**Revista Integración**
*Escuela de Matemáticas*
*Universidad Industrial de Santander*
*Vol. 26, No. 1, 2008, pág. 47–60*

# Una nota sobre la integración de una variable difusa aleatoria

Alexánder Reátiga Villamizar*

**Resumen.** El objetivo de este artículo es definir la integral difusa multívoca como una aplicación del Teorema de Negoita-Ralescu [7], [4]. Para definir la integral difusa multívoca, hacemos una revisión de los aspectos básicos de la Teoría de multifunciones.

**Abstract.** The aim of this paper is to define the multi-fuzzy integral as an application of the Negoita-Ralescu's Theorem [7], [4]. In order to define the multi-fuzzy integral, a review about the basic subjects related with the multi-functions theory is done.

## 1. Introducción

Dentro de lo que se conoce como modelación matemática, la modelación difusa tomó gran importancia en las últimas décadas, debido a su amplia gama de aplicaciones en la ciencia y la ingeniería, ya que permite modelar matemáticamente problemas de naturaleza no determinista, problemas que no podían ser modelados a través de técnicas y métodos basados en la Teoría clásica de conjuntos. La modelación difusa aparece con la introducción de la teoría de conjuntos difusos en el año 1965, con el manuscrito pionero de Zadeh [9], y por la misma época, comienza a desarrollarse el llamado *análisis multívoco*.

El *análisis difuso multívoco* nace en la década de los años ochenta del siglo XX con la introducción del concepto de variable difusa aleatoria, como respuesta a la necesidad de

**Palabras y frases claves:** Conjuntos difusos. Multifunciones. Variable difusa aleatoria, Teorema de Negoita-Ralescu.

**MSC2000:** Primaria: 26E50, 03E72. Secundaria: 28E10, 46S40.

* Maestría en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: areatiga@matematicas.uis.edu.co

desarrollar nuevas técnicas matemáticas para abordar problemas de naturaleza difusa o no determinística. Estas dos teorías, la *teoría de conjuntos difusos* y la *teoría del análisis multívoco*, se fueron aproximando entre sí, y es así como en la década de los años ochenta se originó la *teoría del análisis difuso multívoco*, en la cual se introdujo el concepto de variable difusa aleatoria.

El objetivo de este trabajo es presentar algunas ideas básicas de la integración de una variable difusa aleatoria, para lo cual daremos algunos preliminares, comenzando por la definición de un conjunto difuso y de niveles de un conjunto difuso. Seguidamente enunciaremos el llamado *Teorema de Negoita-Ralescu*, el cual será indispensable en la caracterización de la existencia de una variable difusa aleatoria. Previo a la definición de una variable difusa aleatoria, recordamos la definición de una multifunción, multifunción medible y algunas propiedades.

## 2. Preliminares

Iniciamos dando algunas definiciones básicas y estableciendo la notación que será usada a lo largo del trabajo.

Comenzamos definiendo los siguientes subconjuntos del espacio euclídeo $n$-dimensional $\mathbb{R}^n$:

$$K(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \neq \varnothing, A \text{ compacto}\}$$
$$KC(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \neq \varnothing, A \text{ compacto y convexo}\},$$

donde, como es sabido, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un compacto si y sólo si A es cerrado y acotado. Recordamos también que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si para todo $a_1, a_2 \in A$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, el punto $a = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$ es un punto de $A$. En este punto, recordamos un ejemplo de conjunto convexo dado por la *envoltura convexa* o *envolvente convexa de un conjunto* $A$ *de* $\mathbb{R}^n$. De hecho, dado un conjunto $A$ de $\mathbb{R}^n$, la envoltura convexa, denotada por $co\, A$, es definida como el conjunto

$$co\, A = \{a \in \mathbb{R}^n \mid a = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2; a_1, a_2 \in A, \lambda \in [0,1]\},$$

o de manera equivalente, como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen el conjunto $A$.

Observamos que los subconjuntos $K(\mathbb{R}^n)$ y $KC(\mathbb{R}^n)$ son cerrados bajo las operaciones usuales de suma de conjuntos y multiplicación de un escalar por un conjunto, con lo cual

$K(\mathbb{R}^n)$ y $KC(\mathbb{R}^n)$ son ejemplos de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

A continuación recordamos la definición de convergencia de Kuratowski en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

**Definición 2.1.** Sea $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

- Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto límite de $(A_p)$ si para toda bola con centro $x$ y radio $\epsilon$, $B(x;\epsilon)$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_p \cap B(x;\epsilon) \neq \varnothing$ para todo $p \geq p_0$.
- Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente de $(A_p)$ si para todo $p \in \mathbb{N}$ y para toda $B(x;\epsilon)$, existe $q \geq p$ tal que $A_q \cap B(x;\epsilon) \neq \varnothing$.
- $\liminf A_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es un punto límite de } A_p\}$.
- $\limsup A_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es un punto adherente de } A_p\}$.
- Si $\liminf A_p = \limsup A_p = A$, entonces decimos que $A$ es el límite (en el sentido de Kuratowski) de la suceción $(A_p)$ y, en este caso, escribimos $\lim A_p = A$ (o bien, $A_p \xrightarrow{K} A$).

**Ejemplo 2.2.** En $\mathbb{R}^2$, sea $r > 1$ un real fijo, y consideremos el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

y la familia

$$A_p = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 - \frac{1}{p} < x^2 + y^2 < r^2 + \frac{1}{p};\ p \in \mathbb{N}\right\}.$$

Es fácil verificar que $A$ es el límite en el sentido de Kuratowski de $(A_p)$.

### *2.1. Conjuntos difusos*

La noción de conjuntos difusos, introducida por Zadeh [9] en 1965, extiende la noción de conjunto clásico en el sentido de que la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto deja de ser una relación dicotómica, esto es, que para un subconjunto $A$ de un conjunto universal $X$, dado un elemento $x \in X$, tenemos apenas dos posibilidades, a saber, $x \in A$ ó $x \notin A$. Por ejemplo, sabemos que el número 9 pertenece al conjunto de los números impares y que el número 2 no pertenece al conjunto de los números impares. No obstante, podemos discordar en relación al hecho de si el número 10 pertenece o no al conjunto de los números naturales "pequeños". En este caso la respuesta no es objetiva. El grado de pertenencia dependerá del tipo de problema al cual estemos haciendo referencia. Ejemplos como este hacen parte de las innumerables situaciones en las cuales el significado de pertenencia no está definido, y por tanto no sabemos decir si un determinado elemento pertenece o no a un conjunto dado. La idea de Zadeh fue flexibilizar la pertenencia de elementos a los conjuntos, creando la noción de "grado de pertenencia", y así, un elemento puede pertenecer parcialmente a un conjunto dado. Volviendo al conjunto de números naturales "pequeños", podemos decir que el número 1 tiene un grado de pertenencia mayor que el grado de pertenencia del número 10. Para modelar matemáticamente un conjunto con estas características, Zadeh introdujo en concepto de *conjunto difuso* [9].

Un conjunto difuso $u$ sobre un conjunto no vacío $X$ es cualquier aplicación $u : X \to [0, 1]$. Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a la clase de todos los conjuntos difusos sobre $X$, es decir $\mathcal{F}(X) = \{u \mid u : X \to [0, 1]\}$, de modo que si $x \in X$ entonces $u(x)$ denota el grado de pertenencia del elemento $x$ al conjunto difuso $u$; así, $u(x) = 0$ significa no pertenencia, $0 < u(x) < 1$ significa pertenencia parcial y $u(x) = 1$ significa pertenencia total.

**Ejemplo 2.3.** Deseamos representar los puntos $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que están cercanos a la recta $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto difuso cuya relación de pertenencia $u$ es dada por $u(p) = 1/(1 + d(l, p))$, donde $l$ es la recta $y = mx + b$ y $d(l, p)$ es la distancia usual de la recta $l$ hasta el punto $p$. Entonces $u$ asigna el grado de pertenencia $u(p) = 1$ si el punto $p = (x, y)$ satisface la ecuación $y = mx + b$, es decir si el punto $p$ esta sobre la recta $l$, y a medida que el punto $p$ se aleja de la recta $l$, la medida de pertenencia $u(p)$ se acercará a cero.

Paralelamente a la definición de conjunto difuso está la definición de *nivel de un conjunto difuso*. Sea $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ un conjunto difuso y $\alpha \in [0, 1]$. Se define el $\alpha$-nivel de $u$ como el conjunto

$$L_\alpha u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\} \qquad (\alpha > 0)$$

y

$$L_0 u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}} \qquad \text{(soporte de } u\text{)}.$$

Volviendo al Ejemplo 2.3, donde $u(p)$ medía el valor de cercanía de un punto $p \in \mathbb{R}^2$ a la recta $y = mx + b$, se tiene por ejemplo que

$$L_{1/2} u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(l, (x, y)) \leq 1\}.$$

La familia de niveles $L_\alpha u$, $\alpha \in [0,1]$, de un conjunto difuso $u$, verifica las siguientes propiedades:

1. $L_0 u \supseteq L_\alpha u \supseteq L_\beta u$, para cualesquiera $\alpha, \beta$ tales que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

2. Si $\alpha_n \nearrow \alpha$, entonces $L_\alpha u = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u$ (i.e., la aplicación de nivel es continua a izquierda).

3. $u = v$ si y solo si $L_\alpha u = L_\beta u$ para todo $\alpha$, $\beta \in [0,1]$.

4. $L_\alpha u \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in [0,1]$ es equivalente a $u(x) = 1$ para algún $x \in X$. Cuando $u$ verifica esta condición, se dice que $u$ es normal.

5. La relación $u \subseteq v$, o equivalentemente $u(x) \leq v(x)$, para todo $x \in X$, se cumple si, y sólo si, $L_\alpha u \subseteq L_\alpha v$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

### 2.2. Teorema de Negoita-Ralescu

Dada una familia $(\mathcal{N}_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ de subconjuntos no vacíos de un conjunto $X$, es natural preguntarse si existe algún conjunto difuso $u : X \to [0,1]$ tal que $L_\alpha u = \mathcal{N}_\alpha$ para toda $\alpha$. El Teorema de representación de Negoita-Ralescu, da respuesta a esta pregunta.

**Teorema 2.4** (Negoita-Ralescu)**.** [7]. *Sean $X$ un conjunto y $(\mathcal{N}_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ una familia de subconjuntos de $X$ tales que:*

1. $\mathcal{N}_0 = X$;

2. *Si* $\alpha \leq \beta$, *entonces* $\mathcal{N}_\beta \subseteq \mathcal{N}_\alpha$;

3. *Si* $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$ *y* $\lim\limits_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$ *entonces* $\mathcal{N}_\alpha = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p}$.

*Entonces la función $u : X \to [0,1]$ definida por $u(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid x \in \mathcal{N}_\alpha\}$ tiene la propiedad de que $L_\alpha u = \mathcal{N}_\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.*

**Ejemplo 2.5.** Sean $X = [0,1]$ y $(\mathcal{N}_\alpha)_{\alpha\in[0,1]} = [\alpha, 1]$. Entonces:

i) $\mathcal{N}_0 = [0,1] = X$.

ii) Sea $\alpha \leq \beta$; entonces $[\beta, 1] \subseteq [\alpha, 1]$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_\beta \subseteq \mathcal{N}_\alpha$.

iii) Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \lim_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$, deducimos que $\mathcal{N}_\alpha \subseteq \mathcal{N}_{\alpha_p}$ para todo $p = 1, 2, 3, \ldots$; esto implica que $\mathcal{N}_\alpha \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p}$.

Ahora, sea $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p}$. Luego $x \in \mathcal{N}_{\alpha_p}$ para todo $p = 1, 2, 3, \ldots$

Supongamos que $x \notin \mathcal{N}_\alpha$; entonces $x < \alpha$, y como $\lim_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$, existe $\alpha_{p_0}$ tal que $x < \alpha_{p_0} < \alpha$, de donde concluimos que $x \notin \mathcal{N}_{\alpha_p}$, lo cual es una contradicción.

Así, $x \in \mathcal{N}_\alpha$, de modo que $\bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p} \subseteq \mathcal{N}_\alpha$, y en consecuencia

$$\mathcal{N}_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p}.$$

Entonces la función $u : X \to [0, 1]$ definida por

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid x \in \mathcal{N}_\alpha\}$$

tiene la propiedad de que $L_\alpha u = \mathcal{N}_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Una versión particular del Teorema 2.4 la da el siguiente Teorema [8]:

**Teorema 2.6.** [4]. *Sea $(\mathcal{N}_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que:*

1. $\mathcal{N}_\alpha \in \mathbb{R}^n$.
2. *Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathcal{N}_\beta \subseteq \mathcal{N}_\alpha$.*
3. *Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$ y $\lim_{p\to\infty} = \alpha$ entonces $\mathcal{N}_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p}$ (o, equivalentemente, $H(\mathcal{N}_{\alpha_p}, \mathcal{N}_\alpha) \to 0$ cuando $\alpha_p \nearrow \alpha$).*

*Entonces, la función $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definida por*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \notin \mathcal{N}_0, \\ \sup\{\alpha \mid x \in \mathcal{N}_\alpha\} & si \quad x \in \mathcal{N}_0, \end{cases} \tag{1}$$

*es tal que $L_\alpha u = \mathcal{N}_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, y $L_0 u = \overline{\bigcup_{\alpha>0} \mathcal{N}_\alpha} \subseteq \mathcal{N}_0$.*

Una de las razones que le dan importancia al Teorema 2.6 es que éste permite caracterizar la existencia de una variable difusa aleatoria, como se verá en la Sección 4.1.

# 3. Multifunciones

En esta parte del trabajo enunciamos algunos elementos básicos de la Teoría de Integración Multívoca para poder introducir la integración difusa multívoca.

**Definición 3.1.** Sean $X$ y $Y$ dos conjuntos no vacios cualesquiera. Entonces una multifunción de $X$ en $Y$ (también llamada una multiaplición de $X$ a $Y$), es una aplicación de la forma $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$ tal que $\Gamma(x) \neq \varnothing$, para todo $x \in X$.

**Definición 3.2.** Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida ([2]) y $\Gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Diremos que $\Gamma$ es medible si para todo conjunto cerrado $C$ de $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\Gamma^{\omega}(C) := \{x \in X \mid \Gamma(x) \cap C \neq \varnothing\} \in \mathcal{A}.$$

Observemos que, en el contexto clásico, una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, para todo conjunto cerrado $A$ de $\mathbb{R}^n$. Si hacemos $\overline{f}(x) = f(x)$, entonces $\overline{f} : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y, además

$$\begin{aligned} \overline{f}^{\omega}(A) &= \{x \in X \mid \overline{f}(x) \cap A \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \cap A \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in A\} \\ &= f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Así, $f$ es medible en el sentido corriente, si y sólo si $\overline{f}$ es medible en el sentido de la Definición 3.1.

**Ejemplo 3.3.** Sean $\Gamma, \Psi : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ multifunciones medibles. Entonces:

1. La aplicación $\Gamma_1(x) = \overline{\Gamma(x)}$, donde $\overline{\Gamma(x)}$ denota la clausura en la métrica usual de $\mathbb{R}^n$ del conjunto $\Gamma(x)$, es una multifunción medible.

2. La aplicación $\Gamma_2(x) = co\Gamma(x)$ es una multifunción medible. Recordemos que $co\Gamma(x)$ denota la envolvente convexa del conjunto $\Gamma(x)$.

## 3.1. Selecciones y medibilidad

Asociado al concepto de una multifunción $\Gamma$, está la noción de *selección* de $\Gamma$ y *selección medible* de $\Gamma$.

**Definición 3.4.** Sea $\Gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Se dice que $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una selección de $\Gamma$ si $f(x) \in \Gamma(x)$, para todo $x$ en $X$. Si además, la función $f$ es medible, diremos que $f$ es una selección medible de $\Gamma$.

La existencia de selecciones está garantizada por el axioma de elección. Sin embargo, un problema más difícil en general, es saber cuándo una multifunción admite selecciones medibles.

Respecto a este problema, puede probarse (ver por ejemplo [1], [5], [6]) que si $Y$ es un espacio métrico completo y separable ($\mathbb{R}^n$, por ejemplo) y $\Gamma : X \to (\mathcal{P})(Y)$ es una multiaplicación medible y a valores cerrados, entonces $\Gamma$ admite una selección medible. Este resultado es debido a Kuratowski [9]. Bajo las condiciones anteriores se prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes (ver [5]):

1. $\Gamma$ es medible;

2. Existe una sucesión $(f_n)$ de selecciones medibles de $\Gamma$ tal que

$$\Gamma(x) = \overline{\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}},$$

   para todo $x \in X$.

La siguiente definición de medibilidad, es en general más fuerte que la dada anteriormente.

**Definición 3.5.** Sea $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción y denotamos por $\mathcal{B}(Y)$ la $\sigma$-álgebra de Borel en $Y$ (ver [2]), $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$ la $\sigma$-álgebra generada en el espacio producto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(Y)$ y el gráfico de $\Gamma$ por

$$Gr\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \Gamma(x)\}.$$

Entonces diremos que $\Gamma$ es medible según Borel si $Gr\Gamma \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Si $Y$ es un espacio métrico completo y separable ($\mathbb{R}^n$ por ejemplo), entonces $\Gamma$ es medible según Borel implica que $\Gamma$ es medible. Si $\Gamma$ es a valores cerrados, entonces vale la implicación recíproca. Diremos que un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es completo si para todo $B \in \mathcal{A}$ para el cual $\mu(B) = 0$ y $A \subseteq B$ se cumple que $A \in \mathcal{A}$. Usando la definición de medible según Borel y la completitud de un espacio de medida, es posible obtener el siguiente resultado más general acerca de selecciones medibles (ver [5, 6]).

**Teorema 3.6.** *Sean $X$ un espacio de medida finita y completo e $Y$ un espacio métrico, completo y separable. Entonces toda aplicación $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$ es medible según Borel, admite una selección medible c.t.p.; es decir, existe una función $f : X \to Y$ que es medible y tal que $f(x) \in \Gamma(x)$ en c.t.p.*

**Ejemplo 3.7.** Considere $\mathbb{R}$ con la medida usual de Lebesgue, sea $A$ cualquier conjunto no medible de $\mathbb{R}$ y $\chi_A$ su función característica. Entonces la multifunción $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $\Gamma(x) = \{\chi_A(x)\}$ es no medible, dado que el conjunto $\Gamma^\omega(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \Gamma(x) \cap \{1\} \neq \varnothing\} = A$ es no medible.

En [5] y [6] pueden encontrarse otras caracterizaciones de la medibilidad de una multifunción $\Gamma$ de la forma $\Gamma : D \to K(\mathbb{R}^n)$, donde $D$ es cualquier dominio de $\mathbb{R}^n$.

## 4. Integración difusa multívoca

En adelante, sea $X$ un espacio de medida completo. Denotemos

$$L^1 := L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}^n \mid f \text{es integrable}\}.$$

**Definición 4.1.** Si $\Gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es una multifunción, diremos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una selección integrable de $\Gamma$ si $f \in L^1$ y $f(x) \in \Gamma(x)$ en c.t.p. Denotaremos por $S(\Gamma)$ al conjunto de todas las selecciones integrables de $\Gamma$.

**Definición 4.2.** Sea $\Gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Entonces la integral (en el sentido de Aumann) de $\Gamma$ se define como

$$\int \Gamma d\mu = \left\{ \int f d\mu \mid f \in S(\Gamma) \right\}.$$

Diremos además que $\Gamma$ es integrable cuando $\int \Gamma d\mu \neq \varnothing$. Se dice que $\Gamma$ es integralmente acotada si existe una función integrable $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\|\Gamma(x)\| \leq g(x)$, para todo $x \in X$. Aquí, $\|\Gamma(x)\|$ denota el diámetro del conjunto $\Gamma(x)$.

Es claro que si $\Gamma$ es una multifunción medible y cerrada (es decir a valores cerrados), entonces se tiene que $\Gamma$ es integralmente acotada si y sólo si $\|\Gamma\| \in L^1(X, \mathbb{R})$.

Con lo anterior ya podemos dar condiciones suficientes para la integrabilidad de una multifunción.

**Teorema 4.3.** *Si $\Gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es una multifunción medible según Borel e integralmente acotada, entonces $\Gamma$ es integrable.*

*Demostración.* Primero que todo, notemos que, por definición, $\Gamma$ es integrable si $\int \Gamma d\mu \neq \varnothing$, lo cual es equivalente a que $S(\Gamma) \neq \varnothing$. En otras palabras, se debe probar que $\Gamma$ admite al menos una selección integrable. En efecto, como $\Gamma$ es medible según Borel, entonces ella admite una selección medible $f$ en c.t.p. Es decir, $f$ es medible y $f(x) \in \Gamma(x)$ en c.t.p. Sin embargo, como $\Gamma$ es integralmente acotada entonces $f$ debe ser necesariamente integrable. Entonces, resulta que $f$ es una selección integrable de $\Gamma$, es decir $f \in S(\Gamma)$, lo cual implica que $\int \Gamma d\mu \neq \varnothing$. ☑

Para extender la idea de integral multívoca de Aumann al contexto difuso-multívoco se define de una forma adecuada la integral para una aplicación de la forma $F : X \to \mathcal{K}^n$, donde

$$\mathcal{K}^n = \{u : \mathbb{R}^n \to [0,1] \mid L_\alpha u \in K(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in [0,1]\}$$

es el espacio de los conjuntos difusos-compactos sobre $\mathbb{R}^n$.

Denotamos por $\mathcal{C}^n = \{u \in \mathcal{K}^n \mid L_\alpha u \in KC(\mathbb{R}^n)\}$ el espacio de los conjuntos difusos compactos y convexos sobre $\mathbb{R}^n$. Observamos aquí que cada elemento $u \in \mathcal{K}^n$ está únicamente determinado por su familia de niveles. Más claramente, si $u, v \in \mathcal{K}^n$, entonces $u = v$ es equivalente a decir que $L_\alpha u = L_\alpha v$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Finalmente, se menciona una versión del Teorema de la Convergencia Dominada en el contexto multívoco, el cual es fundamental en la definición de la integral difusa multívoca.

**Teorema 4.4.** *Sean* $\Gamma, \Gamma_k : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \ldots,$ *una sucesión de correspondencias medibles según Borel tales que, para cada* $x \in X$ *se tiene que* $\lim \Gamma_k(x) = \Gamma(x)$ *en c.t.p (en el sentido de Kuratowski), y además que cada* $\Gamma_k$ *es acotada por la misma función* $f \in L^1(X, \mathbb{R}^n)$. *Entonces* $\lim \int \Gamma_k d\mu = \int \Gamma d\mu$.

### 4.1. Integración de variables difusas aleatorias

En el contexto clásico de las probabilidades, una función medible $f : X \to \mathbb{R}^n$ es llamada una *variable aleatoria* (*random variable*), mientras que en el contexto multívoco, una multifunción medible $\Gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es llamada un *conjunto aleatorio* (*random set*). En el contexto difuso, una aplicación del tipo $F : X \to \mathcal{K}^n$ que sea medible es llamada una variable difusa aleatoria (*fuzzy random variable*).

**Definición 4.5.** Se dice que una aplicación $F : X \to \mathcal{K}^n$ es medible, si para cada $\alpha \in [0,1]$ la multiaplicación $F_\alpha : X \to K(\mathbb{R}^n)$ que cumple la condición $F_\alpha(x) = L_\alpha F(x)$ es medible.

En tal caso diremos que $F$ es una variable difusa aleatoria (v.d.a.). También diremos que $F$ es integralmente acotada si cada $F_\alpha$ lo es.

**Teorema 4.6.** *Sea $F : X \to \mathcal{K}^n$ una variable difusa aleatoria integralmente acotada. Entonces existe un único $u \in \mathcal{K}^n$ tal que:*

$$L_\alpha u = \{z \in \mathbb{R}^n \mid u(z) \geq \alpha\} = \int F_\alpha d\mu,$$

*para todo $\alpha \in [0,1]$.*

*Demostración.* La idea central es mostrar que la familia $\left(\int F_\alpha\right)_{\alpha\in[0,1]}$ verifica las hipótesis del Teorema de Representación de Negoita-Ralescu. Sea $\mathcal{N}_\alpha = \int F_\alpha d\mu, \alpha \in [0,1]$. Se debe demostrar que:

1. si $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathcal{N}_\beta \subseteq \mathcal{N}_\alpha$;

2. si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$ y $\lim\limits_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$ entonces $\mathcal{N}_\alpha = \bigcap \mathcal{N}_{\alpha_p}$.

La primera parte se obtiene de las propiedades de los conjuntos de nivel y de la integral multívoca. Veamos entonces la segunda parte. Como cada $F_\alpha$ es medible e integralmente acotada, entonces se tiene que $\mathcal{N}_\alpha \neq \varnothing$, para toda $\alpha$. Por otro lado, como cada $F_\alpha(x) = \{z \mid F(x)(z) \geq \alpha\}$ es un conjunto compacto para todo $x \in X$, entonces $\mathcal{N}_\alpha = \int F_\alpha d\mu$ es también compacto. Sea entonces la sucesión $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots, \lim \alpha_p = \alpha$. Debemos probar que: $\mathcal{N}_\alpha = \bigcap \mathcal{N}_{\alpha_p}$. Sea $x \in X$. Puesto que $F(x) \in \mathcal{K}^n$, entonces $F_{\alpha_p}, p = 1,2,3,\dots$, es una sucesión decreciente de compactos, la cual debe converger (en el sentido de Kuratowski) a su intersección. Es decir,

$$\lim F_{\alpha_p}(x) = \bigcap F_{\alpha_p}(x) = F_\alpha(x), \forall x \in X.$$

Luego, aplicando el Teorema de la convergencia dominada para integrales multívocas, tenemos que

$$\int F_{\alpha_p} d\mu \to \int F_\alpha d\mu$$

cuando $p \to \infty$. Como $(\int F_{\alpha_p} d\mu)_p$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, ella debe converger a su intersección, es decir,

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\alpha_p} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \int F_{\alpha_p} d\mu = \int F_\alpha d\mu = \mathcal{N}_\alpha.$$

Entonces la familia de conjuntos $(\int F_\alpha d\mu), \alpha \in [0,1]$ determina un único $u \in \mathcal{K}^n$ tal que

$$L_\alpha u = \left(\int F_\alpha d\mu\right) \quad \text{para cada} \quad \alpha \in [0,1].$$ ☑

**Definición 4.7.** Sea $F : X \to K^n$ una variable difusa aleatoria integralmente acotada. La integral difusa-multívoca de $F$ se define como el único elemento $u \in K^n$ tal que $L_\alpha u = (\int F_\alpha d\mu)$, para cada $\alpha \in [0,1]$. En otras palabras, definimos la integral difusa-multívoca de $F$ mediante su familia de niveles, de modo que $L_\alpha \int F d\mu = \int F_\alpha d\mu$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

A partir de las definiciones de suma y multiplicación por escalar en $\mathcal{K}^n$, se puede ver que la integral difusa-multívoca es lineal, en el sentido de que

$$L_\alpha \left( \int (F+G) d\mu \right) = L_\alpha \int F d\mu + L_\alpha \int G d\mu,$$

$$L_\alpha \int \lambda F d\mu = \lambda L_\alpha \int F d\mu.$$

**Teorema 4.8.** *Sea $F : X \to \mathcal{K}_c^n$ una variable difusa aleatoria integralmente acotada, donde $\mathcal{K}_c^n$ denota el espacio de los conjuntos difusos compactos sobre $\mathbb{R}^n$ con niveles continuos, es decir $\mathcal{K}_c^n = \{u \in \mathcal{K}^n \mid \alpha \mapsto L_\alpha u \quad \text{es continua}\}$. Entonces $\int F d\mu \in \mathcal{K}_c^n$.*

*Demostración.* Consideremos una sucesión $(\alpha_p) \subseteq [0,1]$ tal que $\alpha_p \to \alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Puesto que $F(x) \in \mathcal{K}_c^n$, podemos decir que $L_{\alpha_p} F(x) \to L_\alpha F(x)$ para todo $x \in X$ cuando $p \to \infty$. Entonces, para todo $x \in X$, tenemos que $F_{\alpha_p}(x) \to F_\alpha(x)$ cuando $p \to \infty$. Por otra parte, siendo $F$ integralmente acotada, y si $f \in L^1(X, \mathbb{R})$ es tal que si $z \in F_0(x)$, entonces $\|z\| \leq f(x)$. Por lo tanto se puede concluir que

$$\sup_{p \geq 1} \{\|z\| : z \in \Gamma_{\alpha_p}(x)\} \leq f(x).$$

Es decir, la sucesión de multifunciones $(F_{\alpha_p})$ es integralmente acotada por la misma función $f \in L^1(X, \mathbb{R})$. En consecuencia, por el Teorema de Convergencia Dominada para integrales multívocas, tenemos que $\int F_{\alpha_p} d\mu \to \int F_\alpha d\mu$. Es decir, $L_{\alpha_p} \int F d\mu \to L_\alpha \int F d\mu$ cuando $p \to \infty$ y por tanto $\int F d\mu \in \mathcal{K}_c^n$. ☑

El siguiente ejemplo de aplicación de la integración difusa-multívoca en un problema de carácter no determinístico es basado en un ejemplo encontrado en [8].

**Ejemplo 4.9.** Supóngase que en el juego de lanzar una moneda al aire se cuenta con la siguiente información:

1. Si sale cara (C), se perderán aproximadamente 10 pesos;

2. si sale sello (S), se ganará una cantidad muy superior a 100 pesos, pero no mucho mayor que 1000 pesos.

La pregunta es: ¿cuál es la expectativa para el próximo lanzamiento? Considerando la información dada, establecemos dos conjuntos difusos $u$ y $v \in \mathcal{K}^1$, los cuales son descritos por:

- el conjunto difuso $u$ que describe la cantidad "aproximadamente $-10$ pesos", y
- el conjunto difuso $v$ que describe la cantidad "muy superior a 100 pesos pero no mucho mayor que 1.000 pesos".

Podemos elegir, por ejemplo, las siguientes representaciones para $u$ y $v$:

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(x+10)^2}{4}, & \text{si} \quad x \in [-12,-8], \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [-12,-8]. \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x-630}{380}\right)^2, & \text{si} \quad x \in [250,1010], \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [250,1010]. \end{cases}$$

Ahora definamos la variable difusa aleatoria $F : X = \{C, S\} \to \mathcal{K}^1$ tal que $F(C) = u$ y $F(S) = v$. La expectativa difusa multívoca asociada a $F$ la calculamos mediante niveles, usando la relación $L_\alpha \int F d\mu = \int F_\alpha d\mu$, siendo $\mu$ la medida de probabilidad usual sobre $X$. Si calculamos el soporte de $\int F d\mu$, tenemos que $L_0 \int F d\mu = \int F_0 d\mu$, en donde $F_0$ es la multifunción

$$F_0(x) = L_0 F(x) \begin{cases} [-12,-8], & x = C, \\ [250,1010], & x = S. \end{cases} \tag{2}$$

Si $f$ es una selección de $F_0$, entonces

$$f(C) = x \in [-12,-8],\ f(S) = y \in [250,1010],$$

lo que implica que $\int f d\mu = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Así,

$$\int F_0 d\mu = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \mid x \in [-12,-8], y \in [250,1010] \right\} = [119,501],$$

es el soporte de $\int F d\mu$.

**Agradecimientos.** Este trabajo fue motivado por el seminario de discusión sobre conjuntos difusos realizado durante el año 2006-2007 en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, dirigido por el profesor Élder Jesús Villamizar Roa, razón por la cual agradezco a cada uno de los colegas de dicho seminario por las discusiones semanales.

## Referencias

[1] J.P. Aubin & H. Frankowska, *Set-valued Analysis.* Birkauser,(1990).

[2] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley & sons, New York, 1996.

[3] N. Cáseres, *Espacios y convergencia de conjuntos difusos.* Monografía, Licenciatura en Matemáticas, UIS, 2006.

[4] P. Diamond & P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications.* World Scientific Pub., Singapure, 1993.

[5] M. Kisielewics, *Differential inclusions and optimal control.* Kluwer, Warzawa, 1991.

[6] E. Klein & A. Thompson, *Theory of Correspondences.* Wiley, New York, 1984.

[7] M. Puri & Dan Ralescu, "Fuzzy Random Variables", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 114(1986), 409-422.

[8] Marko A. Rojas-Medar, *Análisis Fuzzy Multívoco,* Universidad de Estadual de Campinas-SP, Brasil. Depto. de Matemáticas Aplicada IMECC, 2003.

[9] Lofti Zadeh, "Fuzzy sets", *Information & Control*, 8 (1965), 338-353.

Alexánder Reátiga Villamizar
Maestría en Matemáticas
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
*e-mail*: areatiga@matematicas.uis.edu.co