

Convergencia débil de una sucesión de grafos aleatorios radiales de Bernoulli

LEON A. VALENCIA*, EDWIN ZARRAZOLA,
YEISON RAMÍREZ

Universidad de Antioquia, Instituto de Matemáticas, Medellín, Colombia.

Resumen. En este artículo se introduce una colección de trayectorias aleatorias radiales coalescentes definidas sobre una región del plano, y se probará que, en una escala difusiva, dicha colección converge en distribución, mediante homeomorfismo, a una restricción de la Red Browniana.

Palabras clave: Convergencia débil, escala difusiva, red browniana.

MSC2010: 60G07, 60G50, 60G55.

Weak convergence of a sequence of Bernoulli radial random graphs

Abstract. This article introduce a collection of coalescing random paths defined on a radial plane region. It will proved that, in a diffusive scale, this collection converges in distribution, via homeomorphism, to a restriction of Brownian Web.

Keywords: Weak convergence, diffusive scale, brownian web.

1. Introducción

Bacelli y Bordenave estudiaron en [2] un grafo aleatorio en el plano llamado *Árbol de expansión radial de un proceso puntual de Poisson (AER)*. Se puede pensar el AER como un sistemas de curvas poligonales aleatorias, cuyos vértices se encuentran en los puntos de un proceso puntual de Poisson homogéneo en el plano y además finalizan determinísticamente en el origen. Tales curvas poligonales se obtienen de la siguiente manera: Sea S un proceso de Poisson homogéneo en el plano, y supóngase que S_0 es una realización de S ; entonces, en cada punto de S_0 se aplica el siguiente algoritmo:

*E-mail: lalexander.valencia@udea.edu.co

Recibido: 03 de noviembre de 2015, Aceptado: 08 de marzo de 2016.

Para citar este artículo: L.A. Valencia, E. Zarrazola, Y. Ramírez, Convergencia débil de una sucesión de grafos aleatorios radiales de Bernoulli, *Rev. Integr. Temas Mat.* 34 (2016), No. 1, 95–108.

Paso 1. Dado $(x, t) \in S$, denótese por C_1 la circunferencia de radio $\sqrt{x^2 + t^2}$ y centro en el origen.

Paso 2. Considérese a $\bar{B}_r(x, t)$ como una bola cerrada con centro en (x, t) y radio $r > 0$, y sea $r(x, t) = \inf_r \{ \bar{B}_r(x, t) \cap C_1 \cap S \neq \emptyset \} \wedge (\sqrt{x^2 + t^2})$.

Paso 3. Si $r(x, t) < \sqrt{x^2 + t^2}$, entonces existe un punto $(x_1, t_1) \in \bar{B}_{r(x,t)}(x, t) \cap C_1 \cap S$, y realizamos la interpolación lineal de (x, t) con (x_1, t_1) . Si $r(x, t) > \sqrt{x^2 + t^2}$, entonces se interpola linealmente el punto (x, t) con el origen.

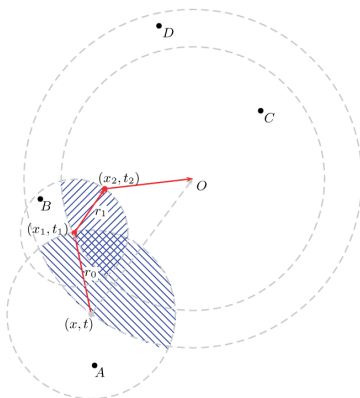


Figura 1. Representación esquemática de una realización del proceso, donde $r_0 = r_0(x, t)$, $r_1 = r_1(x_1, t_1)$ y $\{(x, t), (x_1, t_1), (x_2, t_2), A, B, C, D\} \subset S$. Nótese que los puntos A, B, C y D no pertenecen a la trayectoria poligonal que une el punto (x, y) al origen O .

Nótese que la construcción del **AER** está bien definida en casi todas partes. En [9], Fontes et al. consideran una variante del **AER** más “cercana” al modelo de Bacelli y Bordenave que la analizada en [4] y [12]. En [9], [4] y [12] se obtuvo el mismo límite débil en una escala difusiva, el cual fue llamado en [9], *la red de puentes Brownianos (RPB)*. La **RPB** esta relacionada con la *Red Browniana (RB)*; más precisamente, es una transformación de **RB**, objeto que Fontes et al. en [8] caracterizaron y para el que proporcionaron criterios de convergencia. En [3], [5], [7], se propusieron modelos que convergen débilmente en una escala difusiva a la **RB**, en los cuales se tiene un sistema de trayectorias aleatorias coalescentes que no se cruzan, y en [10] establecieron criterios para trayectorias con cruzamiento.

El propósito de este artículo es introducir un modelo más simple que los presentados en [9], [4] y [12]; si bien está un poco “distante” del **AER**, en una escala difusiva, el límite débil es “cercano” a la **RPB**, en el sentido que ambos son una transformación de la **RB** y se comportan exactamente igual en el espacio, esto es, la transformación $g(y, s) = \left(\frac{y}{|s|}, \frac{1}{|s|} - 1 \right)$ envía la **RPB** en la **RB**, mientras que la transformación $h(y, s) = \left(\frac{y}{|s|}, s \right)$ envía el límite débil de nuestro modelo en la **RB**.

La motivación para estudiar el **AER** proviene de aplicaciones a redes de comunicación. Por ejemplo, en sensores de redes inalámbricas la información detectada se almacena en

un punto central; la información fluye desde los sensores a lo largo de las aristas del árbol soporte radial, y la raíz de dicho árbol es el punto central; para más información, ver por ejemplo [6]. La conexión de [6] con el trabajo que vamos a desarrollar se debe principalmente a la relación entre el límite débil de nuestro modelo con la **RPB**.

Sea $n \in 2\mathbb{N}$ suficientemente grande; para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, se define:

- C_k : Círculo con centro en el origen del plano y radio k ;
- $\theta_j := \frac{2\pi j}{n}$, con $j \in \mathbb{Z}$ y $-n/2 < j \leq n/2$;
- $S_n := \left\{ p(j, k) \in C_k : p(k, j) = -k(\sin(\theta_j), \cos(\theta_j)) \right\}$;
- $\varphi : S_n \rightarrow \mathbb{Z}$ es una función tal que $\varphi(p(k, j)) = k + j$;
- $P_n := \{p(k, j) : \varphi(p(k, j)) \in 2\mathbb{Z}\} \subset S_n$ y
- $\{X_y\}_{y \in P_n}$ es una colección de variables aleatorias i.i.d. con distribución de Bernoulli, $(\mathbb{P}(X_y = 1) = \mathbb{P}(X_y = -1) = \frac{1}{2})$.

Considere una realización de la colección de variables aleatorias $\{X_y\}$. Sea $y = p(k, j) \in P_n$ cualquiera con $k > 1$; sea $\alpha_0(y) = y$, e inductivamente se define $\alpha_h(y) = p(k - h, j + \sum_{i=1}^h X_{\alpha_i(y)})$ para $h = 1, 2, \dots, k - 1$. Bajo estas condiciones se introduce la siguiente definición:

Definición 1.1. $\zeta_n(y)$ es la trayectoria obtenida al interpolar linealmente los puntos $\alpha_0(y), \alpha_1(y), \dots, \alpha_{k-1}(y)$ en el respectivo orden.

Nótese que las trayectorias aleatorias construidas de esta manera no presentan cruza-mientos.

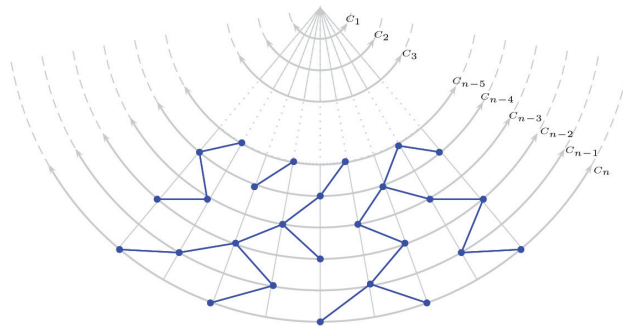


Figura 2. Representación esquemática de una realización del algoritmo.

El límite de escala de este modelo (bajo ciertas restricciones) está relacionado con la Red Browniana (**RB**), la cual puede pensarse como una colección de movimientos brownianos coalescentes comenzando en cualquier punto del espacio tiempo. Este objeto fue introducido en [1], y su motivación era resolver un problema relacionado con el modelo del

votante unidimensional, posteriormente analizado en detalle por Tóth y Werner en [11]. Fontes et al. en [8] caracterizaron la **RB** y proporcionaron criterios de convergencia para una sucesión de trayectorias aleatorias sin cruzamiento. En este artículo se prueba que, bajo una escala difusiva, la colección de trayectorias aleatorias representadas en la Figura 2, restringidas a cierto subconjunto de \mathbb{R}^2 bajo una escala difusiva, convergen débilmente a un homeomorfismo de la **RB**.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se realiza una construcción formal del modelo, se define el espacio métrico completo separable donde la sucesión de grafos aleatorios que se estudia en este artículo asume sus valores, y finalmente se enuncia el teorema principal. La Sección 3 está completamente dedicada a la demostración del teorema principal.

2. Construcción del modelo y resultado principal

En esta sección se propone un modelo y se enuncia el resultado principal de este trabajo. A partir de ahora, las trayectorias del modelo se restringen a una región del semiplano inferior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$.

Para determinar el límite débil en una escala difusiva de nuestro modelo, es necesario realizar ciertas restricciones sobre P_n .

Definición 2.1 (Puntos). Sean $\delta \in (0, 1/2)$, $\epsilon \in (0, 1)$ y $n \in 2\mathbb{N}$ (suficientemente grande). Sea $V_n \subset P_n$ definido por

$$V_n := \left\{ y = p(k, j) \in P_n \mid |\theta_j| \leq n^{\delta/2-1/2}, k > n\epsilon \right\}.$$

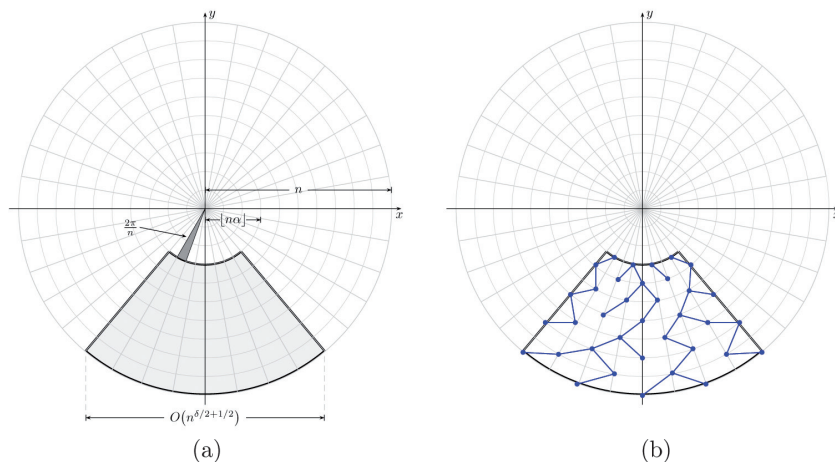


Figura 3. (a) Subregión de P_n , y (b) Representación esquemática de una realización.

Los puntos en V_n pertenecen a la región acotada ilustrada en la Figura 3, y serán usados como vértices en los cuales comienzan las trayectorias poligonales del modelo.

Definición 2.2 (Trayectorias aleatorias). Sea $n \in 2\mathbb{N}$ suficientemente grande. Para cada $y = p(k, j) \in V_n$ se define $\beta(y) = |y| - \lfloor n\epsilon \rfloor$ y

$$\tau = \tau_n(y) := \min \left\{ k : \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{i=1}^k X_{\alpha_i(y)} \right| > n^{\delta-1/2} \right\} \wedge (\beta(y) + 1). \tag{1}$$

Sea $\Gamma_n = \{\gamma_y \mid y \in V_n\}$ formada por todas las trayectorias poligonales γ_y comenzando en $y \in V_n$ y pasando a través de los puntos $\alpha_0(y), \alpha_1(y), \dots, \alpha_\tau(y), (0, 0)$ restringidas a la región $\mathbb{R} \times [-n, -n\epsilon]$. Se llamará *Grafo de Bernoulli Radial* (**GBR**) el grafo aleatorio Γ_n .

Como se verá posteriormente, la probabilidad de ocurrencia del evento

$$\left\{ \max_{y=p(k,j) \in V_n} \max_{1 \leq h \leq \beta(y)} \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{i=1}^h X_{\alpha_i(y)} \right| > n^{\delta-1/2} \right\}$$

infinitas veces, es cero. Esto implica que la probabilidad de $\{\tau_n(y) = \beta(y) + 1\}$ eventualmente es igual a uno.

Es importante resaltar que la elección de δ y ϵ es necesaria para garantizar que, con gran probabilidad, las trayectorias aleatorias interpoladas se puedan representar de la forma $x = g(y)$, donde g es una función.

A continuación se define un espacio métrico en el cual Γ_n asume sus valores; además, se caracterizará y se darán los criterios para la convergencia a un objeto conocido como la red browniana restringida (ver [9] y [4]), el cual es una modificación del trabajo de Fontes et al. en [8]. El objetivo principal es mostrar que el límite débil en la escala difusiva de Γ_n , es decir, de **GBR**, es un homeomorfismo evaluado en la red browniana restringida, el cual al igual que en [9] se llamará red de puentes brownianos (**RPB**).

2.1. La red browniana

A continuación se presenta una breve caracterización de la red browniana (RB) propuesta en [8]. Sea $(\overline{\mathbb{R}^2}, \rho)$ la compactación de \mathbb{R}^2 bajo la métrica

$$\rho((x_1, t_1), (x_2, t_2)) := \left| \frac{\tanh(x_1)}{1 + |t_1|} - \frac{\tanh(x_2)}{1 + |t_2|} \right| \vee |\tanh(t_1) - \tanh(t_2)|.$$

$\overline{\mathbb{R}^2}$ puede pensarse como la imagen de $[-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$ bajo la función

$$(x, t) \mapsto (\Phi(x, t), \Psi(t)) := \left(\frac{\tanh(x)}{1 + |t|}, \tanh(t) \right).$$

Para cada $t_0 \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, sea $C[t_0] = \{f : [t_0, \infty] \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \Phi(f(t), t) \text{ es continua}\}$, y defínase $\Pi = \bigcup_{t_0 \in \overline{\mathbb{R}}} C[t_0] \times \{t_0\}$, donde $(f, t_0) \in \Pi$ representa una trayectoria en $\overline{\mathbb{R}^2}$ comenzando en $(f(t_0), t_0)$. Para $(f, t_0) \in \Pi$, se denota por \hat{f} la función que extiende f a todo $\overline{\mathbb{R}}$ de manera tal que $\hat{f}(t) = f(t_0)$ para $t < t_0$; tómesese

$$d((f_1, t_1), (f_2, t_2)) := \sup_t |\Phi(\hat{f}_1(t), t) - \Phi(\hat{f}_2(t), t)| \vee |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|.$$

Proposición 2.3. (Π, d) es un espacio métrico completo separable.

Sea \mathcal{H} el conjunto formado por los subconjuntos compactos de (Π, d) , con la métrica inducida de Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$, i.e.,

$$d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2) = \sup_{g_1 \in K_1} \inf_{g_2 \in K_2} d(g_1, g_2) \vee \sup_{g \in K_2} \inf_{g_1 \in K_1} d(g_1, g_2),$$

y sea $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ la σ -álgebra de Borel generada por $d_{\mathcal{H}}$.

Proposición 2.4. $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ es un espacio métrico completo separable.

La red browniana es una variable aleatoria $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ -valuada. El siguiente teorema caracteriza esta variable aleatoria.

Teorema 2.5. Existe una variable aleatoria $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ -valuada, \overline{W} , cuya distribución está unívocamente determinada por las siguientes propiedades:

1. Para cualquier punto $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ determinístico, existe una trayectoria browniana, $W_{x,t}$, comenzando en (x, t) con probabilidad 1.
2. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) \in \mathbb{R}^2$ determinísticos, la distribución conjunta de $W_{x_1, t_1}, \dots, W_{x_n, t_n}$ es la de movimientos brownianos coalescentes (con unidad de difusión constante).
3. Para cualquier subconjunto \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , denso, numerable y determinístico, \overline{W} es la clausura de $\{W_{x,t} : (x, t) \in \mathcal{D}\}$ en $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ con probabilidad 1.

Demostración. Ver el Teorema 2.1 en [8]. ☑

2.2. La red browniana restringida

Sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r < s$, y sea $A_{r,s} = \mathbb{R} \times [r, s]$. Sea $(\overline{A}_{r,s}, \overline{\rho})$ la compactación de $A_{r,s}$ bajo la métrica

$$\overline{\rho}((x_1, t_1), (x_2, t_2)) := |\tanh(x_1) - \tanh(x_2)| \vee |t_1 - t_2|.$$

$\overline{A}_{r,s}$ puede pensarse como la imagen de $\overline{\mathbb{R}} \times [r, s]$ bajo la función $(x, t) \mapsto (\tanh x, t)$. Para cada $t_0 \in [r, s]$, sea $\mathcal{C}_{r,s}[t_0] := \{f : [t_0, s] \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ es continua}\}$, y definase $\Pi_{r,s} := \bigcup_{t_0 \in [r,s]} \mathcal{C}_{r,s}[t_0] \times \{t_0\}$, donde $(f, t_0) \in \Pi_{r,s}$ representa una trayectoria en $\overline{A}_{r,s}$ comenzando en $(f(t_0), t_0)$. Para $(f, t_0) \in \Pi_{r,s}$ se denota por \hat{f} la función que extiende f a todo $[r, s]$ de forma tal que $\hat{f}(t) = f(t_0)$ para $r \leq t \leq t_0$. Si se toma

$$d_{r,s}((f_1, t_1), (f_2, t_2)) := \sup_{r \leq t \leq s} \left| \tanh(\hat{f}_1(t)) - \tanh(\hat{f}_2(t)) \right| \vee |t_1 - t_2|,$$

se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.6. $(\Pi_{r,s}, d_{r,s})$ es un espacio métrico completo separable.

Sea $\mathcal{H}_{r,s}$ el conjunto formado por los subconjuntos compactos de $(\Pi_{r,s}, d_{r,s})$, con la métrica inducida de Hausdorff $d_{\mathcal{H}_{r,s}}$, definida por:

$$d_{\mathcal{H}_{r,s}}(K_1, K_2) := \sup_{g_1 \in K_1} \inf_{g_2 \in K_2} d_{r,s}(g_1, g_2) \vee \sup_{g_2 \in K_2} \inf_{g_1 \in K_1} d_{r,s}(g_1, g_2), \quad (2)$$

y sea $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_{r,s}}$ la σ -álgebra de Borel generada por $d_{\mathcal{H}_{r,s}}$. Entonces se tiene que:

Proposición 2.7. $(\mathcal{H}_{r,s}, d_{\mathcal{H}_{r,s}})$ es un espacio métrico completo separable.

Sea $\tilde{\mathcal{H}}_{r,s}$ el conjunto formado por los subconjuntos compactos de $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ que contienen al menos una trayectoria comenzando en $\bar{A}_{r,s}$. Si $K \in \tilde{\mathcal{H}}_{r,s}$ y $(f, t_0) \in K$ con $t_0 \in [r, s]$, se define $(f, t_0)|_{r,s}$ como la restricción de la trayectoria (f, t_0) al conjunto $\bar{A}_{r,s}$.

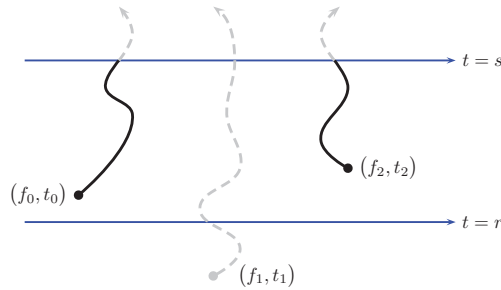


Figura 4. Representación de trayectorias restringidas.

Proposición 2.8. Si $\mathfrak{T} : (\tilde{\mathcal{H}}_{r,s}, d_{\mathcal{H}}) \rightarrow (\mathcal{H}_{r,s}, d_{\mathcal{H}_{r,s}})$ es la función definida por

$$\mathfrak{T}(K) := \{(f, t_0)|_{r,s} \mid (f, t_0) \in K \text{ y } t_0 \in [r, s]\},$$

entonces \mathfrak{T} es continua.

Demostración. \mathfrak{T} está bien definida. En efecto, para $K \in \tilde{\mathcal{H}}_{r,s}$, el conjunto $K' := \{(f, t_0) \in K \mid t_0 \in [r, s]\}$ es un subconjunto cerrado del compacto K . Entonces K' es compacto y el conjunto de trayectorias de K' restringidas al conjunto $\bar{A}_{r,s}$ es compacto, esto es, $\mathfrak{T}(K) = \mathfrak{T}(K')$. La continuidad de \mathfrak{T} se sigue del hecho que si $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ que converge a $K \in (\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$, entonces $\{\mathfrak{T}(K_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a $\mathfrak{T}(K)$ en $(\mathcal{H}_{r,s}, d_{\mathcal{H}_{r,s}})$. \square

La red browniana restringida (**RBR**) es una variable aleatoria $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ -valuada, cuya caracterización está dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.9. Existe una variable aleatoria $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ -valuada, $\bar{W}_{r,s}$, cuya distribución está unívocamente determinada por las siguientes propiedades:

1. Para cualquier punto $(x, t) \in A_{r,s}$ determinístico, existe una trayectoria browniana $W_{x,t}$, comenzando en (x, t) con probabilidad 1.

2. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) \in A_{r,s}$ determinísticos, la distribución conjunta de $W_{x_1, t_1}, \dots, W_{x_n, t_n}$ es la de movimientos brownianos coalescentes (con unidad de difusión constante).
3. Para cualquier subconjunto \mathcal{D} de $A_{r,s}$, denso, numerable y determinístico, $\overline{W}_{r,s}$ es la clausura de $\{W_{x,t} : (x, t) \in \mathcal{D}\}$ en $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$.

Demostración. Para $(x, t) = (x, s)$, $W_{x,s}$ puede pensarse como un movimiento browniano comenzando en (x, s) y terminando en (x, s) , i.e., un punto. El teorema se sigue de la Proposición 2.8. ☑

Definición 2.10. La variable aleatoria $\overline{W}_{r,s}$ en el Teorema 2.9 es llamada la *red browniana restringida (RBR)*.

Sean $t_0 \in [r, s]$, $t > 0$, $a < b$ y \mathcal{M} una variable aleatoria $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathfrak{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ -valuada. Además, sea $\eta_{\mathcal{M}}(t_0, t; a, b)$ una variable aleatoria $\{0, 1, 2, \dots\}$ -valuada que representa el número de puntos distintos en $\mathbb{R} \times \{t_0 + t\}$ que son tocados por alguna trayectoria de \mathcal{M} que también cruza el segmento $[a, b] \times \{t_0\}$. Defínase $\eta_{\mathcal{M}}(t_0, t; a, b) := 0$ si $t_0 + t > s$.

El siguiente teorema proporciona un criterio de convergencia a la **RBR**.

Teorema 2.11. *Supóngase que $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ son variables aleatorias $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathfrak{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ -valuadas con trayectorias que no se cruzan. Si se satisfacen las siguientes condiciones:*

I : Para cualquier subconjunto denso y numerable \mathcal{D} de $A_{r,s}$ y puntos determinísticos arbitrarios $y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathcal{D}$, existen $\theta_n^{y_1}, \dots, \theta_n^{y_m} \in \mathcal{X}_n$ tales que $\theta_n^{y_1}, \dots, \theta_n^{y_m}$ convergen en distribución, cuando $n \rightarrow \infty$, a movimientos brownianos coalescentes (con unidad de difusión constante) comenzando en y_1, y_2, \dots, y_m ;

$$B_1 : \forall t > 0, \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(a, t_0) \in A_{r,s}} \mu_n(\eta(t_0, t; a, a + \epsilon) \geq 2) \rightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0+;$$

$$B_2 : \forall t > 0, \epsilon^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(a, t_0) \in A_{r,s}} \mu_n(\eta(t_0, t; a, a + \epsilon) \geq 3) \rightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0+;$$

entonces la sucesión de distribuciones μ_n de \mathcal{X}_n , converge a la distribución $\mu_{\overline{W}_{r,s}}$ de la **RBR**.

Demostración. (Bosquejo de la prueba) Siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 2.2 dado en [8], se puede probar de manera análoga este teorema. En el desarrollo de la prueba las ideas principales a tener en cuenta son el hecho de que las trayectorias no se crucen, sumado a la condición (I), implicarán la rigidez de la sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^\infty$. Las condiciones (B1) e (I) garantizan que cualquier límite subsequencial \mathcal{X} de $\{\mathcal{X}_n\}$ contiene una versión de la **RBR**.

Las condiciones (B1) y (B2) juntas implican que $\mathbb{E}[\eta_{\mathcal{X}}(t_0, t; a, b)] \leq \mathbb{E}[\eta_{\overline{W}}(t_0, t; a, b)] = 1 + \frac{b-a}{\sqrt{\pi t}}$ para cualquier $t_0 \in [r, s]$, $t > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, el Teorema 4.6 en [8] implica que \mathcal{X} contiene únicamente las trayectorias del $\overline{W}_{r,s}$. ☑

2.3. Enunciado del resultado principal

El resultado principal de este trabajo es mostrar que bajo la escala difusiva, Γ_n converge en distribución a una transformación continua de la RBR (en $\mathbb{R} \times [-1, -\epsilon]$), donde $\epsilon \in (0, 1)$ está fijo.

Sea $\psi : \mathbb{R} \times [-1, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, -\epsilon]$ definida por $\psi(x, t) = \left(\frac{x}{2\pi|t|}, t\right)$; es fácil ver que ψ es un homeomorfismo y que $\psi^{-1}(u, v) = (-2\pi uv, v)$. Sea $T : \mathcal{H}_{-1, -\epsilon} \rightarrow \mathcal{H}_{-1, -\epsilon}$ la transformación $T(G) = \{\psi(f(t), t)\}_{(f(t), t) \in G}$; entonces $T^{-1}(F) = \{\psi^{-1}(f(t), t)\}_{(f(t), t) \in F}$. Para $F \in \mathcal{H}_{-n, -n\epsilon}$ definamos

$$A_n(F) = \left\{ \left(\frac{f(t)}{\sqrt{n}}, \frac{t}{n} \right) \right\}_{(f(t), t) \in F}.$$

Nótese que $A_n(F) \in \mathcal{H}_{-1, -\epsilon}$.

$\Phi^n := A_n(\Gamma_n)$ es llamada la *red de Bernoulli radial bajo una escala difusiva*; obsérvese que $\Phi^n \in \mathcal{H}_{-1, -\epsilon}$. El teorema principal se enuncia a continuación:

Teorema 2.12. *La red de Bernoulli radial bajo una escala difusiva Φ^n converge débilmente a $T^{-1}(\overline{W}_{-1, -\epsilon})$ cuando $n \rightarrow \infty$ (RPB).*

3. Construcción de la prueba del resultado principal

Para $n \in 2\mathbb{N}$ suficientemente grande, la definición en (1) obliga a que las trayectorias de Γ_n tengan sus puntos contenidos en la región $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -n \leq t \leq -n\epsilon, |\tan(x/t)| \leq n^{\delta-1/2}\}$. El siguiente lema permite demostrar que, con gran probabilidad, la restricción de que las trayectorias estén contenidas en la región anterior no ocurre. Esto implica que la restricción impuesta no es “artificial”. Recuérdese que para $y \in V_n$ se tiene entonces $\beta(y) = |y| - \lfloor n\epsilon \rfloor$.

Lema 3.1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in V_n} \sup_{1 \leq i \leq \beta(y)+1} \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{j=1}^i X_{\alpha_j(y)} \right| = 0$, con probabilidad 1.

Demostración. Sea $B := \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in V_n} \sup_{1 \leq i \leq \beta(y)+1} \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{j=1}^i X_{\alpha_j(y)} \right| > 0 \right\}$, y sean $0 < \eta < 1/2 - \delta$ fijo y

$$A_n := \left\{ \sup_{y \in V_n} \sup_{1 \leq i \leq \beta(y)+1} \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{j=1}^i X_{\alpha_j(y)} \right| > n^{-\eta} \right\}. \tag{3}$$

Nótese que $B \subset \limsup A_n$. Para probar el lema es suficiente probar que $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 0$. Para cada $y = p(k, j) \in V_n$ se tiene que $\frac{2\pi}{n}|j| = |\theta_j| \leq n^{\delta/2-1/2}$; entonces para n

suficientemente grande y determinístico,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_n] &= \mathbb{P}\left[\sup_{y \in V_n} \sup_{1 \leq i \leq \beta(y)+1} \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{j=1}^i X_{\alpha_j(y)} \right| > n^{-\eta}\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{y \in V_n} \sup_{1 \leq i \leq \beta(y)+1} \frac{2\pi}{n} \left| \sum_{j=1}^i X_{\alpha_j(y)} \right| > n^{-\eta}/2\right] \\ &\leq n^2 \mathbb{P}\left[\sup_{1 \leq i \leq \lfloor n(1-\epsilon) \rfloor + 1} \left| \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^i \varsigma_j \right| > n^{-\eta}/2\right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$= n^2 \mathbb{P}\left[\sup_{1 \leq i \leq \lfloor n(1-\epsilon) \rfloor + 1} \left| \sum_{j=1}^i \varsigma_j \right| > n^{1-\eta}/4\pi\right], \quad (5)$$

donde (4) sigue del hecho de que $|V_n| \leq n^2$ y de un argumento de dominación estocástica con una colección de variables aleatorias $\{\varsigma_j\}$ i.i.d con distribución Bernoulli $(1, -1)$ de parámetro $1/2$.

Sea $S_j = \sum_{k=1}^j \varsigma_k$; como $|S_j| \leq j$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sup_{1 \leq i \leq \lfloor n(1-\epsilon) \rfloor + 1} \left| \sum_{j=1}^i \varsigma_j \right| > n^{1-\eta}/4\pi\right] &\leq \sum_{k \geq \lfloor n^{1-\eta}/4\pi \rfloor}^n \mathbb{P}[|S_k| > n^{1-\eta}/4\pi] \\ &= \sum_{k \geq \lfloor n^{1-\eta}/4\pi \rfloor}^n \mathbb{P}\left[\frac{|S_k|}{\sqrt{n}} > n^{1/2-\eta}/4\pi\right]. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}\left[\frac{|S_k|}{\sqrt{n}} > n^{1/2-\eta}/4\pi\right] \leq 2 \exp\left\{-\frac{n^{1-2\eta}}{32\pi^2(1+n^{1/2-\eta}/4\pi\sqrt{k})}\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{n^{1-2\eta}}{64\pi^2}\right\}$ para n suficientemente grande y $k \geq \lfloor n^{1-\eta}/4\pi \rfloor$, entonces por (5) se sigue que:

$$\mathbb{P}(A_n) \leq 2n^3 \exp\left(-\frac{n^{1-2\eta}}{64\pi^2}\right) \quad (6)$$

Finalmente, de (6) y del Lema de Borel-Cantelli se concluye que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. \square

Corolario 3.2. *Sea $A_n := \left\{ \sup_{y \in V_n} \sup_{1 \leq i \leq \beta(y)+1} \frac{2\pi}{n} \left| j + \sum_{j=1}^i \varsigma_j \right| > n^{\delta-1/2} \right\}$; entonces $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.*

Para $n \in 2\mathbb{N}$, A_n es un homeomorfismo de $\mathcal{H}_{-n, -n\epsilon}$ a $\mathcal{H}_{-1, -\epsilon}$. Se necesita probar que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que si $n \geq N_0$ y $n \in 2\mathbb{N}$, entonces $\Gamma_n \in \mathcal{H}_{-n, -n\epsilon}$, i.e., Γ_n es un conjunto finito de funciones restringidas a $\mathbb{R} \times [-n, -n\epsilon]$. Supóngase por el momento que dicho N_0 existe; entonces $\Lambda_n(\Gamma_n) \in \mathcal{H}_{-1, -\epsilon}$, y se quiere encontrar la convergencia débil de la sucesión de grafos aleatorios $\Lambda_n(\Gamma_n)$. El siguiente lema prueba que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ con la propiedad anteriormente mencionada. Nótese que $|V_n| < \infty$, y si $n \geq N_0$, entonces $\Gamma_n \in \mathcal{H}_{-n, -n\epsilon}$.

Lema 3.3. *Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ y $n \in 2\mathbb{N}$, entonces para cada $y \in V_n$, γ_y es una función, y por tanto $\Gamma_n \in \mathcal{H}_{-n, -n\epsilon}$.*

Demostración. Sea $y \in V_n$, siendo γ_y es la trayectoria poligonal obtenida al interpolar linealmente los puntos $\alpha_0(y), \alpha_1(y), \dots, \alpha_\tau(y), (0, 0)$, restringida al conjunto $\mathbb{R} \times [-n, -n\epsilon]$, donde τ está definido en (1). Sea $\theta \in (-n^{\delta-1/2}, n^{\delta-1/2})$; por definición de τ , es suficiente mostrar que existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que si n es par, $n \geq N_0$ y $k \in \{n, n-1, \dots, \lfloor n\epsilon \rfloor\}$, entonces $k \cos(\beta) > (k-1) \cos(\beta \pm 2\pi/n)$, lo cual es equivalente a

$$k(\cos(\beta \pm 2\pi/n) - \cos(\beta)) < \cos(\beta \pm 2\pi/n). \tag{7}$$

Como $k|(\cos(\beta \pm 2\pi/n) - \cos(\beta))| \leq n|\sin(\gamma_n)|2\pi/n$, donde $\gamma_n \in (\beta - 2\pi/n, \beta + 2\pi/n)$, entonces $k|(\cos(\beta \pm 2\pi/n) - \cos(\beta))| < C|\gamma_n|$, con $C > 0$ una constante fija. Así,

$$k|(\cos(\beta \pm 2\pi/n) - \cos(\beta))| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad \text{y} \tag{8}$$

$$\cos(\beta \pm 2\pi/n) \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \tag{9}$$

Luego (8) y (9) implican (7). □

En adelante se supone que $n \geq N_0$ y n es par, donde N_0 es el mismo del lema anterior.

Para cada $y \in V_n$, se define $\xi_k^y = (|y| - k) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left(\theta_j + \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^k X_{\alpha_i(y)} \right), -\frac{1}{n} \right)$, donde $0 \leq k \leq |y| - (\lfloor n\epsilon \rfloor) + 1$. Sean $S_k^y = \sum_{j=1}^k X_{\alpha_j(y)}$ para $k = 0, 1, \dots, |y| - (\lfloor n\epsilon \rfloor) + 1$, ($S_0 \equiv 0$), $S_t^{n,y} = \frac{1}{n} S_{i-1}^y + \frac{(t-(i-1))}{n} X_{\alpha_i(y)}$; si $t \in [i-1, i]$ para $i = 1, \dots, |y| - (\lfloor n\epsilon \rfloor - 1)$, esto es, la interpolación lineal de los ángulos definidos por la trayectoria que comienza en y , sea

$$\tilde{\gamma}_y := (|y| - t) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left(\theta_j + 2\pi S_t^{n,y} \right), -\frac{1}{n} \right) \tag{10}$$

para $t \in [0, |y| - n\epsilon]$. Nótese que para $n \geq N_0$, $\tilde{\gamma}_z \in (\Pi_{-1,-\epsilon}, d_{-1,-\epsilon})$.

Definición 3.4. Para $(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ se define $\theta(x, t) := \tan^{-1}(x/|t|)$. Además, si $D_n := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0) : |\theta(x, t)| < n^{\delta-1/2} \text{ y } t \in [-n, -n\epsilon]\}$, entonces para cada $(x, t) \in D_n$ se definen $l(x, t) := (|(x, t)| \sin(\theta(x, t)), -|(x, t)|)$ y $E_n := \{l(x, t) : (x, t) \in D_n\}$. Finalmente, por simplicidad de notación se define $A_n(A) := \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{t}{n} \right) : (x, y) \in A \right\}$.

Sea ρ la métrica de Hausdorff inducida por los subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 . Para simplicidad en la notación, se hace la siguiente observación:

Observación 3.5. $\rho(A_n(D_n), A_n(E_n))$ converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, pues para cada $(x, t) \in D_n$, $\rho(A_n(\{(x, t)\}), A_n(\{l(x, t)\})) \leq \frac{|(x,t)|}{n} (1 - \cos(\theta(x, t))) \leq (1 - \cos(n^{\delta-1/2}))$. Por tanto, $\rho(A_n(A_n), A_n(B_n)) \leq 1 - \cos(n^{\delta-1/2})$.

Lema 3.6. Sea $\tilde{\Phi}^n := \{\tilde{\gamma}_y : y \in V_n\}$; entonces $\tilde{\Phi}^n$ pertenece a $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$ y $d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\Phi^n, \tilde{\Phi}^n)$ converge a 0 en probabilidad cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Sean $\eta > 0$ fijo y \mathcal{O}_ϵ^n el conjunto de trayectorias tales que $d_{-1,-\epsilon}(\tilde{\gamma}_y, A_n(\gamma_y)) > \eta$, ($\tilde{\gamma}_y \in \tilde{\Phi}^n$ y $A_n(\gamma_y) \in \Phi^n$). Sea A_n como en el Corolario 3.2. Entonces

$$\mathbb{P}[\mathcal{O}_\eta^n] = \mathbb{P}[\mathcal{O}_\eta^n \cap A_n] + \mathbb{P}[\mathcal{O}_\eta^n \cap A_n^c] \leq \mathbb{P}[A_n] + \mathbb{P}[\mathcal{O}_\eta^n \cap A_n^c]. \tag{11}$$

En la prueba del Corolario 3.2 se tiene que $\mathbb{P}[A_n]$ converge a 0 cuando n tiende a infinito. Supóngase que $\gamma_y \in A_n^c$. Entonces, si (x, t) es un punto de la gráfica de γ_y , se tiene que $(x, t) \in D_n$, y por tanto, de la observación 3.5 se tiene que $\rho(\tilde{\gamma}_y, A_n(\gamma_y)) \leq 1 - \cos(n^{\delta-1/2})$. Luego para n suficientemente grande, es claro que $\rho(\tilde{\gamma}_y, A_n(\gamma_y)) \leq \eta/2$, lo que implica que

$$\mathbb{P}[\mathcal{O}_\eta^n \cap A_n^c] = 0 \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.} \tag{12}$$

Por tanto, de (11) y (12) se sigue que $\mathbb{P}[\mathcal{O}_\eta^n]$ converge a 0, cuando n tiende a infinito. \square

Observación 3.7. Del Lema 3.6 se concluye que si existe una variable aleatoria Φ que toma sus valores en $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$ y tal que $\tilde{\Phi}^n$ converge débilmente a Φ cuando n tiende a infinito, entonces Φ^n converge débilmente a Φ cuando n tiende a infinito.

De los criterios de convergencia a la red browniana restringida, y mediante una transformación (homeomorfismo) T de $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$ en $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$ de tal forma que $T(\tilde{\Phi}^n)$ converja débilmente a $\tilde{W}_{-1,-\epsilon}$, se tendrá que $T(\Phi^n)$ también converge débilmente a $\tilde{W}_{-1,-\epsilon}$, y por tanto Φ^n converge débilmente a $T^{-1}(\tilde{W}_{-1,-\epsilon})$.

Lema 3.8. *La transformación*

$$T(K) := \left\{ \left(\frac{f}{2\pi|t|}, t_0 \right) : (f, t_0) \in K \right\} \tag{13}$$

de $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$ en $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$. es un homomorfismo.

Demostración. T está bien definida. En efecto, sea K un elemento de $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$. Se debe probar que $T(K)$ es un elemento de $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$, i.e., $T(K)$ es una colección de funciones compacta. Sea $\{(f_n, t_n)\}_{n \geq 1} \subset T(K)$; entonces existe una sucesión de funciones $\{(g_n, t_n)\}$ en K tal que $g_n(\cdot) = 2\pi|f_n(\cdot)|$ para $t \in [t_n, -\epsilon]$. Como $\{(g_n, t_n)\}_{n \geq 1} \subset K$ y K es compacto, entonces existe una subsucesión $\{(g_{n_k}, t_{n_k})\}_{k \geq 1}$ tal que (g_{n_k}, t_{n_k}) converge a (g, t_0) en $\Pi_{-1,-\epsilon}$ cuando $n \rightarrow \infty$, y como $\epsilon \in (0, 1)$ es fijo, se sigue que (f_{n_k}, t_{n_k}) converge a $\left(\frac{g(\cdot)}{2\pi|\cdot|}, t_0\right)$ en $\Pi_{-1,-\epsilon}$; así, $T(K)$ es un elemento de $\Pi_{-1,-\epsilon}$, luego la función T está bien definida.

La continuidad de T se prueba con argumentos similares, dado que $\epsilon \in (0, 1)$ y la región $\mathbb{R} \times [-1, -\epsilon]$ es acotada en el tiempo. Si se tiene una sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$ de elementos de $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$ tal que K_n converge a K en $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$, es fácil ver que $T(K_n)$ converge a $T(K)$ en $\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}$. También es claro que T es biyectiva, y la continuidad de T^{-1} se da por los mismos argumentos. \square

De (10) y (13) se obtiene

$$T(\{\tilde{\gamma}_y\}) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi} \sin(\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y}), -\frac{(|y| - nt)}{n} \right), \text{ para } t \in I_{n,y} = \left[0, \frac{1}{n}(|y| - n\epsilon) \right] \right\}.$$

Defínase $T[\{\tilde{\gamma}_y\}] := \chi^{n,y}$ y $\chi_n := \{\chi^{n,y} : z \in V_n\}$. Para cada $y \in V_n$, sea

$$\pi^{n,y} := \left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi} \theta_j + \sqrt{n} S_{nt}^{n,y}, -\frac{1}{n}(|y| - nt) \right)$$

para $t \in I_{n,y}$, y sea $\pi_n := \{\pi^{n,y} : y \in V_n\}$.

Lema 3.9. $d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\chi_n, \pi_n)$ converge a 0 en probabilidad, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Para $y \in V_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\chi^{n,y}, \pi^{n,y}) &= \sup_{t \in I_{n,y}} \left| \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \sin(\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y}) - \left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi} \theta_j + \sqrt{n} S_{nt}^{n,y} \right) \right| \\ &= \sup_{t \in I_{n,y}} \frac{\sqrt{n}}{2\pi} |\sin(\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y}) - (\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y})| \\ &\leq \sup_{t \in I_{n,y}} \frac{C_1 \sqrt{n}}{2\pi} (\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y})^2, \end{aligned} \tag{14}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que $|\sin(\theta) - \theta| \leq C_1 \theta^2$ para θ suficientemente pequeño. Luego, sea $\eta > 0$ fijo; entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\chi_n, \pi_n) > \eta] &\leq \mathbb{P} \left[\max_{y \in V_n} \sup_{t \in I_{n,y}} \frac{C_1 \sqrt{n}}{2\pi} (\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y})^2 > \eta \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\max_{y \in V_n} \sup_{t \in I_{n,y}} |\theta_j + 2\pi S_{nt}^{n,y}| > C_2 \frac{\sqrt{\eta}}{n^{1/4}} \right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Para cada $y \in V_n$, $|\theta_j| \leq n^{\delta/2-1/2}$; así, para n suficientemente grande, de (15) se obtiene:

$$\mathbb{P} [d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\chi_n, \pi_n) > \eta] \leq \mathbb{P} \left[\max_{y \in V_n} \sup_{t \in I_{n,y}} |2\pi S_{nt}^{n,y}| > C_2 \frac{\sqrt{\eta}}{2n^{1/4}} \right]. \tag{16}$$

Por un argumento de dominación estocástica, y dado que $|V_n| < n^2$, se obtiene

$$\mathbb{P} [d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\chi_n, \pi_n) > \eta] \leq n^2 \mathbb{P} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \varsigma_i \right| > C_3 \eta^{1/2} n^{3/4} \right], \tag{17}$$

donde $\{\varsigma_i\}_{i \geq 1}$ es una colección de variables aleatorias i.i.d con distribución de Bernoulli $(-1, 1, 1/2)$ y C_i es una constante para $i = 1, 2, 3$. Luego de (3), (6) y (17), concluimos que $\mathbb{P} [d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\chi_n, \pi_n) > \eta]$ converge a 0 cuando n tiende a infinito.

☑

Para $y \in V_n$ se tiene que $\theta_j = \frac{4\pi j}{n}$ para algún $j \in \mathbb{Z}$ y $|\theta_j| \leq n^{\delta/2-1/2}$; por tanto, $|j| \leq \left\lfloor \frac{n^{\delta/2+1/2}}{4\pi} \right\rfloor$. Nótese que $\{\pi_n\}_{n \geq N_0}$ define un sistema de trayectorias aleatorias, obtenidas por interpolación lineal de puntos determinados por paseos aleatorios simples simétricos coalescentes en una escala difusiva, que comienzan en la caja $\left[-\left\lfloor \frac{n^{\delta/2+1/2}}{4\pi} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n^{\delta/2+1/2}}{4\pi} \right\rfloor \right] \times [-1, -\epsilon]$.

Teorema 3.10. π_n converge débilmente a $\bar{W}_{-1,-\epsilon}$.

Demostración. La condición I del Teorema 3 es consecuencia de que la caja $\left[-\left\lfloor \frac{n^{\delta/2+1/2}}{2\pi} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n^{\delta/2+1/2}}{2\pi} \right\rfloor \right] \times [-1, -\epsilon]$ converge a $\mathbb{R} \times [-1, -\epsilon]$ cuando n tiende a infinito y del Teorema de Donsker. Las condiciones (B_1) y (B_2) se siguen del la prueba del Teorema 7.1 de la página 39 en [8].

☑

Los resultados anteriores permiten ahora probar el Teorema 2.12, el cual es el objetivo principal de este artículo.

Del Lema 3.9 se puede concluir que $d_{\mathcal{H}_{-1,-\epsilon}}(\chi_n, \pi_n)$ converge a 0 en probabilidad cuando n tiende a infinito. Así, del Teorema 3.10 se sigue que χ_n converge débilmente a $\bar{W}_{-1,-\epsilon}$. Como $\chi_n = T(\tilde{\Phi}^n)$ y por el Lema 3.8, se tiene que $\tilde{\Phi}^n$ converge débilmente a $T^{-1}(\bar{W}_{-1,-\epsilon})$, y finalmente del Lema 3.6 se sigue el resultado.

Agradecimientos

Los resultados contenidos en este artículo hacen parte del trabajo desarrollado en el proyecto de investigación “Convergencia débil de una familia de grafos aleatorios de Poisson”, financiado por el comité de investigación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia (CODI).

Referencias

- [1] Arratia R., “Coalescing Brownian motions and the voter model on \mathbb{Z} ”, Unpublished partial manuscript (circa 1981).
- [2] Baccelli F. and Bordenave C., “The radial spanning tree of a Poisson point process”, *Ann. Appl. Probab.* 17 (2007), No. 1, 305–359.
- [3] Coletti C.F, Fontes L.R.G. and Dias E.S., “Scaling limit for a drainage network model”, *J. Appl. Probab.* 46 (2009), No. 4, 1184–1197.
- [4] Coletti C. and Valencia L.A., “The Radial Brownian Web”, arxiv.org/abs/1310.6929v1 (2013).
- [5] Coletti C. and Valle G., “Convergence to the Brownian Web for a generalization of the drainage network model”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 50 (2014), No. 3, 899–919.
- [6] Estrin D., Govindan R. and Heidemann J., “Next Century Challenges: Scalable Coordination in Sensor Networks”, Proceedings of ACM Mobicom, Seattle, USA, 263–270, 1999.
- [7] Ferrari P.A., Fontes L.R.G. and Wu X.Y., “Two-dimensional Poisson trees converge to the Brownian web”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 41 (2005), No. 5, 851–858.
- [8] Fontes L.R.G., Isopi M., Newman C.M. and Ravishankar K., “The Brownian web: characterization and convergence”, *Ann. Probab.* 32 (2004), No. 4, 2857–2883.
- [9] Fontes L.R.G., Valencia L.A. and Valle G., “Scaling limit of the radial Poissonian web”, *Electron. J. Probab.* 20 (2015), article 31, 1–40.
- [10] Newman C.M., Ravishankar K. and Sun R., “Convergence of coalescing nonsimple random walks to the Brownian web”, *Electron. J. Probab.* 10 (2005), No. 2, 21–60.
- [11] Tóth B. and Werner W., “The true self-repelling motion”, *Probab. Theory Related Fields* 111 (1998), No. 3, 375–452.
- [12] Valencia L.A., “A Teia Browniana Radial”, Thesis (Ph.D), IME-USP, São Paulo, 2012, 83 p.