Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 34, No. 2, 2016, pág. 139–146

DOI: http://dx.doi.org/10.18273/revint.v34n2-2016003

Sobre el segundo producto simétrico de continuos indescomponibles y encadenables

María de Jesús López*, Emanuel Ramírez Márquez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, México.

Resumen. Alejandro Illanes preguntó si el pseudoarco P tiene hiperespacio segundo producto simétrico $F_2(P)$ único, es decir: si X es un continuo para el cual existe un homeomorfismo $h : F_2(P) \to F_2(X)$, entonces, ¿es X homeomorfo al pseudoarco? En este trabajo probamos que si X es un continuo indescomponible y encadenable y Y es un continuo tal que $F_2(Y)$ es homeomorfo a $F_2(X)$, entonces Y es indescomponible.
Palabras clave: Continuo, encadenable, indescomponible, hiperespacios, segundo producto simétrico.
MSC2010: 54B20, 54E40, 54F15.

On the second symmetric product of indecomposable chainable continua

Abstract. Alejandro Illanes asked if the pseudoarc P has unique second symmetric product $F_2(P)$, this is, if X is a continuum such that there is a homeomorphism $h : F_2(P) \to F_2(X)$, then, is X homeomorphic to the pseudoarc? In this paper we show that if X is an indecomposable chainable continuum and Y is a continuum such that $F_2(Y)$ is homeomorphic to $F_2(X)$, then Y is indecomposable.
Keywords: Continuum, chainable, indecomposable, hyperspaces, second symmetric product.

1. Introducción

La Teoría de los Continuos, una de las grandes ramas de la topología, se encarga de estudiar las propiedades de los espacios métricos, compactos y conexos con más de un punto; a un espacio con estas características se lo llama *continuo*. Uno de los ejemplos más importantes en la teoría de los continuos es el continuo conocido como *pseudoarco*, es

*E-mail: mjlopez@fcfm.buap.mx
Recibido: 25 de mayo de 2016, Aceptado: 19 de octubre de 2016.
Para citar este artículo: M. de J. López, E. Ramírez Márquez, Sobre el segundo producto simétrico de continuos indescomponibles y encadenables, *Rev. Integr. Temas Mat.* 34 (2016), No. 2, 139–146.

decir, un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible (para consultar otras propiedades importantes del pseudoarco, vea [11]). Dado un continuo X se considera la colección de todos sus subconjuntos cerrados $\{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$, la cual se denota por 2^X, con la métrica de Hausdorff. Al espacio 2^X con esta métrica se lo llama el hiperespacio de los cerrados de X. Se conoce que el hiperespacio 2^X es compacto y conexo, es decir, también es un continuo. También se considera la colección $F_2(X) = \{\{x, y\} : x, y \in X\}$; nótese que $F_2(X) \subset 2^X$. Al hiperespacio $F_2(X)$ se lo llama el *segundo producto simétrico* de X.

Un continuo X tiene hiperespacio único $F_2(X)$ si para cualquier continuo Y tal que $F_2(X)$ es homeomorfo a $F_2(Y)$, se tiene que X es homeomorfo a Y. En los últimos 15 años la teoría de unicidad de hiperespacios ha tenido auge por muchos topólogos mexicanos, en relación con el n-ésimo producto simétrico de un continuo X, $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ (se pueden ver las referencias [1], [4], [6], [7], [8] o [10]).

Uno de los continuos más importantes en la teoría de los continuos y sus hiperespacios es el *pseudoarco*, que fue construido por R H Bing en 1948 (ver [3]). Este ejemplo tiene muchas propiedades interesantes, como se puede ver en [11]. Cabe mencionar que su descripción no es nada trivial; de hecho, en la literatura es referido por una de sus equivalencias, es decir, el pseudoarco es un *continuo en el plano, encadenable y hereditariamente indescomponible*. Este continuo lo vamos a denotar por P.

Uno de los problemas que planteó Alejandro Illanes en [9, Pregunta 45] es ver si el pseudoarco P tiene hiperespacio único $F_2(P)$. Intentando responder esta pregunta encontramos los siguientes resultados (algunos de ellos ya conocidos): Si X es un continuo indescomponible y encadenable y Y es un continuo tal que $F_2(Y)$ es homeomorfo a $F_2(X)$, entonces Y es indescomponible. En particular, si Y es un continuo tal que $F_2(Y)$ es homeomorfo a $F_2(P)$, entonces Y es indescomponible.

2. Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* de un continuo es un subespacio que también es un continuo. Un continuo es *no degenerado* si contiene más de un punto. Diremos que un continuo es *descomponible* si se puede representar como la unión de dos de sus subcontinuos propios; en otro caso diremos que es *indescomponible*. Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible. Dado un espacio métrico X y un subconjunto A de X, denotamos la cerradura y el interior de A en X, por $cl(A)$ y $int(A)$, respectivamente. El diámetro del conjunto A lo denotamos por diám(A).

Proposición 2.1. *Un continuo X es descomponible si y solo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Supongamos que existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Nótese que $X \setminus B$ es un subconjunto abierto de X, no vacío, y $X \setminus B \subseteq A$. Así, A tiene interior no vacío.

Recíprocamente, supongamos que existe un subcontinuo propio A de X con interior no vacío. Consideremos dos casos.

(i) Si $X \setminus A$ es conexo, entonces el conjunto $B = cl(X \setminus A)$ es un subcontinuo propio de X y $X = A \cup B$. Luego X es descomponible.

(ii) Si $X \setminus A$ no es conexo, entonces existen subconjuntos abiertos U y V en X ajenos tales que $X \setminus A = U \cup V$. Se sigue de [13, Lema 1.7.18] que los conjuntos $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X. Pongamos $B = A \cup U$ y $C = A \cup V$. Nótese que B y C son subcontinuos propios de X y $X = B \cup C$. De donde X es descomponible. ☑

Como una consecuencia de la Proposición 2.1 tenemos la siguiente caracterización, la cual es muy útil en nuestro trabajo.

Proposición 2.2. *Un continuo X es indescomponible si y solo si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

Dado un número real positivo ε, una *ε-función* entre continuos es una función continua $f : X \to Y$ tal que $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \varepsilon$, para cada $y \in f(X)$. Se dice que un continuo X es *encadenable* si para cada número positivo $\varepsilon > 0$ existe una ε-función de X sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Sean X y Y continuos, y denotemos por $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ la primera y la segunda proyección, respectivamente. Una prueba del resultado que sigue se puede ver en [2, Corolario 3].

Teorema 2.3. *Sean X y Y continuos encadenables. Si A y B son subcontinuos de $X \times Y$ tales que $\pi_1(A) = X$ y $\pi_2(B) = Y$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Dada una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \to Y$, se dice que f es *abierta* si, para cada subconjunto abierto U de X se tiene que $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y. La función f se llama *confluente* si para cada subcontinuo B de Y y cada componente K de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(K) = B$.

Dado un continuo X, al hiperespacio 2^X se le da una topología de la siguiente manera: consideremos una colección finita de subconjuntos $U_1, \dots, U_n$ de X y $n \in \mathbb{N}$; denotamos:

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Ahora, hagamos:

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto en } X,\ i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que $\mathcal{B}$ es una base para una topología para 2^X, la cual se conoce como *topología de Vietoris*. La demostración de este hecho se puede consultar en [14, Teorema 4.5]. Además, la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre 2^X coincide con la topología de Vietoris [15, Teorema (0.13)]. Dado que $F_2(X) \subset 2^X$, vamos a denotar los conjuntos abiertos de $F_2(X)$, como subespacio que hereda de la topología de Vietoris, por $\langle U, V \rangle_{F_2(X)}$, donde U y V son abiertos en X.

3. El resultado principal

Un continuo X es *semiindescomponible* si no existen subcontinuos propios A y B de X con $int(A) \neq \emptyset$ y $int(B) \neq \emptyset$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Nótese que todo continuo indescomponible es semiindescomponible; el recíproco no se cumple: por ejemplo, el cono sobre el conjunto de Cantor es un continuo descomponible y semiindescomponible.

Lema 3.1. *La propiedad de ser semiindescomponible es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X y Y continuos y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Supongamos que X es semiindescomponible y vamos a probar que Y es semiindescomponible. Para esto consideremos dos subcontinuos propios A y B de Y tales que $int(A) \neq \emptyset$ y $int(B) \neq \emptyset$. Se sigue que $h^{-1}(A)$ y $h^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X con interior no vacío. Por hipótesis, se tiene que $h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B) \neq \emptyset$. Luego $A \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, Y es semiindescomponible. ☑

Lema 3.2. *Sea X un continuo. Si el producto $X \times X$ es semiindescomponible, entonces X es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Consideremos puntos $p \in X \setminus A$ y $q \in X \setminus B$. Nótese que $p \neq q$. Como $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son subconjuntos abiertos de X, entonces existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $p \in U \subseteq cl(U) \subseteq X \setminus A$ y $q \in V \subseteq cl(V) \subseteq X \setminus B$. Nótese que $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$.

Consideremos el continuo $K = B \times B$. Nótese que $U \times U$ es un conjunto abierto en $X \times X$ no vacío contenido en K. De modo que $int(K) \neq \emptyset$. Por otro lado, consideremos los conjuntos compactos $cl(V) \times X$ y $X \times \{q\}$. Nótese que $(cl(V) \times X) \cap K = \emptyset$ y $(X \times \{q\}) \cap K = \emptyset$. Más aún, para cada $v \in cl(V)$ tenemos que $(v, q) \in (cl(V) \times X) \cap (X \times \{q\})$. Así, el conjunto definido por $H = (cl(V) \times X) \cup (X \times \{q\})$ es un continuo. Como $V \times V \subseteq H$, se tiene que $int(H) \neq \emptyset$. De modo que K y H son subcontinuos de $X \times X$, ajenos y con interior no vacío, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es indescomponible. ☑

Lema 3.3. *Si X es un continuo encadenable e indescomponible, entonces $X \times X$ es semiindescomponible.*

Demostración. Consideremos dos subcontinuos propios A y B de $X \times X$ tales que $int(A) \neq \emptyset$ y $int(B) \neq \emptyset$. Probaremos que $A \cap B \neq \emptyset$.

Para cada $i \in \{1, 2\}$, sea $\pi_i : X \times X \to X$ la función proyección. Se tiene que $\pi_1(A)$ y $\pi_2(B)$ son subcontinuos de X, $int(\pi_1(A)) \neq \emptyset$ y $int(\pi_2(B)) \neq \emptyset$. Como X es indescomponible por la Proposición 2.2, tenemos que $\pi_1(A) = X$ y $\pi_2(B) = X$. Ahora, como X es encadenable, se sigue del Teorema 2.3 que $A \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, $X \times X$ es semiindescomponible. ☑

En [16, Teorema 3.1], J. Prajs probó que si $P = (p_1, p_2, \ldots)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots)$ son sucesiones de números primos y Σ_P y Σ_Q son los correspondientes solenoides (para la definición de solenoide vea [14, pág. 21]), entonces $\Sigma_P \times \Sigma_Q$ es semiindescomponible si y solo si para cada número natural M existen $i, j > M$ tales que $p_i = p_j$. Se sigue del resultado de Prajs que el recíproco del Lema 3.3 es falso, ya que Σ_2 (el solenoide diádico) es un continuo indescomponible que no es encadenable y $\Sigma_2 \times \Sigma_2$ es semiindescomponible.

Teniendo en cuenta los Lemas 3.2 y 3.3, se obtiene el resultado que sigue.

Teorema 3.4. [5, Teorema 10] *Si X es un continuo encadenable, entonces X es indescomponible si y sólo si $X \times X$ es semiindescomponible.*

Proposición 3.5. *Sean X un continuo y $\varphi : X \times X \to F_2(X)$ la función definida por $\varphi((x, y)) = \{x, y\}$, para cada $(x, y) \in X \times X$. Se tiene que la función φ es continua, suprayectiva y abierta.*

Demostración. No es difícil convencerse de que φ es una función continua y suprayectiva. Veamos que φ es abierta. Para esto consideremos el subconjunto abierto $U \times V$ de $X \times X$, donde U y V son subconjuntos abiertos de X. Vamos a probar que $\varphi((U \times V))$ es un conjunto abierto en $F_2(X)$. Consideremos un punto $(x, y) \in U \times V$. Nótese que $x \in \{x, y\} \cap U$, $y \in \{x, y\} \cap V$ y $\{x, y\} \subseteq U \cup V$. Luego $\{x, y\} \in \langle U, V\rangle_{F_2(X)}$. Así, $\varphi(U \times V) \subseteq \langle U, V\rangle_{F_2(X)}$.

Ahora, sea un punto $\{x, y\} \in \langle U, V\rangle_{F_2(X)}$. Nótese que $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$, $\{x, y\} \cap V \neq \emptyset$ y $\{x, y\} \subseteq U \cup V$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in \{x, y\} \cap U$. Consideremos el caso cuando $x \notin V$. Dado que $\{x, y\} \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $y \in V$. Así, el punto $(x, y) \in U \times V$ y $\varphi((x, y)) = \{x, y\}$. Consideremos ahora el caso cuando $x \in V$. Como $\{x, y\} \subseteq U \cup V$, tenemos que $y \in U$, o bien $y \in V$. Si $y \in U$, entonces el punto $(y, x) \in U \times V$ y $\varphi((y, x)) = \{x, y\}$. Si $y \in V$, entonces el punto $(x, y) \in U \times V$ y $\varphi((x, y)) = \{x, y\}$. Luego $\varphi(U \times V) = \langle U, V\rangle_{F_2(X)}$.

Por lo tanto, φ es una función abierta. ☑

En el Teorema 13.14 de [14] se prueba que toda función abierta es una función confluente. Luego, usando la Proposición 3.5, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.6. *La función φ definida en la Proposición 3.5 es confluente.*

Observación 3.7. La función φ definida en la Proposición 3.5 es 2 a 1, es decir, la cardinalidad del conjunto $\varphi^{-1}(A)$ es a lo más 2, $\mid \varphi^{-1}(A) \mid \leqslant 2$, para cada $A \in F_2(X)$. De modo que si $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$, entonces el conjunto $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$ tiene dos componentes en el caso en que $\mathcal{B} \cap F_1(X) = \emptyset$. En otro caso, $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$ tiene sólo una componente.

Lema 3.8. *Sea X un continuo. Si $X \times X$ es semiindescomponible, entonces $F_2(X)$ es semiindescomponible.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subcontinuos propios de $F_2(X)$ tales que $int(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ e $int(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Consideremos la función $\varphi : X \times X \to F_2(X)$ definida por $\varphi((x, y)) = \{x, y\}$, para cada $(x, y) \in X \times X$. Por la Proposición 3.5 tenemos que $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$ y $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$ son subconjuntos compactos de $X \times X$. Por la Observación 3.7, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $\mathcal{A} \cap F_1(X) \neq \emptyset$, entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$ es un conjunto conexo.

Caso 2. Si $\mathcal{A} \cap F_1(X) = \emptyset$, entonces $\varphi_2^{-1}(\mathcal{A})$ tiene dos componentes.

Además, en cualquier caso se tiene que $int(\varphi^{-1}(\mathcal{A})) \neq \emptyset$. Consideremos un punto $A \in int(\mathcal{A})$ y una componente K de $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$. Por el Corolario 3.6 tenemos que φ es una función confluente, luego existe un punto $(x, y) \in K$ tal que $\varphi((x, y)) = A$. Más aún, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $X \times X$ tal que $(x, y) \in \mathcal{U} \subseteq K$. Consecuentemente, $int(K) \neq \emptyset$.

Por otro lado, consideremos una componente C de $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$. Con un argumento similar al anterior se prueba que $int(C) \neq \emptyset$.

Así, K y C son subcontinuos propios de $X \times X$ con interior no vacío. Del hecho de que $X \times X$ es semiindescomponible se sigue que $K \cap C \neq \emptyset$. Luego $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_2(X)$ es semiindescomponible. ☑

Lema 3.9. *Sea X un continuo. Si $F_2(X)$ es semiindescomponible, entonces X es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Vamos a probar que $F_2(X)$ no es semiindescomponible.

Obsérvese que $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son subconjuntos abiertos de X. Consideremos puntos $x \in X \setminus B$ y $y \in X \setminus A$. Luego existen subconjuntos abiertos, W y V, de X tales que $x \in W \subseteq cl(W) \subseteq X \setminus B$ y $y \in V \subseteq cl(V) \subseteq X \setminus A$. Nótese que $cl(W) \subseteq A$ y $cl(V) \subseteq B$.

Vamos a probar que los conjuntos $\langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$ y $\langle A\rangle_{F_2(X)}$ son continuos. Primero, no es difícil probar que el conjunto $\langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$ es cerrado en 2^X y, así, compacto.

Resta ver que $\langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$ es un conjunto conexo. Para esto consideremos dos puntos $\{p, q\}, \{r, s\} \in \langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$ y vamos a probar que existe un conjunto conexo contenido en $\langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$ que los contiene. Como $\{p, q\}, \{r, s\} \in \langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$, tenemos que $\{p, q\} \cap cl(V) \neq \emptyset$ y $\{r, s\} \cap cl(V) \neq \emptyset$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p, r \in cl(V)$. Nótese que $\{p, q\} \in \langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$ y $\{r, s\} \in \langle\{r\}, X\rangle_{F_2(X)}$. Probaremos que $\langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$ y $\langle\{r\}, X\rangle_{F_2(X)}$ son conjuntos conexos. Para esto consideremos la función $f : X \to \langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$ definida por $f(x) = \{p, x\}$, para cada $x \in X$. Vamos a probar que f es una función continua y suprayectiva. Sea $\langle\{p\}, U\rangle_{F_2(X)}$, con U abierto en X, un conjunto abierto básico contenido en $\langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$. Tenemos que $f^{-1}(\langle\{p\}, U\rangle_{F_2(X)}) = U$, el cual es un abierto en X. De modo que f es continua. Ahora, sea $\{p, a\} \in \langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$. Tenemos que $f(a) = \{p, a\}$. Luego f es suprayectiva. Así, $\langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$ es la imagen continua y suprayectiva de X, el cual es un conjunto conexo. Por lo tanto, $\langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)}$ es un conjunto conexo. Análogamente se prueba que $\langle\{r\}, X\rangle_{F_2(X)}$ es un conjunto conexo.

Dado que $\{p, r\} \in \langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)} \cap \langle\{r\}, X\rangle_{F_2(X)} \subseteq \langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$, tenemos que $\{p, q\}, \{r, s\} \in \langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)} \cup \langle\{r\}, X\rangle_{F_2(X)}$; además, $\langle\{p\}, X\rangle_{F_2(X)} \cup \langle\{r\}, X\rangle_{F_2(X)}$ es un conjunto conexo y, así, un continuo.

Nótese que $\langle V, X\rangle_{F_2(X)} \subseteq \langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$. Luego $int(\langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}) \neq \emptyset$.

Ahora, $\langle A\rangle_{F_2(X)} = \{\{x,y\} \in 2^X : \{x,y\} \subseteq A\} = F_2(A)$, el cual es un continuo. Dado que $\langle W\rangle_{F_2(X)} \subseteq \langle A\rangle_{F_2(X)}$, tenemos que $int(\langle A\rangle_{F_2(X)}) \neq \emptyset$.

Así, tenemos que $\langle A\rangle_{F_2(X)}$ y $\langle cl(V), X\rangle_{F_2(X)}$ son dos subcontinuos propios de $F_2(X)$ con interior no vacío. Consecuentemente, $F_2(X)$ no es semiindescomponible. ☑

Se sigue de los Lemas 3.3, 3.8 y 3.9 el resultado que sigue.

Teorema 3.10. [12, Teorema 16] *Si X es un continuo encadenable, entonces X es indescomponible si y solo si $F_2(X)$ es semiindescomponible.*

Teorema 3.11. *Sea X un continuo indescomponible y encadenable. Si Y es un continuo tal que $F_2(Y)$ es homeomorfo a $F_2(X)$, entonces Y es indescomponible.*

Demostración. Por el Teorema 3.10 tenemos que $F_2(X)$ es semiindescomponible. Ahora, dado que $F_2(X)$ es homeomorfo a $F_2(Y)$, por el Lema 3.1 se obtiene que $F_2(Y)$ es semiindescomponible. Luego se sigue, del Lema 3.9, que Y es indescomponible. ☑

Corolario 3.12. *Si P es el pseudoarco y Y es un continuo tal que existe un homeomorfismo entre $F_2(P)$ y $F_2(Y)$, entonces Y es indescomponible.*

Agradecimientos

Los autores agradecen los comentarios y discusiones de J. M. Martínez Montejano hechos al trabajo.

Referencias

[1] Acosta G., Hernández-Gutiérrez R. and Martínez-de-la-Vega V., "Dendrites and symmetric products", *Glas. Math. Ser. III* 44 (2009) No. 1, 195–210.

[2] Bellamy D.P. and Lysko J.M., "Factorwise rigidity of the product of two pseudo-arcs", *Topology Proc.* 8 (1983), No. 1, 21–27.

[3] Bing R.H., "A homogeneous indescomposable plane continuum", *Duke Math. J.* 15 (1948), 729–742.

[4] Castañeda E. and Illanes A., "Finite graphs have unique symmetric products", *Topology Appl.* 153 (2006), No. 9, 1434–1450.

[5] Hagopian C.L., "Mutual aposyndesis", *Proc. Amer. Math. Soc.* 23 (1969), 615–622.

[6] Hernández-Gutiérrez R. and Martínez-de-la-Vega V., "Rigidity of symmetric products", *Topology Appl.* 160 (2013), No. 13, 1577–1587.

[7] Herrera-Carrasco D., López M. de J. and Macías-Romero F., "Dendrites with unique symmetric products", *Topology Proc.* 34 (2009), 175–190.

[8] Illanes A., "Dendrites with unique hyperspace $F_2(X)$", *JP J. Geom. Topol.* 2 (2002), No. 1, 75–96.

[9] Illanes A., "Uniqueness of hyperspaces", *Questions Answers Gen. Topology* 30 (2012), No. 1, 21–44.

[10] Illanes A. and Martínez-Montejano J.M., "Compactifications of $[0, \infty)$, with unique hyperspace $F_n(X)$", *Glas. Mat. Ser. III* 44 (2009), No. 2, 457–478.

[11] Lewis W., "The pseudo-arc", *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)* 5 (1999), No. 1, 25–77.

[12] Macías S., "Aposyndetic properties of symmetric products of continua", *Topology Proc.* 22 (1997), Spring, 281–296.

[13] Macías S., *Topics on continua*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[14] Nadler S.B., Jr., *Continuum theory: An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[15] Nadler S.B., Jr., *Hyperespaces of sets. A text with research questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 49, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1978.

[16] Prajs J.R., "Mutual aposyndesis and products of solenoids", *Topology Proc.* 32 (2008), Spring, 339–349.