* (17)–(20), *también lo son $f(y,x)$, $\omega(y,x)+C$ y $\Lambda(y,x)+D$, siendo C y D dos constantes de integración arbitrarias.*

La elección adecuada de las constantes C y D dependerá, por supuesto, de la condición de asintoticidad del campo gravitacional. En las siguiente secciones, a través de varios casos que tomaremos en consideración (soluciones tipo Weyl, Kerr, Kerr-Nut,Tomimatsu-Sato, entre otras), veremos la importancia de este método que, con relativa sencillez, proporciona un camino práctico en la búsqueda de soluciones exactas. Podremos observar que partiendo de una solución bastante simple, como lo es la solución de Schwarzschild, podemos construir soluciones estacionarias más complicadas.

4. Soluciones particulares

Comenzaremos considerando el caso estático, correspondiente a tomar $\omega = 0$ en (16). Tendremos entonces la forma del espacio-tiempo de Weyl. En este caso resulta apropiado definir un potencial U, solución de la ecuación de Laplace, tal que $f = e^{2U}$ [15]. Es decir, la función $\mathcal{E}$, en términos de U, se expresa de la siguiente forma:

$$\mathcal{E} = e^{2U}.$$

En virtud de (29) es fácil notar que $\xi = -\coth U$. Ahora bien, la expresión general asintóticamente plana en CEG, para U, está dada por [16]:

$$U(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sigma^{n+1}} Q_n(x) P_n(y). \tag{40}$$

Si tomamos el caso particular correspondiente a escoger $a_0 = \sigma$ y $a_n = 0$ para $n > 0$, recordando que $P_0(y) = 1$ y $Q_0(x) = -\coth^{-1} x$, tendremos:

$$\xi_s = x, \tag{41}$$

con lo cual, la expresión para f adopta la forma

$$f_s = \frac{x-1}{x+1}. \tag{42}$$

De acuerdo con esto el sistema (19)-(20), después de algunos cálculos elementales, queda expresado así:

$$\Lambda_{,x} = \frac{x(1-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2-1)}, \qquad \Lambda_{,y} = \frac{y}{x^2-y^2}.$$

Resolviendo el anterior sistema sobredeterminado, obtenemos para Λ:

$$\Lambda_s(x,y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-1}{x^2-y^2}\,. \tag{43}$$

Si introducimos (42) y (43) en la expresión para la métrica estacionaria axisimétrica en CEG (y haciendo $\omega = 0$), nos encontramos con la siguiente forma, ya familiar para nosotros [16]:

$$ds^2 = \frac{1-x}{x+1}dt^2 + (x+1)^2\left[\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right] + (x+1)^2(1-y^2)d\phi^2. \qquad (44)$$

Como podemos observar, esta expresión corresponde a una métrica tipo Schwarzschild, escrita en CEG[1]. Para observarla en su forma usual (en coordenadas esféricas de Schwarzschild) tan sólo basta efectuar la transformación $x = \frac{r}{m} - 1$, $y = m\cos\theta$.

4.1. Soluciones tipo Taub-NUT

Vimos en la sección anterior que la solución tipo Schwarzschild, dentro del formalismo de Ernst, corresponde a tomar (41). Estudiaremos ahora, amparados en la primera propiedad de simetría de la ecuación de Ernst, el caso correspondiente a tomar esta solución multiplicada por un factor complejo de fase constante:

$$\xi_{TN} = e^{i\alpha}x. \qquad (45)$$

Con esta escogencia es fácil ver que la parte real de $\mathcal{E}$, es decir f, será:

$$f_{TN} = \frac{x^2-1}{x^2+2x\cos\alpha+1}. \qquad (46)$$

Así mismo, para φ, la parte imaginaria, tendremos:

$$\varphi = \frac{2x\,\mathrm{sen}\,\alpha}{x^2+2x\cos\alpha+1}. \qquad (47)$$

Como sabemos, conociendo φ podemos determinar ω a partir de la ecuación (24):

$$\omega_{TN} = -2\sigma y\,\mathrm{sen}\,\alpha. \qquad (48)$$

Si introducimos (46)-(48) en (19)-(20) obtendremos:

$$\Lambda_{,x} = \frac{x(1-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2-1)}\,, \qquad \Lambda_{,y} = \frac{y}{x^2-y^2}\,,$$

cuya solución ya la calculamos en la sección anterior:

$$\Lambda_{TN}(x,y) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\,. \qquad (49)$$

De esta manera, si hacemos $a = \cos\alpha$ y $b = \mathrm{sen}\,\alpha$ y reemplazamos las expresiones para f,ω y Λ en la fórmula general de la métrica, tenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sigma^2\left[\frac{x^2+2ax+1}{x^2-1}\right][dx^2 + \frac{x^2-1}{1-y^2}dy^2 + (x^2-1)(1-y^2)d\phi^2] \\ &\quad -\frac{x^2-1}{x^2+2ax+1}(dt - 2\sigma by d\phi)^2. \end{aligned} \qquad (50)$$

[1]Para ver esto es preciso recordar la forma de la métrica de Schwarzschild en coordenadas prolatas [15].

Esta igualdad representa una métrica tipo Taub-NUT[2]. Como pudimos notar, la transformación $\xi \to e^{i\alpha}\xi$ nos permite, en este caso, obtener una solución estacionaria (Taub-NUT) a partir de una solución estática (Schwarzschild).

Empleemos ahora la segunda propiedad de simetría, es decir, tomemos la solución particular $\xi = e^{i\alpha}y$. Evidentemente las expresiones para f, ω y Λ, en virtud del corolario, estarán dadas por[3]

$$f = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 2y\cos\alpha + 1}\,, \quad \omega = -2\sigma x \operatorname{sen}\alpha\,, \quad \Lambda(x,y) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-y^2}{x^2-y^2}. \tag{51}$$

Como vemos, el caso estático lo obtenemos para $\alpha = 0$:

$$f = \frac{y-1}{y+1}\,, \qquad \omega = 0\,, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{1-y^2}{x^2-y^2}\,. \tag{52}$$

Es fácil notar que esta solución no puede corresponder a la descripción de lo que usualmente, en la teoría general de la relatividad, se considera un campo gravitacional físicamente admisible. Dado que $-1 < y < 1$, tendremos que $f < 0$ en todo el dominio, y esto impide que la métrica tenga la signatura apropiada. En este caso vemos que, a través de la transformación $\xi(x,y) \to \xi(y,x)$, podemos obtener soluciones no físicas a partir de otras que si lo son, y viceversa. Veremos en la siguiente sección, a través de un conocido ejemplo, que también por medio de una superposición de ambas es posible obtener soluciones físicamente permisibles.

5. Soluciones tipo Kerr

Como ya lo anticipamos, veremos lo que ocurre si efectuamos la superposición de dos soluciones tipo Schwarzschild, es decir, si tomamos ahora

$$\xi = \alpha x + \beta y. \tag{53}$$

Para que dicha superposición sea solución de la ecuación de Ernst es necesario que

$$\alpha + \beta = e^{i\lambda}, \tag{54}$$

y por lo tanto es suficiente que escojamos

$$\alpha = \cos\lambda\,, \qquad \beta = i\operatorname{sen}\lambda. \tag{55}$$

Aquí, λ es una constante real tal que $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Podemos establecer, por consiguiente, que

$$\xi_k = ax + iby, \tag{56}$$

en donde $a = \cos\lambda$ y $b = \operatorname{sen}\lambda$, es una solución particular de la ecuación de Ernst. Las correspondientes expresiones para f y φ quedan así:

$$f_k = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{(ax+1)^2 + b^2y^2}, \tag{57}$$

[2]Nuevamente, para notar este hecho, es preciso observar la solución de Taub-NUT escrita en coordenadas prolatas [7].

[3]Las constantes que hacen parte de ω y Λ las hemos escogido iguales a cero, por conveniencia.

$$\varphi = \frac{2by}{(ax+1)^2 + b^2y^2}. \tag{58}$$

Dadas estas relaciones, resolviendo para ω y Λ, obtenemos

$$\omega_k = \frac{2\sigma b}{a} \; \frac{(1-y^2)(ax+1)}{(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)}, \tag{59}$$

$$\Lambda_k = \ln\left[\frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{a^2(x^2 - y^2)}\right]. \tag{60}$$

Las expresiones (57),(59) y (60) corresponden a una solución tipo Kerr en CEG [7]. Cuando es reducida a coordenadas prolatas, se considera que representa un agujero negro en rotación. En este caso, la superposición de dos soluciones estáticas, una de ellas asintóticamente plana y la otra no, nos condujo a la generación de una solución de tipo estacionario y con asintoticidad bien comportada.

6. Soluciones tipo Kerr-NUT

En esta sección, aplicando la propiedad de invarianza (i) sobre la solución anterior, llegaremos a un resultado interesante: la solución de Kerr-NUT. Tendremos en este caso dos tipos de parámetros, cada uno de ellos relacionados ya sea con λ (ver sección anterior) o con α, el factor de fase. Aplicando la mencionada propiedad sobre (56) tenemos

$$\xi_{kN} = e^{i\alpha}(ax + iby), \tag{61}$$

y si definimos los siguientes parámetros:

$$c = \operatorname{sen}\alpha\,, \qquad\qquad d = \cos\alpha, \tag{62}$$

entonces podemos simplificar la notación para los resultados de f y φ que se obtienen:

$$f = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{(ax+d)^2 + (by-c)^2}, \tag{63}$$

$$\varphi = \frac{2(acx + bdy)}{(ax+d)^2 + (by-c)^2}. \tag{64}$$

El sistema sobredeterminado que satisface ω en términos de φ toma la siguiente forma:

$$\omega_{,x} = -2b\sigma(1-y^2)\frac{d(a^2x^2 - b^2y^2 + 1) + 2ax(1 - bcy)}{(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)^2}, \tag{65}$$

$$\omega_{,y} = -2a\sigma(x^2-1)\frac{c(a^2x^2 - b^2y^2 - 1) + 2by(1 + adx)}{(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)^2}, \tag{66}$$

cuya integración y posterior aplicación de condiciones de asintoticidad da como resultado

$$\omega_{kN} = \frac{2\sigma}{a}\left[\frac{b(1-y^2)(adx + cby + 1)}{a^2x^2 + b^2y^2 - 1} + cy\right]. \tag{67}$$

La función Λ, tras introducir la expresión anterior en (19) y (20), toma la forma

$$\Lambda_{kN} = \ln\left[\frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{a^2(x^2 - y^2)}\right]. \tag{68}$$

Estas dos últimas expresiones, junto con (67), conforman una solución tipo Kerr-NUT en CEG [7]. Observemos que para $c = 0$ y $d = 1$, es decir $\alpha = 0$, ésta se reduce a la solución de Kerr. Si, por el contrario, hacemos $a = 1$ y $b = 0$, es decir $\lambda = 0$, obtenemos la solución que describe el espacio-tiempo de Taub-NUT.

7. Soluciones tipo Tomimatsu-Sato

Consideraremos ahora el caso en que la función de Ernst está dada en términos de combinaciones polinomiales de las coordenadas esferoidales (x, y). En los años ochentas del siglo XX Tomimatsu y Sato formularon independientemente, tomando como punto de partida la solución de Kerr y usando el formalismo de Ernst, un tipo de solución estacionaria generada a partir de la escogencia

$$\xi = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}, \tag{69}$$

en donde $A(x, y)$ y $B(x, y)$ son dos polinomios de grado δ^2 y $\delta^2 - 1$ en (x, y), respectivamente. No entraremos aquí en los detalles de examinar las condiciones bajo las cuales esta expresión satisface la ecuación de Ernst. Sólo tendremos en cuenta los casos $\delta = 1$ y $\delta = 2$, con los cuales ya se tiene una expresión determinada para ξ. En el primero caso, la forma explícita de A y B está dada por [9]:

$$A(x, y) = ax + iby\,, \qquad B(x, y) = 1. \tag{70}$$

Como puede verse fácilmente, este resultado encarna la solución de Kerr, ya abordada en la sección 5. Para el siguiente caso, $\delta = 2$, las expresiones para A y B son [9]:

$$A(x, y) = a^2(x^4 - 1) + 2iabxy(x^2 - y^2) - b^2(1 - y^4), \tag{71}$$

$$B(x, y) = 2ax(x^2 - 1) + 2iby(1 - y^2). \tag{72}$$

Notemos que estos polinomios están dados en términos de los mismos parámetros en que está expresada la solución de Kerr. Es decir, aquí a y b también satisfacen la condición $a^2 + b^2 = 1$, lo cual facilita la obtención de las funciones que determinan el campo gravitacional:

$$f = C/D\,, \qquad \omega = 2\sigma bE(1 - y^2)/C\,, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{A}{a^4(x^2 - y^2)^4}\right], \tag{73}$$

en donde los C, D y E son relaciones polinomiales dadas por

$$C = [a^2(x^2 - 1)^2 + b^2(1 - y^2)^2]^2 - 4a^2b^2(x^2 - 1)(1 - y^2)(x^2 - y^2)^2, \tag{74}$$

$$D = [a^2x^4 + b^2y^4 - 1 + 2ax(x^2 - 1)]^2 + 4b^2y^2(ax^3 - axy^2 + 1 - y^2)^2, \tag{75}$$

$$\begin{aligned} E &= a^2(x^2-1)[(x^2-1)(1-y^2)-4x^2(x^2-y^2)]-a^3x(x^2-1) \\ &\quad \times[2(x^4-1)+(x^2+3)(1-y^2)]+b^2(1+ax)(1-y^2)^3. \end{aligned} \tag{76}$$

A esta solución de Tomimatsu-Sato, aunque es asintóticamente plana, hasta el momento no se le ha establecido una interpretación física clara. En la próxima sección, mediante la aplicación de la propiedad de simetría (ii), obtendremos una expresión muy similar, cuya asintoticidad será examinada.

8. Otras soluciones

Ahora, después de haber ilustrado el formalismo de Ernst a través de algunos ejemplos importantes, aplicaremos la propiedad (ii) sobre las expresiones de Kerr-NUT y Tomimatsu-Sato. Es claro que obtendremos un tipo de soluciones estacionarias similares en su estructura matemática, pero disímiles en su comportamiento asintótico.

Empezaremos con la solución de Kerr-NUT, la cual, como sabemos, contiene las soluciones de Kerr y Taub-NUT como casos particulares. Por el corolario de la sección anterior, partiendo de las expresiones (63), (67) y (68), obtenemos la siguiente solución:

$$f = \frac{a^2y^2+b^2x^2-1}{(ay+d)^2+(bx-c)^2}, \tag{77}$$

$$\omega = \frac{2\sigma}{a}\left[\frac{b(1-x^2)(ady+cbx+1)}{a^2y^2+b^2x^2-1}+cx\right]+C, \tag{78}$$

$$\Lambda = \ln\left[\frac{a^2y^2+b^2x^2-1}{a^2(y^2-x^2)}\right]+D. \tag{79}$$

Su límite asintótico ($x\to\infty$) está dado por

$$\lim_{x\to\infty} f = 1\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\omega = -\frac{2\sigma(ady+1)}{ab}+C\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}\Lambda = i\pi+2\ln(b/a)+D. \tag{80}$$

La función f se comporta apropiadamente bajo este límite, pero para ω no sucede exactamente lo mismo. Dado que para $x\to\infty$ esta función debe anularse, sin importar el valor de y ó de σ, la única opción que tenemos para esto es que $d=0$ y escoger $C=2\sigma/(ab)$. En el caso de Λ, para que cumpla con el requisito de asintoticidad plana, simplemente basta escoger $D=\ln(-a^2/b^2)$. Esto significa que la solución determinada por las ecuaciones

$$f = \frac{a^2y^2+b^2x^2-1}{a^2y^2+(bx-1)^2}, \tag{81}$$

$$\omega = \frac{2\sigma}{ab}\left[\frac{b^2(1-x^2)(bx+1)}{a^2y^2+b^2x^2-1}+bx+1\right], \tag{82}$$

$$\Lambda = \ln\left[\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2-1)}{x^2-y^2}\right], \tag{83}$$

es asintóticamente plana y puede llegar a representar un campo gravitacional real. Para el caso $b = 0$, que significaría aplicar la propiedad (ii) sobre la solución de Taub-NUT, de acuerdo con (80), no se obtiene una solución asintóticamente plana. Lo mismo podemos decir para el caso $c = 0$, que correspondería a introducir la transformación sobre la solución de Kerr.

Si efectuamos el mismo procedimiento a la solución de Tomimatsu-Sato, obtenemos:

$$f = C/D\,, \qquad \omega = 2\sigma b E(1-x^2)/C + F\,, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{A}{a^4(y^2-x^2)^4}\right] + G, \quad (84)$$

donde F y G son constantes arbitrarias y C, D, E, A están dados por:

$$C = [a^2(y^2-1)^2 + b^2(1-x^2)^2]^2 - 4a^2b^2(y^2-1)(1-x^2)(y^2-x^2)^2 \qquad (85)$$

$$D = [a^2y^4 + b^2x^4 - 1 + 2ay(y^2-1)]^2 + 4b^2x^2(ay^3 - ayx^2 + 1 - x^2)^2 \qquad (86)$$

$$\begin{aligned} E &= a^2(y^2-1)[(y^2-1)(1-x^2) - 4y^2(y^2-x^2)] - a^3y(y^2-1) \qquad (87)\\ &\quad \times[2(y^4-1) + (y^2+3)(1-x^2)] + b^2(1+ay)(1-x^2)^3 \end{aligned}$$

$$A(x,y) = a^2(y^4-1) + 2iabxy(y^2-x^2) - b^2(1-x^4). \qquad (88)$$

En esta ocasión, el límite asintótico de la anterior solución es

$$\lim_{x\to\infty} f = 1\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\omega = -\frac{2m(ay+1)}{b} + C\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\Lambda = -\infty, \qquad (89)$$

evidenciando que no se trata de un campo asintóticamente plano.

Podríamos, a partir de estos resultados, obtener otras soluciones estacionarias mediante la aplicación sucesiva de las propiedades (i) y (ii), o ensayando con combinaciones de las mismas. Por el momento, para evitar extendernos demasiado, no efectuaremos esta labor; sin embargo planteamos esta inquietud para que sea abordada en trabajos posteriores.

Conclusiones

El presente estudio constituyó una extensión del trabajo titulado "Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío, en coordenadas esferoidales generalizadas" [16], a campos gravitacionales estacionarios. En este caso, dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones de campo, no está claro si es posible obtener una solución general. Examinamos entonces una clase de soluciones estacionarias obtenidas a partir del formalismo de Ernst, bajo la introducción del sistema CEG, el cual constituyó una poderosa herramienta a lo largo del trabajo. Además de incluir como casos particulares tres sistemas de coordenadas distintos (prolatas, oblatas y esféricas), permitió la simplificación en la escritura de las soluciones y facilitó la introducción de propiedades de simetría. Con estos elementos se logró probar que una forma práctica de generación de soluciones exactas, de tipo estacionario, se establece a través del formalismo de Ernst.

Mediante dicho formalismo, la generación de resultados se establece mediante el uso de dos propiedades de simetría: la propiedad (i), que es inherente a la estructura de la ecuación de Ernst, y la propiedad (ii), que sólo se evidencia bajo la introduccón del sistema CEG.

Se pudo observar que es posible generar soluciones estacionarias a partir, tanto de campos estáticos, como de campos estacionarios conocidos. Así es como, partiendo de la solución estática de Schwarzschild, generamos la solución estacionaria de Taub-NUT y, posteriormente, la soluciones de Kerr y Kerr-NUT. Este hecho resulta bastante sugestivo, no sólo matemáticamente, sino también desde el punto de vista de la interpretación física de las soluciones. El que exista una conexión entre campos de naturaleza estática y estacionaria, a través de la itroducción de factores de fase y de intercambio de las coordenadas esferoidales, esboza, por decirlo así, una posible relación entre los parámetros[4] que caracterizan dichos campos. Aunque el problema de la interpretación física de los resultados no constituyó un aspecto central del presente trabajo, podemos citar ahora, para concretar lo dicho anteriormente, el ejemplo de la solución de Taub-NUT, sección 4.1. Cuando el parámetro α (que está asociado con el parámetro de NUT y se encuentra relacionado estrechamente con la primera propiedad de simetría de la ecuación de Ernst) se anula, obtenemos la solución de Schwarzschild, que presenta hasta el momento una interpretación relativamente clara, lo que no sucede con la de Taub-NUT. Se le podría asociar a dicho parámetro alguna característica relacionada con la rotación de la fuente que genera el campo. Es claro que, en este caso, la propiedad (i) señala la transición de fuentes desprovistas de rotación a fuentes que sí la tienen.

Mediante el formalismo de Ernst obtuvimos dos clases de soluciones estacionarias, que hasta el momento no han sido estudiadas. Una de ellas presenta un caso particular que está dado por las ecuaciones (81)-(83); constituye una solución asintóticamente plana y podría llegar a tener una interpretación física interesante. Los otros casos particulares, en cambio, no presentan un comportamiento asintótico usual. La otra solución, que fue generada a través de la aplicación de la propiedad (ii) sobre la solución de Tomimatsu-Sato de orden $\delta = 2$, tampoco presenta un comportamiento asintótico regular y su posible interpretación física no es clara.

Referencias

[1] Arfkeen G. *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press., Third edition, 1985.

[2] Bergman P. G. *Introduction to Theory of Relativity.* Dover, 1976.

[3] Bonnor W. B. and Sackfield A. "The Interpretation of Some Spheroidal Metrics". *Comm. Math. Phys.*, **8**, 338 (1968).

[4] Estos parámetros no son más que las constantes que hacen parte de la estructura de una solución. Dependiendo del caso, estas constantes se encuentran asociadas con las características de la fuente que genera el campo gravitacional, tales como masa, momento angular, carga eléctrica, etc.

[4] Chandrasekhar S. *The Mathematcal Theory of Black Holes.* Oxford University Press, 1992.

[5] Curzon H. E. J. "Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations". *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 23, pp. 477, (1924).

[6] Ernst F. "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem". *Phisycal Review*, Vol. 167, N^o 5, pp. 1175, (1968).

[7] González G. *Construção de modelos relativisticos de discos com suporte de esforço na direção radial.* Tesis de Doctorado, Universidade Estadual de Campinas, 1998.

[8] Kellog O. D. *Foundations of Potential Theory.* Dover, 1953.

[9] Kramer D., Stephani H., Herlt E. and Mac Callum M. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, pp. 201, Cambridge University Press, 1980.

[10] Letelier P. S. "On the gravitational field of static and stationary axial symmetric bodies with multipolar structure". *Class. Quant. Grav.*, Vol. 16, pp. 1207–1213, (1999).

[11] Letelier P. S. and Oliveira S. R. "Superposition of Weyl Solutions: the Equillibrium Forces". *Class. Quant. Grav.*, Vol. 15, pp. 421–433, (1998).

[12] Letelier P. S. and Oliveira S. R. "Exact Self-Gravitating Disks and Rings: a Solitonic Approach". *J. Math. Phys.*, Vol. 28, pp. 165–170, (1987).

[13] Morgan T. and Morgan L. "The Gravitational Field of a Disk". *Phys. Rev.*, Vol. 183, N^o 5, (1969).

[14] Morse P. M. and Fesbach H. *Methods of Theoretical Physics*, Mc Graw Hill, New York, 1953.

[15] Quevedo H. "General Static Axisymetric Solution of Einstein's Vacuum Field Equations in Prolate Spheroidal Coordinates". *Physical Review D.*, Vol. 39, N^o 10, pp. 2904–2911, (1989).

[16] Ramos J. *Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de einstein en el vacío, en coordenadas esferoidales generalizadas.* Trabajo de Grado, Universidad Industrial de Santander, 2000.

[17] Treves A. and Reina C. "Axisymetric Gravitational Fields". *General Relativity and Gravitation*, Vol. 7, N^o 10, pp. 817–838, (1976).

[18] Vorhees B. H. "Static Axially Symmetric Gravitational Fields". *Physical Review D.*, Vol. 2, N^o 10, pp. 2119–2122, (1970).

[19] Weinberg S. *Gravitation and Cosmology.* John Wiley, 1972.

[20] Weyl H. "Zur Gravitations Theorie". *Ann. Physik*, Vol. 54, pp. 117, (1917).

[21] Weyl H. "Bemerkung Über die Axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen". *Ann. Physik*, Vol. 59, pp. 185, (1919).

[22] Zipoy D. M. "Topology of Some Spheroidal Metrics". *J. Math. Phys.*, Vol. 7, pp. 1137, (1966).

Javier F. Ramos C. & Guillermo A. González
Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.
e-mail: javiramos1976@hotmail.com, guillego@uis.edu.co.