Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 26, No. 1, 2008, pág. 23–28

Sobre la curvatura escalar de $S^2 \times S^2$

Claudia Granados Pinzón*

Resumen. En este trabajo se presenta una alternativa para hallar el tensor de curvatura de $S^2 \times S^2$, a fin de utilizarlo en el cálculo de la curvatura escalar en cualquier punto dado de esta variedad riemanniana.

Abstract. In this paper we will show an alternative form to find the curvature tensor of $S^2 \times S^2$, in order to use it in the calculation of the scalar curvature at any given point of this riemannian manifold.

1. Introducción

Considérese la variedad riemanniana $M = S^2 \times S^2 = \big\{(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |p| = |q| = 1\big\}$, con la métrica producto, donde S^2 es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. El plano tangente a M en el punto $m = (p, q)$ de M, denotado por T_mM, es muy útil para encontrar el tensor de curvatura, y se puede ver que está dado por

$$T_mM = \{(u, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle u, p\rangle = \langle w, q\rangle = 0\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot\rangle$ denota el producto interno ordinario sobre $\mathbb{R}^3$.

Definiendo el tensor de curvatura y la curvatura escalar de una variedad riemanniana $(M^n, g) \subset \mathbb{R}^r$, de dimensión $n > 2$, podemos describir completamente la variedad salvo movimientos en el espacio $\mathbb{R}^r$.

Palabras y frases claves: campo vectorial, conexión Levi Civita, tensor de curvatura y curvatura escalar.
Key words: vector field, Levi Civita connection, curvature tensor and scalar curvature.
MSC2000: Primaria: 53A30. Secundaria: 53A10.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, A.A. 678, *e-mail*: `cigranad@uis.edu.co`.

2. Preliminares

Sea $M = S^2 \times S^2$. El siguiente conjunto se conoce como el espacio de los campos vectoriales de M:

$$\Gamma(M) = \{X : M \to \mathbb{R}^6 \;\mid\; X \text{ es suave y } X(m) \in T_m M \text{ para todo } m \in M\}.$$

Las siguientes definiciones y teoremas proporcionan las herramientas para encontrar el tensor de curvatura y la curvatura escalar de $S^2 \times S^2$.

Definición 2.1. Diremos que ∇ es una conexión sobre una variedad diferenciable M si la función $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$, denotada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $X,\ Y$ y Z en $\Gamma(M)$:

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
2. $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$ para toda función suave $f : M \to \mathbb{R}$.
3. $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ para toda función suave $f : M \to \mathbb{R}$, donde $X(f) : M \to \mathbb{R}$ es la derivada direccional de f en la dirección X.

Teorema 2.2. *Dada una variedad riemanniana M, existe una única conexión ∇ sobre M, llamada conexión Levi Civita, que satisface las siguientes propiedades:*

1. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.
2. $(\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ *para toda función suave* $f : M \to \mathbb{R}$.

Observación 2.3.

1. El campo vectorial dado por la segunda propiedad del Teorema 2.2 es llamado el corchete de X e Y, y se denota por $[X, Y]$.
2. Si $\overline{\nabla}$ es la conexión Levi Civita en $\mathbb{R}^6$, entonces la conexión Levi Civita ∇ en $S^2 \times S^2$ cumple la igualdad $\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T$, donde $\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T$ es la componente tangencial.
3. En $\mathbb{R}^6$ tenemos que $\overline{\nabla}_X Y(m) = \frac{d}{dt} Y(\alpha(t))|_{t=0}$, donde α es una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = m$ y $\dot{\alpha}(0) = X(m)$.

Definición 2.4. Se define el tensor de curvatura de una variedad riemanniana M como

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M),$$

dado por

$$R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Definición 2.5. Sea $x = z_n$ un vector unitario en $T_m M$. Si tomamos una base ortonormal $\{z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1}\}$ del hiperplano en $T_m M$ ortogonal a x, la curvatura de Ricci en la dirección x en m se define como

$$\mathrm{Ric}_m(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle,$$

y la curvatura escalar en m, está dada por

$$k(m) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_m(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(z_i, z_j) z_i, z_j \rangle.$$

Se puede demostrar que la Definición 2.5 es independiente de la base ortonormal, es decir, las expresiones no dependen de la base ortonormal escogida.

3. Resultado principal

Sean $(p,q) \in S^2 \times S^2$ y $v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_{(p,q)}(S^2 \times S^2)$. Supongamos que $v_1 = (u_1, w_1)$, $v_2 = (u_2, w_2)$, $v_3 = (u_3, w_3)$ y $v_4 = (u_4, w_4)$. Para encontrar el tensor de curvatura de $S^2 \times S^2$ en el punto (p,q), primero extendemos los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 a campos vectoriales mediante la función

$$Z_i : S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}^6$$

definida como

$$Z_i(x,y) = v_i - \langle v_i, (x,0) \rangle (x,0) - \langle v_i, (0,y) \rangle (0,y)$$

para $i = 1,2,3,4$.

Propiedades:

1. Para $i = 1,2,3,4$,

$$Z_i(p,q) = v_i - \langle v_i, (p,0) \rangle (p,0) - \langle v_i, (0,q) \rangle (0,q) = v_i.$$

2. $$\begin{aligned}\langle (x,y), Z_i(x,y)\rangle =& \langle v_i,(x,y)\rangle - \langle v_i,(x,0)\rangle\langle (x,0),(x,y)\rangle - \langle v_i,(0,y)\rangle\langle (0,y),(x,y)\rangle\\ =& \langle v_i,(x,y)\rangle - \langle v_i,(x,0)\rangle - \langle v_i,(0,y)\rangle = 0.\end{aligned}$$

   En consecuencia, $Z_i(x,y) \in T_{(x,y)}(S^2\times S^2)$ para todo $(x,y)\in S^2\times S^2$, donde $i=1,2,3,4$.

Ahora, si calculamos $\nabla_{Z_i} Z_j(x,y)$, tenemos que

$$\nabla_{Z_i} Z_j(x,y) = \left(\overline{\nabla}_{\overline{Z}_i}\overline{Z}_j(x,y)\right)^T = \left(\frac{d}{dt}\overline{Z}_j(\alpha_i(t),\beta_i(t))\Big|_{t=0}\right)^T,$$

donde $\overline{\nabla}$ es la conexión en $\mathbb{R}^6$, $(\alpha_i(0),\beta_i(0)) = (x,y)$ y $(\dot{\alpha}_i(0),\dot{\beta}_i(0)) = \overline{Z}_i(x,y)$. Obsérvese que como $\overline{\nabla}$ es la conexión Levi Civita de $\mathbb{R}^6$, los campos vectoriales $\overline{Z}_i$ están en $\Gamma(\mathbb{R}^6)$ y su definición es $\overline{Z}_i(x,y) = v_i$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_j(\alpha_i(t),\beta_i(t))\Big|_{t=0} =& \frac{d}{dt}\Big[v_j - \langle v_j,(\alpha_i(t),0)\rangle(\alpha_i(t),0) - \langle v_j,(0,\beta_i(t))\rangle(0,\beta_i(t))\Big]_{t=0}\\ =& -\langle v_j,(\alpha_i(0),0)\rangle(\dot{\alpha}_i(0),0) - \langle v_j,(\dot{\alpha}_i(0),0)\rangle(\alpha_i(0),0)\\ &- \langle v_j,(0,\beta_i(0))\rangle(0,\dot{\beta}_i(0)) - \langle v_j,(0,\dot{\beta}_i(0))\rangle(0,\beta_i(0))\\ =& -\langle v_j,(x,0)\rangle Z_i(x,0) - \langle v_j, Z_i(x,0)\rangle(x,0)\\ &- \langle v_j,(0,y)\rangle Z_i(0,y) - \langle v_j, Z_i(0,y)\rangle(0,y).\end{aligned}$$

Así,

$$\left(\overline{\nabla}_{\overline{Z}_i}\overline{Z}_j(x,y)\right)^T = -\langle v_j,(x,0)\rangle\overline{Z}_i(x,0) - \langle v_j,(0,y)\rangle\overline{Z}_i(0,y)$$

y

$$\nabla_{Z_i}Z_j(p,q) = (\overline{\nabla}_{\overline{Z}_i}\overline{Z}_j(p,q))^T = -\langle v_j,(p,0)\rangle\overline{Z}_i(p,0) - \langle v_j,(0,q)\rangle\overline{Z}_i(0,q) = 0.$$

Por consiguiente,

$$[Z_i,Z_j]_{(p,q)} = \nabla_{Z_i}Z_j(p,q) - \nabla_{Z_j}Z_i(p,q) = 0.$$

Más aún, obsérvese que

$$\begin{aligned}\left[\overline{\nabla}_{\overline{Z}_k}\left[\overline{\nabla}_{\overline{Z}_i}\overline{Z}_j(x,y)\right]^T\right]^T_{(p,q)} =& \left[\overline{\nabla}_{\overline{Z}_k}\left[-\langle v_j,(x,0)\rangle\overline{Z}_i(x,0) - \langle v_j,(0,y)\rangle\overline{Z}_i(0,y)\right]\right]^T_{(p,q)}\\ =& -\langle v_j,(p,0)\rangle\overline{\nabla}_{\overline{Z}_k}\overline{Z}_i(p,0) - \left[\overline{Z}_k[\langle v_j,(x,0)\rangle]\overline{Z}_i(x,0)\right]_{(p,q)}\\ &- \langle v_j,(0,q)\rangle\overline{\nabla}_{\overline{Z}_k}\overline{Z}_i(0,q) - \left[\overline{Z}_k[\langle v_j,(0,y)\rangle]\overline{Z}_i(0,y)\right]_{(p,q)}\\ =& -\left[\overline{Z}_k[\langle v_j,(x,0)\rangle]\overline{Z}_i(x,0)\right]_{(p,q)} - \left[\overline{Z}_k[\langle v_j,(0,y)\rangle]\overline{Z}_i(0,y)\right]_{(p,q)},\end{aligned}$$

y puesto que

$$\begin{aligned}\overline{Z}_k\left[\langle v_j,(x,0)\rangle\right]_{(p,q)} &= \frac{d}{dt}\langle v_j,(\alpha_i(t),0)\rangle\bigg|_{t=0}\\ &= \langle v_j,(\dot{\alpha}_i(0),0)\rangle = \langle v_j,(u_k,0)\rangle,\end{aligned}$$

donde $\alpha_i(0) = p$ y $(\dot{\alpha}_i(0),0) = (u_k,0)$, reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}\left[\nabla_{\overline{Z}_k}\left[\nabla_{\overline{Z}_i}\overline{Z}_j(x,y)\right]^T\right]^T_{(p,q)} &= -\langle v_j,(u_k,0)\rangle\overline{Z}_i(p,0) - \langle v_j,(0,w_k)\rangle\overline{Z}_i(0,q)\\ &= -\langle v_j,(u_k,0)\rangle(u_i,0) - \langle v_j,(0,w_k)\rangle(0,w_i).\end{aligned}$$

Luego

$$\nabla_{Z_k}\nabla_{Z_i}Z_j(x,y)_{(p,q)} = -\langle v_j,(u_k,0)\rangle(u_i,0) - \langle v_j,(0,w_k)\rangle(0,w_i).$$

A continuación calculamos el tensor de curvatura de $S^2 \times S^2$ en el punto (p,q):

$$\begin{aligned}\langle R(Z_1,Z_2)Z_3,Z_4\rangle_{(p,q)} =&\langle \nabla_{Z_2}\nabla_{Z_1}Z_3 - \nabla_{Z_1}\nabla_{Z_2}Z_3 + \nabla_{[Z_1,Z_2]}Z_3, Z_4\rangle_{(p,q)}\\ =&\langle -\langle v_3,(u_2,0)\rangle(u_1,0) - \langle v_3,(0,w_2)\rangle(0,w_1)\\ &+ \langle v_3,(u_1,0)\rangle(u_2,0) + \langle v_3,(0,w_1)\rangle(0,w_2), v_4\rangle\\ =&-\langle u_3,u_2\rangle\langle u_1,u_4\rangle - \langle w_3,w_2\rangle\langle w_1,w_4\rangle + \langle u_3,u_1\rangle\langle u_2,u_4\rangle\\ &+ \langle w_3,w_1\rangle\langle w_2,w_4\rangle.\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la expresión para el tensor de curvatura de $S^2 \times S^2$, es fácil encontrar la curvatura escalar para esta variedad en cualquier punto dado. Por ejemplo, sean $p = (1,0,0,1,0,0) \in S^2 \times S^2$ y $v_1 = e_2$, $v_2 = e_3$, $v_3 = e_5$, $v_4 = e_6 \in T_p(S^2 \times S^2)$.

Puesto que la curvatura escalar está dada por

$$k(p) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\mathrm{Ric}_p(v_i),$$

usando la expresión para el tensor de curvatura de $S^2 \times S^2$ hallamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_p(v_1) = \frac{1}{3}\big[&\langle R(e_2,e_3)e_2,e_3\rangle + \langle R(e_2,e_5)e_2,e_5\rangle\\ &+ \langle R(e_2,e_6)e_2,e_6\rangle + \langle R(e_2,e_2)e_2,e_2\rangle\big] = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_p(v_2) = \frac{1}{3}\big[&\langle R(e_3,e_2)e_3,e_2\rangle + \langle R(e_3,e_5)e_3,e_5\rangle\\ &+ \langle R(e_3,e_6)e_3,e_6\rangle + \langle R(e_3,e_3)e_3,e_3\rangle\big] = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}_p(v_3) = \frac{1}{3}\big[&\langle R(e_5,e_2)e_5,e_2\rangle + \langle R(e_5,e_3)e_5,e_3\rangle \\ &+ \langle R(e_5,e_6)e_5,e_6\rangle + \langle R(e_5,e_5)e_5,e_5\rangle\big] = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}_p(v_4) = \frac{1}{3}\big[&\langle R(e_6,e_2)e_6,e_2\rangle + \langle R(e_6,e_3)e_6,e_3\rangle \\ &+ \langle R(e_6,e_5)e_6,e_5\rangle + \langle R(e_6,e_6)e_6,e_6\rangle\big] = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

De lo cual resulta, finalmente,

$$k(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

En este ejemplo hemos encontrado la curvatura escalar de $S^2 \times S^2$ en el punto $p = (1,0,0,1,0,0)$. Similarmente se puede hallar en cualquier otro punto. ☑

Referencias

[1] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry.* Birkhauser, Boston, 1992.

[2] N. PRAKASH. *Differential Geometry an Integrated Approach.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 1993.

CLAUDIA GRANADOS
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia, A.A. 678
e-mail: cigranad@uis.edu.co.