Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 20, Nos. 1 y 2, 2002, pág. 1–12

Sobre el funtor de funcionales inexpandibles

JAVIER CAMARGO GARCÍA*

Resumen. Se introduce un funtor de funcionales inexpandibles y se demuestra que es débilmente normal e induce una mónada.

Abstract. It is introduced a functor of non-expanding functionals, and it is shown that this functor is weakly normal and generates a monad.

1. Introducción

Muchas construcciones de topología general tienen propiedades funtoriales, es decir, estas construcciones se pueden definir tanto para espacios, como para funciones continuas.

En los años cincuenta y sesenta se realizaron muchas investigaciones sobre propiedades topológicas de funtores como productos, hiperespacios, medidas probabilísticas, hiperespacios de inclusión y otras [1]. La teoría general de funtores en la categoría de los espacios compactos de Hausdorff *Comp* se inicia con la noción de funtor normal introducido por Schepin, la cual estudia algunas propiedades básicas topológicas como continuidad, preservación de peso, imágenes recíprocas, etc. [2]. Estas propiedades se consideran generalmente en las categorías *Comp* de espacios compactos de Hausdorff y *Tych* de espacios de Tíjonov.

Por otra parte se realizaron muchas investigaciones sobre aspectos algebraicos de funtores [1, 3]; estos aspectos están basados en la noción de mónada introducida por Eilenberg y Moore [4].

A continuación mostraremos un funtor que cumple muchas de las propiedades anteriormente mencionadas y se clasifica como un funtor débilmente normal, y que además genera una mónada, motivo por el cual permite realizar un estudio algebraico propuesto en [5] y [6].

Palabras y frases claves: funcionales inexpandibles, mónada, functor normal.
Keywords: non-expanding functional, monad, normal functor.
MSC2000: Primaria: 46M15. Secundaria: 18A22.
* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, jecamar@uis.edu.co.

2. El funtor E

Por *Comp* denotaremos la categoría de los espacios compactos de Hausdorff y las funciones continuas. Sea $X \in |Comp|$. Denotaremos $C(X)$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas $\phi : X \to \mathbb{R}$ con la norma usual

$$\|\phi\| = \sup_{x\in X} |\phi(x)| .$$

Dado los espacios métricos (X,d) y (Y,d'), una aplicación $f : X \to Y$ la llamaremos inexpandible si para cada par $x_1,\ x_2 \in X$ se tiene: $d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1,x_2)$. En adelante llamaremos funcionales a los puntos que están en $\mathbb{R}^{C(X)}$, es decir, las aplicaciones (no necesariamente continuas) $\upsilon : C(X) \to \mathbb{R}$.

Lema 2.1. *Sea $L \subset C(X)$ tal que $\{c_X : c \in \mathbb{R}\} \subset L$. Si $\upsilon : L \to \mathbb{R}$ es inexpandible y para cada $c \in \mathbb{R}$, $\upsilon(c_X) = c$, entonces existe $\upsilon' : C(X) \to \mathbb{R}$ inexpandible y tal que $\upsilon'\big|_L = \upsilon$.*

Demostración. Sean $L \subset C(X)$ tal que $\{c_X : c \in \mathbb{R}\} \subset L$ y $\upsilon : L \to \mathbb{R}$ inexpandible y tal que para cada $c \in \mathbb{R}$, $\upsilon(c_X) = c$. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \left\{(B,\mu) : L \subset B \subset C(X),\ \mu : B \to \mathbb{R} \text{ inexpandible y } \mu\big|_L = \upsilon\right\};$$

definimos un orden en $\mathcal{F}$ de la siguiente forma:

$$(B,\mu) \leq (B',\mu') \Leftrightarrow B \subset B', \quad \text{y} \quad \mu'\big|_B = \mu.$$

Si $\{(B_k,\mu_k)\}_{k\in I}$ es una cadena de elementos de $\mathcal{F}$, entonces tomando $\mu : \bigcup_{i\in I_1} B_k \to \mathbb{R}$ definida como

$$\mu(\varphi) = \mu_k(\varphi), \quad \text{si} \quad \varphi \in B_k,$$

se tiene que $L \subset \bigcup_{k\in I} B_k \subset C(X)$, $\mu\big|_L = \upsilon$ y $(B_k,\mu_k) \leq \left(\bigcup_{k\in I} B_k, \mu\right)$ para cada $k \in I$, de lo cual resulta que $\left(\bigcup_{k\in I} B_k, \mu\right)$ es una cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn existe un $(B_0,\mu_0) \in \mathcal{F}$ maximal.

Supongamos que $B_0 \neq C(X)$. Existe entonces $\varphi \in C(X) - B_0$; definamos además

$$D = B_0 \cup \{\varphi\}.$$

Sean $\psi_1,\psi_2 \in B_0$; supongamos que

$$\begin{aligned}&[\mu_0(\psi_1) - \|\psi_1 - \varphi\|\ ,\ \mu_0(\psi_1) + \|\psi_1 - \varphi\|] \cap \\ &\qquad \cap [\mu_0(\psi_2) - \|\psi_2 - \varphi\|\ ,\ \mu_0(\psi_2) + \|\psi_2 - \varphi\|] = \phi.\end{aligned}$$

Entonces se tienen dos casos, de los cuales analizaremos uno:

$$\mu_0(\psi_1) + \|\psi_1 - \varphi\| < \mu_0(\psi_2) - \|\psi_2 - \varphi\| .$$

Entonces

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq \|\psi_1 - \varphi\| + \|\psi_2 - \varphi\| < |\mu_0(\psi_1) - \mu_0(\psi_2)| \leq \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

con lo que se presenta una contradicción. De la misma forma se obtiene una contradicción si $\mu_0(\psi_2)+\|\psi_2 - \varphi\| < \mu_0(\psi_1)-\|\psi_1 - \varphi\|$; por lo tanto se concluye que

$$[\mu_0(\psi_1) - \|\psi_1 - \varphi\|, \mu_0(\psi_1) + \|\psi_1 - \varphi\|] \cap [\mu_0(\psi_2) - \|\psi_2 - \varphi\|, \mu_0(\psi_2) + \|\psi_2 - \varphi\|] \neq \phi$$

para cada $\psi_1, \psi_2 \in B_0$. En consecuencia, se puede decir que

$$\bigcap_{\psi \in B_0} [\mu_0(\psi) - \|\psi - \varphi\|, \mu_0(\psi) + \|\psi - \varphi\|] \neq \phi.$$

Para cada $a \in \bigcap_{\psi \in B_0} [\mu_0(\psi) - \|\psi - \varphi\|, \mu_0(\psi) + \|\psi - \varphi\|]$ definimos el funcional

$$\nu_a(\psi) = \begin{cases} \mu_0(\psi) & \text{si } \psi \in B_0, \\ a & \text{si } \psi = \varphi. \end{cases}$$

Claramente ν_a está bien definida, luego nos resta probar que ν_a es inexpandible.

Sean $\psi_1, \psi_2 \in D$. Si $\psi_1, \psi_2 \in B_0$, entonces

$$|\nu_a(\psi_1) - \nu_a(\psi_2)| = \|\mu_0(\psi_1) - \mu_0(\psi_2)\| \leq \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Supongamos que $\psi_1 \in B_0$ y $\psi_2 \notin B_0$. Entonces

$$|\nu_a(\psi_1) - \nu_a(\varphi)| = |\mu_0(\psi_1) - a|,$$

y tenemos que

$$\mu_0(\psi_1) - \|\psi_1 - \varphi\| \leq a \leq \mu_0(\psi_1) + \|\psi_1 - \varphi\|,$$

y por lo tanto

$$-\|\psi_1 - \varphi\| \leq a - \mu_0(\psi_1) \leq \|\psi_1 - \varphi\|.$$

De lo anterior deducimos que $|\mu_0(\psi_1) - a| \leq \|\psi_1 - \varphi\|$. En conclusión, ν es inexpandible, con lo que se obtiene que (B_0, μ_0) no es maximal, lo cual es contradictorio. Luego $B_0 = C(X)$. ☑

Para cada $X \in |Comp|$ definimos

$$EX = \{\upsilon : C(X) \to \mathbb{R} : \upsilon(c_X) = c, \forall c \in \mathbb{R} \text{ y } \upsilon \text{ inexpandible}\}.$$

Claramente $EX \subset \mathbb{R}^{C(X)}$, luego los abiertos básicos de EX son de la forma

$$(\upsilon; \varphi_1, \cdots, \varphi_n; \varepsilon) = \left\{\nu \in \mathbb{R}^{C(X)} : |\upsilon(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}\right\},$$

donde $\upsilon \in \mathbb{R}^{C(X)}$, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C(X)$, $\varepsilon > 0$.

Teorema 2.2. *Si $X \in |Comp|$, entonces $EX \in |Comp|$.*

Demostración. Como $EX \subset \mathbb{R}^{C(X)}$ y $\mathbb{R}^{C(X)}$ es de Hausdorff, entonces EX es también de Hausdorff, luego tenemos que probar que EX es compacto. Fácilmente se verifica que $EX \subset \prod_{\varphi \in C(X)} [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$, por lo que nos resta probar que EX es subconjunto cerrado de $P = \prod_{\varphi \in C(X)} [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$.

Sea $\mu \in P - EX$; luego μ no debe cumplir una de las dos condiciones para estar en EX. Supongamos primero que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(c_X) \neq c$; entonces tomemos $\varepsilon = |\mu(c_X) - c|$, y consideremos el abierto $\left(\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Si $\mu' \in \left(\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, entonces $|\mu'(c_X) - \mu(c_X)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí,

$$|\mu(c_X) - c| - |\mu'(c_X) - c| \leq |\mu'(c_X) - \mu(c_X)| < \frac{|\mu(c_X) - c|}{2},$$

$$0 < \frac{|\mu(c_X) - c|}{2} < |\mu'(c_X) - c|.$$

Por lo tanto, para cada $\mu' \in \left(\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\mu' \notin EX$; entonces $\left(\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset P - EX$, luego μ es punto interior de $P - EX$.

Ahora supongamos que existen $\psi_1, \psi_2 \in C(X)$, tales que $|\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2)| > \|\psi_1 - \psi_2\|$; tomemos

$$\varepsilon = |\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2)| - \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

y el abierto $\left(\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Si $\mu' \in \left(\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3}\right)$, entonces

$$|\mu'(\psi_1) - \mu(\psi_1)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{y} \quad |\mu'(\psi_2) - \mu(\psi_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} |\mu'(\psi_1) - \mu'(\psi_2)| &= |(\mu(\psi_2) - \mu'(\psi_2)) - (\mu(\psi_1) - \mu'(\psi_1)) + (\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2))| \\ &\geq |\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2)| - |\mu(\psi_2) - \mu'(\psi_2)| - |\mu(\psi_1) - \mu'(\psi_1)| \\ &> \|\psi_1 - \psi_2\| + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

por lo que concluimos que si $\mu' \in \left(\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\mu' \notin EX$; por lo tanto $\left(\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3}\right) \subset P - EX$. En los dos casos tenemos a μ como punto interior de $P - EX$, luego obtenemos que EX es compacto. ☑

Consideremos $X, Y \in |Comp|$ y el morfismo $f : X \to Y$. Definimos $Ef : EX \to EY$ mediante la fórmula

$$(Ef)(\upsilon)(\varphi) = \upsilon(\varphi \circ f), \text{ donde } \upsilon \in EX \quad \text{y} \quad \varphi \in C(Y).$$

De manera inmediata se prueba que Ef es continua, y posteriormente que E es un endofuntor en la categoría *Comp*.

3. E como funtor débilmente normal

Sea F : *Comp* $\rightarrow$ *Comp* un funtor covariante. Un funtor F es *monomórfico* (*epimórfico*), si preserva monomorfismos (epimorfismos). Si F es un funtor monomórfico, en adelante para cada $X \in |Comp|$ y A subconjunto cerrado de X, identificaremos a FA y $Fi\,(FA)$ como subconjuntos de FX, donde i es la inmersión natural $i : A \rightarrow X$.

Se dice que el funtor monomórfico F preserva preimágenes, si para cada función continua $f : X \rightarrow Y$ y $A \subset Y$ cerrado se tiene $(Ff)^{-1}(FA) = F(f^{-1}(A))$.

Se dice que el funtor monomórfico F *preserva intersecciones* si para cada familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subconjuntos cerrados de X se tiene

$$\bigcap_{\alpha \in A} F\,(X_\alpha) = F\left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right).$$

El funtor F es llamado *continuo* si preserva límites de sistemas inversos, es decir, si $S = \left\{X_\alpha, p^\alpha_\beta, A\right\}$ es un sistema inverso sobre el conjunto dirigido A, tenemos que

$$F\underleftarrow{\lim} S = \underleftarrow{\lim} FS,$$

donde $FS = \left\{FX_\alpha, Fp^\alpha_\beta, A\right\}$.

Finalmente un funtor F *preserva peso* si para cada espacio infinito $X \in |Comp|$ se tiene $w(X) = w(FX)$.

Un funtor F es llamado *normal* si es continuo, monomórfico, epimórfico, preserva peso, intersecciones, preimágenes, el espacio unitario y el espacio vacío; se dice que F es *débilmente normal* si satisface las propiedades de funtor normal, con excepción de la propiedad de preservar preimágenes.

Los funtores exp, $\mathbf{P}$ son normales [1].

Es obvio que E preserva los espacios unitario y vacío.

Proposición 3.1. *E es funtor monomórfico.*

Demostración. Sea $j : X \rightarrow Y$ un monomorfismo. Hay que probar que $Ej : EX \rightarrow EY$ es también monomorfismo. Sean μ_1, μ_2 dos diferentes funcionales en EX; entonces existe $\varphi \in C(X)$ tal que $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$. Como j es monomorfismo y jX es subconjunto cerrado de un espacio normal Y, existe $\psi \in C(Y)$ tal que $\psi \circ j = \varphi$, por lo que se tiene que $\mu_1(\psi \circ j) \neq \mu_2(\psi \circ j)$, luego $(Ej)(\mu_1)(\psi) \neq (Ej)(\mu_2)(\psi)$. Con lo que concluimos que E es monomórfico. ☑

Proposición 3.2. *E es funtor epimórfico.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ un epimorfismo y $\upsilon \in EY$. Definimos

$$C = \{\psi \circ f : \psi \in C(Y)\}.$$

Se ve claramente que $C \subset C(X)$. Además, $\{c_X : c \in \mathbb{R}\} \subset C$. Definamos también un funcional $\upsilon' : C \to \mathbb{R}$ de la forma

$$\upsilon'(\psi \circ f) \equiv \upsilon(\psi).$$

Puesto que f es un epimorfismo, υ' está bien definida. Por definición tenemos que $\upsilon'(c_X) = c$ para cada $c \in \mathbb{R}$, y además υ' es inexpandible; luego por el Lema 2.1 existe una prolongación $\mu \in EX$, y fácilmente se verifica que $(Ef)(\mu) = \upsilon$. Por lo tanto, el funtor E es epimórfico. ☑

Para cada $x \in X$, se define $\delta_x \in EX$ como $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, para cada $\varphi \in C(X)$. Es fácil chequear que $\delta : X \to EX$ definido como $\delta(x) = \delta_x$ es una inmersión.

Por $C_p(X)$ denotaremos el conjunto de funciones continuas $\phi : X \to \mathbb{R}$, dotado de la topología de subespacio de $\mathbb{R}^X$. Por $E_p(X)$ notaremos el subconjunto de $C_p(X)$ formado por las aplicaciones que son inexpandibles (siempre que X sea un espacio métrico).

Lema 3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico infinito; entonces*

$$w(E_p(X)) \leq d(E_p(X)) \times d(X).$$

Demostración. Sea $F \subset E_p(X)$, F subconjunto denso, tal que $|F| \leq d(E_p(X))$, y seleccionemos $A \subset X$, también denso, tal que $|A| \leq d(X)$. Consideremos

$$\beta = \left\{(\upsilon; y_1, \cdots, y_n; q) : \upsilon \in F,\ y_i \in A,\ q \in \mathbb{Q}^+\right\},$$

y probemos que β es una base de $E_p(X)$. Sean $\varphi \in E_p(X)$ y $\langle \varphi; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon\rangle$ una vecindad de φ; entonces tenemos que encontrar un abierto $B \in \beta$ tal que $\varphi \in B$ y además $B \subset \langle \varphi; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon\rangle$. Sean $y_1, \cdots, y_n \in A$ tales que $d(x_i, y_i) < \varepsilon/7$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\psi \in F$ tal que $\psi \in (\varphi; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon/7)$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $3\varepsilon/7 \leq q \leq 4\varepsilon/7$.

1. Probemos que $\varphi \in \langle \psi; y_1, \cdots, y_n; q\rangle$. En efecto,

   $$\begin{aligned}|\varphi(y_i) - \psi(y_i)| &\leq |\varphi(y_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \psi(y_i)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{7} + |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| + \frac{\varepsilon}{7} \leq \frac{3\varepsilon}{7} \leq q,\end{aligned}$$

   por lo que tenemos que $\varphi \in \langle \psi; y_1, \cdots, y_n; q\rangle$.

2. Sea $\phi \in \langle \psi; y_1, \cdots, y_n; q\rangle$. Tenemos que

   $$|\phi(x_i) - \varphi(x_i)| \leq |\phi(x_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \varphi(x_i)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\phi(x_i) - \phi(y_i)| + |\phi(y_i) - \psi(y_i)| + |\psi(y_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \varphi(x_i)| \\
&\leq d(x_i, y_i) + |\phi(y_i) - \psi(y_i)| + d(x_i, y_i) + |\psi(x_i) - \varphi(x_i)| \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{7} + q \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

luego $\phi \in \langle \varphi; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon \rangle$.

Con lo anterior se prueba que β es una base de $E_p(X)$, y $|\beta| = \varpi$; entonces por definición de peso tenemos $w(E_p(X)) \leq \varpi$; pero también tenemos que $\varpi \leq |A| \times |F| \leq d(X) \times d(E_p(X))$, con lo que se concluye que $w(E_p(X)) \leq d(E_p(X)) \times d(X)$. ☑

Proposición 3.4. *El funtor E preserva el peso de un compacto de Hausdorff infinito.*

Demostración. De la definición de δ enunciada anteriormente tenemos que $w(X) \leq w(EX)$. Por otra parte, de resultados presentados en [1] y [2] se tiene que si $Y \subset C_p(Z)$, entonces $d(Y) \leq w(Z)$; como $EX \subset C_p(C(X))$, obtenemos que $d(EX) \leq w(C(X))$, y además $d(X) \leq w(X)$ y $w(C(X)) \leq w(X)$.

Utilizando el resultado del lema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
w(EX) &\leq d(EX) \times d(C(X)) \\
&\leq w(C(X)) \times w(C(X)) \leq w(X),
\end{aligned}$$

por lo que concluimos $w(EX) = w(X)$. ☑

Proposición 3.5. *El funtor E es continuo.*

Demostración. Sea $X = \varprojlim S$, donde $S = \left\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\right\}$ es un sistema inverso y cada X_α es compacto. Hagamos $Y = \varprojlim E(S)$, donde $E(S) = \left\{E(X_\alpha), E\left(p_\alpha^\beta\right), A\right\}$, y probemos que $Y = E(X)$. Sea $\pi : E(X) \to Y$ definida considerando las proyecciones naturales $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ y $\pi'_\alpha : Y \to EX_\alpha$ entonces

$$\pi'_\alpha \circ \pi = E\pi_\alpha.$$

Probemos que π es un homeomorfismo.

Tenemos las proyecciones naturales $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$. Sean $\mu_1, \mu_2 \in E(X)$ dos funcionales diferentes; entonces existe $\varphi \in C(X)$ tal que $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$. Sea $a = |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)|$. Por el teorema de Stone-Weierstrass, el conjunto $\{\psi \circ \pi_\alpha : \psi \in C(X_\alpha)\}$, es denso en $C(X)$; por esto existen un $\alpha \in A$ y una función $\psi \in C(X_\alpha)$ tales que $\|\varphi - \psi \circ \pi_\alpha\| < a/3$; como μ_1, μ_2 son inexpandibles, se tiene $\|\mu_i(\varphi) - \mu_i(\psi \circ \pi_\alpha)\| < a/3$, para $i \in \{1, 2\}$; entonces

$$a = |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi\circ\pi_\alpha) + \mu_1(\psi\circ\pi_\alpha) - \mu_2(\psi\circ\pi_\alpha) + \mu_2(\psi\circ\pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| \\
&\leq |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi\circ\pi_\alpha)| + |\mu_2(\psi\circ\pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| + |\mu_1(\psi\circ\pi_\alpha) - \mu_2(\psi\circ\pi_\alpha)| \\
&\leq |\mu_1(\psi\circ\pi_\alpha) - \mu_2(\psi\circ\pi_\alpha)| + \frac{2a}{3},
\end{aligned}
$$

de donde $a/3 \leq |\mu_1(\psi\circ\pi_\alpha) - \mu_2(\psi\circ\pi_\alpha)|$; entonces $(E\pi_\alpha)(\mu_1) \neq (E\pi_\alpha)(\mu_2)$. Como π_α es un epimorfismo, entonces $E(\pi_\alpha)$ es también epimorfismo para cada $\alpha \in A$. Por lo tanto concluimos que $\pi : EX \to Y$ es sobreyectivo. ☑

Sea A un subconjunto cerrado de $X \in |Comp|$. Para cada $\mu \in EX$ diremos que μ es soportado por A, si $\mu \in EA \subset EX$.

Lema 3.6. *Sean $\mu \in E(X)$, $A \subset X$, A es cerrado en X. Entonces μ es soportado por A si y solamente si para cada $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$, con $\varphi_1\big|_A = \varphi_2\big|_A$, se tiene que $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2)$.*

Demostración. Sean $\mu \in E(A)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$ tales que $\varphi_1\big|_A = \varphi_2\big|_A$, y sea $i : A \to X$ la inmersión natural.

Como $\mu \in E(A) \subset E(X)$, entonces existe $\upsilon \in E(A)$ tal que $(Ei)(\upsilon) = \mu$, y por esta razón

$$
\begin{aligned}
\mu(\varphi_1) &= (Ei)(\upsilon)(\varphi_1) = \upsilon(\varphi_1 \circ i) = \upsilon\left(\varphi_1\big|_A\right) \\
&= \upsilon\left(\varphi_2\big|_A\right) = \upsilon(\varphi_2 \circ i) = (Ei)(\upsilon)(\varphi_2) = \mu(\varphi_2).
\end{aligned}
$$

Sean $\mu \in E(X)$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$ con $\varphi_1\big|_A = \varphi_2\big|_A$ tales que $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2)$; probemos que μ es soportado por A.

Definimos $\upsilon \in E(A)$ como

$$\upsilon(\varphi) = \mu(\varphi'),$$

donde φ' es una extensión de φ fijada. Consideremos también $\psi \in C(A)$; entonces

$$(Ei)(\upsilon)(\psi) = \upsilon(\psi \circ i) = \upsilon\left(\psi\big|_A\right) = \mu(\psi),$$

por lo cual $(Ei)(\upsilon) = \mu$. ☑

Proposición 3.7. *El funtor E preserva intersecciones.*

Demostración. Como E es continuo, es suficiente probar que $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \cap E(A_2)$. Evidentemente se tiene que $E(A_1 \cap A_2) \subset E(A_1) \cap E(A_2)$. Sean $\mu \in E(A_1) \cap E(A_2)$ y $\psi_1, \psi_2 \in C(X)$; debemos concluir que $\psi_1\big|_{A_1 \cap A_2} = \psi_2\big|_{A_1 \cap A_2}$, y en virtud al lema anterior obtener el resultado deseado. Consideremos $\varphi \in C(X)$ tal que $\varphi\big|_{A_1} = \psi_1$ y $\varphi\big|_{A_2} = \psi_2$; como $\mu \in E(A_1)$, entonces $\mu(\varphi) = \mu(\psi_1)$, y por la misma razón $\mu(\varphi) = \mu(\psi_2)$. ☑

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de los resultados presentados anteriormente.

Teorema 3.8. *El funtor E es débilmente normal.*

A continuación presentamos un ejemplo en el cual se muestra que este funtor no preserva preimágenes, y por lo tanto no es un funtor normal.

Ejemplo 3.9. Sean los compactos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, donde x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 son todos distintos. Definimos

$$f : X \to Y,$$

$f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = f(x_3) = y_2$. Considerando el funcional δ_{y_2} definido anteriormente, es obvio que $\delta_{y_2} \in E(\{y_2\})$; definamos también

$$\mu(\varphi) = \text{máx}\{\text{mín}\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}, \text{mín}\{\varphi(x_2), \varphi(x_3)\}, \text{mín}\{\varphi(x_1), \varphi(x_3)\}\},$$

y probemos que está en $E(X)$.

Sea $c_X \in C(X)$; por definición de c_X se tiene que $\mu(c_X) = c$. Para verificar que es inexpandible, tomemos $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$. Supongamos primero que $\varphi_1(x_1) \leq \varphi_1(x_2) \leq \varphi_1(x_3)$ y $\varphi_2(x_1) \leq \varphi_2(x_2) \leq \varphi_2(x_3)$; entonces

$$|\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2)| = |\varphi_1(x_2) - \varphi_2(x_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|;$$

de la misma forma, en los demás casos se obtiene que

$$|\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

por lo que concluimos que $\mu \in E(X)$. Tomando $A = \{y_2\}$, un subconjunto cerrado de Y, sea $\varphi \in C(X)$; entonces

$$(Ef)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = \varphi(y_2) = \delta_{y_2}(\varphi),$$

con lo que tenemos que $\mu \in (Ef)^{-1}(E(A))$; pero claramente se tiene que $\mu \notin E\left(f^{-1}(A)\right)$, por lo que se concluye que $E\left(f^{-1}(A)\right) \neq (Ef)^{-1}(E(A))$.

4. La Mónada $\mathbb{E}$

En esta sección mostraremos que el funtor de funcionales inexpandibles genera una mónada. Necesitamos definir primero las transformaciones naturales

$$\mu : E^2 \to E \qquad \text{y} \qquad \eta : \text{Id}_{Comp} \to E.$$

Sean $X \in |Comp|$, $g \in C(X)$; definimos $\widetilde{g} : EX \to \mathbb{R}$ continua de la siguiente forma:

$$\widetilde{g}(\upsilon) = \upsilon(g), \quad \text{donde} \quad \upsilon \in EX.$$

Con esta definición, la componente natural $\mu X : E^2(X) \to E(X)$ queda definida por

$$(\mu X)(\alpha)(g) = \alpha(\widetilde{g}), \quad \text{donde} \quad \alpha \in E^2(X), \quad g \in C(X).$$

Por definición tenemos que $EX \subset \prod_{\varphi \in C(X)} I_{\|\varphi\|}$, donde $I_{\|\varphi\|} = [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$; con la aplicación proyección $\pi_\varphi : \prod_{\varphi \in C(X)} I_{\|\varphi\|} \to \mathbb{R}$ se tiene

$$\pi_\varphi \circ \mu X = \pi_{\pi_\varphi},$$

por lo que se concluye que μX es continua, y por lo tanto está en *Comp*.

Proposición 4.1. *$\mu X(\alpha) \in EX$ para cada $\alpha \in E^2X$.*

Demostración. Para demostrar que $\mu X(\alpha) \in EX$ debemos verificar que para cada $c \in \mathbb{R}$, $\mu X(\alpha)(c_X) = C$ y que $\mu X(\alpha)$ es inexpandible.

1. Sea $c \in \mathbb{R}$, $\quad \mu X(\alpha)(c_X) = \alpha(\widetilde{c_X}) = \alpha(c_{EX}) = c$.
2. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$; entonces

$$\begin{aligned} |\mu X(\alpha)(\varphi_1) - \mu X(\alpha)(\varphi_2)| &= |\alpha(\widetilde{\varphi_1}) - \alpha(\widetilde{\varphi_2})| \leq \|\widetilde{\varphi_1} - \widetilde{\varphi_2}\| \\ &= \sup_{\upsilon \in EX} |\widetilde{\varphi_1}(\upsilon) - \widetilde{\varphi_2}(\upsilon)| \\ &= \sup_{\upsilon \in EX} |\upsilon(\varphi_1) - \upsilon(\varphi_2)|; \end{aligned}$$

pero como υ es inexpandible,

$$\sup_{\upsilon \in EX} |\upsilon(\varphi_1) - \upsilon(\varphi_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

con lo que obtenemos el resultado deseado. ☑

Si $X \in |Comp|$, la componente natural ηX se define así:

$$\begin{array}{rccl} \eta X : & X & \longrightarrow & E(X) \\ & x & \longmapsto & \eta X(x) = \delta_x \end{array}$$

donde $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, para $\varphi \in C(X)$.

Además, utilizando nuevamente la proyección $\pi_\varphi : \prod_{\varphi \in C(X)} I_{\|\varphi\|} \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que si $x \in X$, entonces

$$\pi_\varphi \circ \eta X(x) = \pi_\varphi(\eta X(x)) = \pi_\varphi(\delta_x) = \delta_x(\varphi) = \varphi(x),$$

con lo que se prueba que $\pi_\varphi \circ \eta X = \varphi$, por lo que se concluye que la componente natural es continua, y por lo tanto $\eta X \in |Comp|$.

Como

$$\eta X(x)(c_X) = c_X(x) = c$$

y

$$|\eta X(x)(\varphi_1) - \eta X(x)(\varphi_2)| = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

entonces

$$\eta X(x) \in EX.$$

Proposición 4.2. *μ y η son transformaciones naturales.*

Demostración. Sean $X, Y \in |Comp|$ y $f \in Comp$; tenemos:

1. Si $\vartheta \in E^2X$ y $\varphi \in C(Y)$, entonces

$$\begin{aligned} Ef(\mu X(\vartheta))(\varphi) &= \mu X(\vartheta)(\varphi \circ f) = \vartheta\left(\widetilde{\varphi \circ f}\right) = \vartheta(\widetilde{\varphi} \circ Ef) \\ &= E^2 f(\vartheta)(\widetilde{\varphi}) = \mu Y\left(E^2 f(\vartheta)\right)(\varphi), \end{aligned}$$

con lo que tenemos que μ es una transformación natural.

2. Si $x \in X$ y $\varphi \in C(Y)$, entonces

$$\begin{aligned} Ef(\eta X(x))(\varphi) &= \eta X(x)(\varphi \circ f) = \delta_x(\varphi \circ f) = \varphi \circ f(x) \\ &= \varphi(f(x)) = \delta_{f(x)}(\varphi) = \eta Y(f(x))(\varphi), \end{aligned}$$

con lo que la proposición queda demostrada. ☑

Teorema 4.3. *La tripla $\mathbb{E} = (E, \eta, \mu)$ forma una mónada en la categoría Comp.*

Demostración. Sea $\upsilon \in EX$, y consideremos una aplicación $\varphi \in C(X)$. Entonces tenemos que

$$\mu X \circ \eta EX(\upsilon)(\varphi) = \mu X(\eta EX(\upsilon))(\varphi) = \eta EX(\upsilon)(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi}(\upsilon) = \upsilon(\varphi).$$

Además,

$$\mu X \circ E\eta X(\upsilon)(\varphi) = \mu X(E\eta X(\upsilon))(\varphi) = E\eta X(\upsilon)(\widetilde{\varphi}) = \upsilon(\widetilde{\varphi} \circ \eta X) = \upsilon(\varphi).$$

Sean ahora $\vartheta \in E^3X$ y $\varphi \in C(X)$. Entonces

$$\mu X \circ \mu EX(\vartheta)(\varphi) = \mu EX(\vartheta)(\widetilde{\varphi}) = \vartheta(\widetilde{\widetilde{\varphi}}).$$

Por otro lado tenemos

$$\mu X \circ E\mu X(\vartheta)(\varphi) = E\mu X(\vartheta)(\widetilde{\varphi}) = \vartheta(\widetilde{\varphi} \circ \mu X) = \vartheta(\widetilde{\widetilde{\varphi}}),$$

donde $\widetilde{\widetilde{\varphi}} \in C\left(E^2X\right)$ definido por $\widetilde{\widetilde{\varphi}}(\upsilon) = \upsilon(\widetilde{\varphi})$, con lo que se concluye la demostración. ☑

El autor agradece a Tarás Rádul por su apoyo y motivación.

Referencias

[1] TELEJKO A. and ZARICHNYI M. *Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces*, Mathematical studies, Monograph Series, Volume 5, 1999.

[2] SCHEPIN E. V. "Functors on uncountable powers of compacta", *Uspekhi Mat. Nauk*, 36 (1981), 3–62.

[3] RADUL T. and ZARICHNYI M. "Monads in the category of compacta", *Uspekhi Mat. Nauk*, 50 (1995), N3, 83–108.

[4] EILENBERG S. and MOORE J. "Adjoint functors and triples", *Illinois J. Math.*, 9 (1965), 381–389.

[5] RADUL T. "On functional representation of Lawson monads", *APCS*, Kluwer Academic Publishers, (2000), 457–463.

[6] RADUL T. "On strongly Lawson and I-Lawson monads", *Boletín de Matemáticas*, Nueva serie, Volumen VI N° 2 (1999), pp. 69–75.

[7] MAC LANE Saunders. *Categories for the working mathematician*, Springer Verlag, New York, 1971.

[8] ADAMEK J., HERRLICH H. and STRECKER G. *Abstract and concrete categories*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1989.

[9] ENGELKING R. *Outline of general topology*, New York, Warszawa, 1968.

JAVIER CAMARGO
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
e-mail: jecamar@uis.edu.co