

## La hoja cónica zonagonal

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ\*

**Resumen.** Se introduce un algoritmo algebraico para construir en  $\mathbb{R}^3$  un zonágono sobre un plano prefijado. También en  $\mathbb{R}^2$  se obtiene para dicho polígono una representación cartesiana. Ambos resultados son necesarios y conducentes al estudio de la hoja cónica zonagonal. Para esta superficie poliédrica reglada se aportan representaciones paramétricas y cartesianas que unifican y describen la geometría de la hoja cónica.

### 1. Introducción

El término **zonágono** es desusado o desconocido en nuestro ámbito académico. Empecemos consignando que un zonágono  $\mathfrak{P}$  es un  $2n$ -gono convexo centralmente simétrico [2, p. 241-243]. Por tanto, en él a cada lado le corresponde otro lado paralelo y de igual longitud (ver Figura 1).

La hoja cónica zonagonal  $\mathfrak{C}$  cuya directriz es un polígono  $\mathfrak{P}$  (ver Figura 2), es una superficie reglada poliédrica sobre la cual, salvo su existencia, no se conoce nada relevante. En la literatura matemática no se registran estudios que la ubiquen más allá de una superficie de apariencia agradable y arcana, ajena en todo propósito geométrico.

Justamente estos hechos animaron al autor del presente artículo a pensar sobre este poliedro no acotado. Así pues, el propósito y objetivo fundamental de este estudio es la investigación esmerada de  $\mathfrak{C}$ , desarrollando una metodología y visión allende los sistemas clásicos.

Primero se expone una construcción vectorial de los vértices de  $\mathfrak{P}$  en  $\mathbb{R}^3$ , un criterio algebraico novedoso que permite construir el polígono sobre un plano prefijado (Teorema 2.1). Después se obtiene una representación unificada de  $\mathfrak{P}$  en  $\mathbb{R}^2$ , una armoniosa expresión en términos del valor absoluto y el producto interior ordinario en  $\mathbb{R}^2$  (Teorema 2.2). Son dos resultados muy importantes al abordar las indagaciones del ángulo poliédrico  $\mathfrak{C}$ .

---

**Palabras y frases claves:** Zonágono, hoja cónica zonagonal, superficie reglada poliédrica.  
**MSC2000:** Primaria: 51M15. Secundaria: 51M20.

\* Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, Colombia.

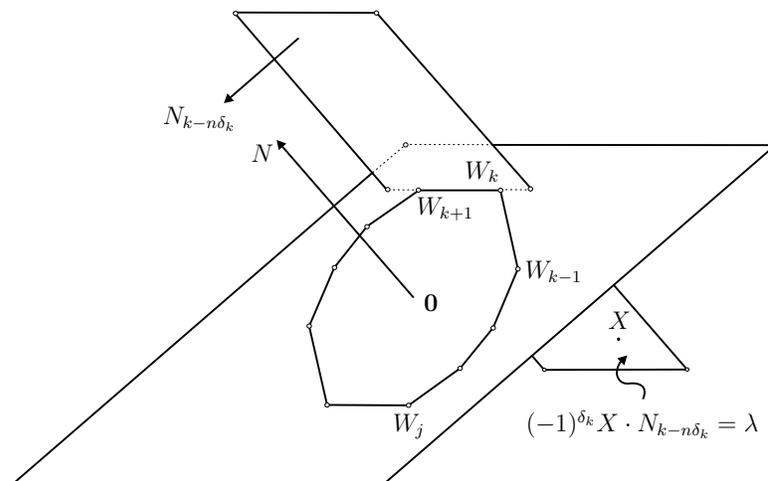


Figura 1.  $W_1 \dots W_{2n}$  es un zónágono de centro  $\mathbf{0}$  contenido en el plano  $X \cdot N = 0$ .

Así, se concibe una representación paramétrica de la citada hoja cónica tan acertada, que nos permite un fácil acceso a cada una de sus partes componentes, detalladas en el Teorema 3.1. También se aporta, para un tratado más completo de la hoja cónica zonagonal, una presentación cartesiana unificada de  $\mathcal{C}$ . Ambas representaciones, además de novedosas en su forma y propiedades, establecen una vinculación unificadora en la geometría de  $\mathcal{C}$ .

Denotaremos con letra mayúscula los puntos de  $\mathbb{R}^n$ , el producto interior ordinario por un punto  $(\cdot)$  y el producto vectorial mediante una cruz  $(\times)$ . Aquí  $n = 2$  ó  $n = 3$ . Se adopta la convención de que

$$\sum_{i=s}^t \binom{\cdot}{i} = 0 \quad \text{si } s > t.$$

Además, para cada  $A = (a_1, a_2)$  en  $\mathbb{R}^2$  definimos  $A^* = (a_2, -a_1)$ , la rotación de  $A$  a través del ángulo  $-\frac{\pi}{2}$ . Serán usadas, sin aducir, las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= 0, & (A^*)^* &= -A, & \|A^*\| &= \|A\|, \\ (aA + bB)^* &= aA^* + bB^*, & a, b &\in \mathbb{R}, \\ \det(A, B) &= A \cdot B^* = -A^* \cdot B. \end{aligned}$$

Los teoremas 2.1, 2.2, 3.1 y 4.1, consignados en la presente investigación son nuevos en la literatura matemática.

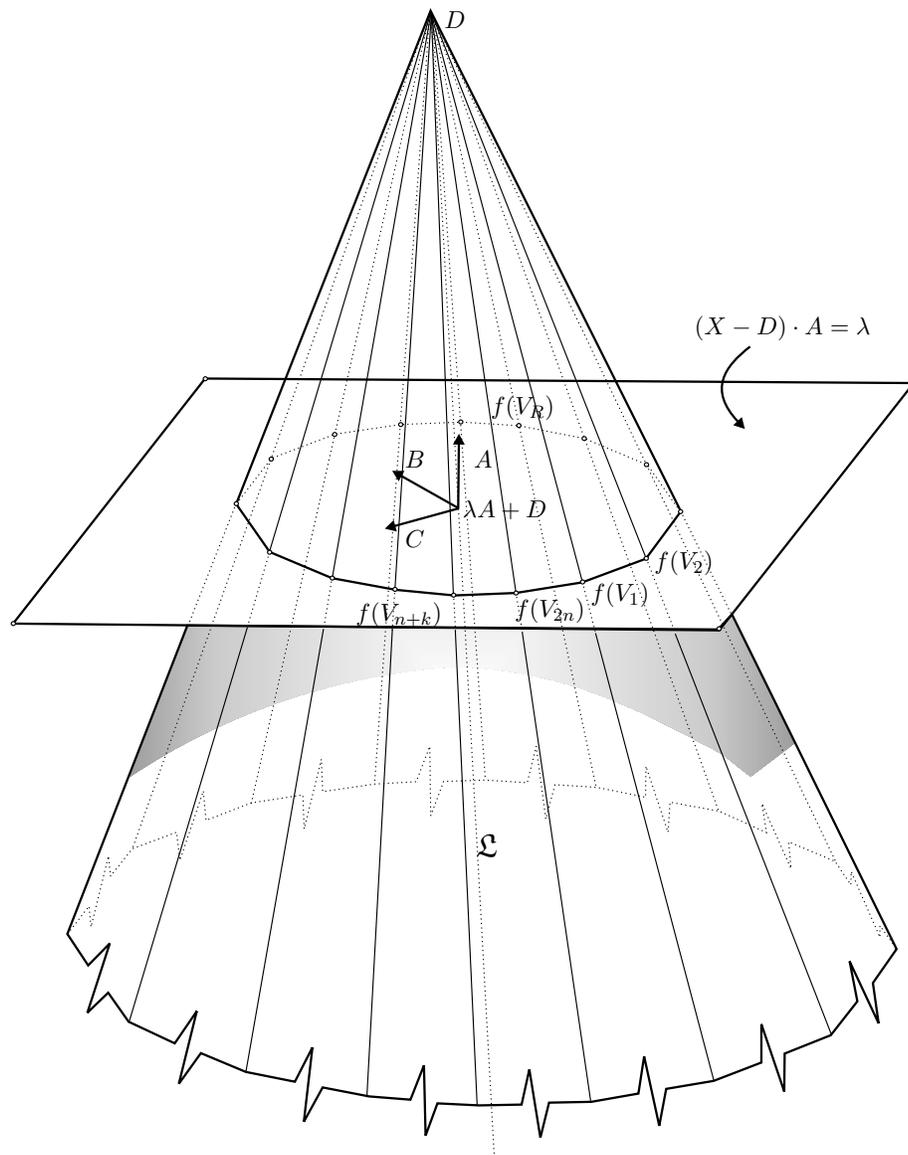


Figura 2. La hoja cónica poliédrica de ápice  $D$  y directriz el zonágono  $f(V_1) \dots f(V_{2n})$  de centro  $\lambda A + D$ .

## 2. Geometría del zonógono en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

**Teorema 2.1.** Sean  $N, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ ,  $n \geq 2$ , tales que  $\Lambda_k \cdot N = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y para todo  $i < j$  los determinantes  $\det(\Lambda_i, \Lambda_j, N)$  son, o todos positivos o todos negativos. Hagamos

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n-k} \det(\Lambda_i, \Lambda_{n-k+1}, N) + \sum_{i=n-k+2}^n \det(\Lambda_{n-k+1}, \Lambda_i, N), \quad (1)$$

$$\begin{cases} W_k = \frac{\lambda}{\Delta_k} \Lambda_{n-k+1} \times N, \\ W_{n+k} = -W_k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{donde } \lambda > 0. \quad (2)$$

Entonces  $W_1 \dots W_{2n}$  es un zonógono de centro el origen 0, contenido en el plano  $X \cdot N = 0$  (ver Figura 1).

*Demostración.* Sin perder generalidad asumamos que todos los determinantes  $\det(\Lambda_i, \Lambda_j, N)$  son positivos, para todo  $i < j$ . Esta condición nos permite afirmar que los  $2n$  puntos listados en (2) son diferentes.

Sean,  $W_{2n+1} = W_1$ ,

$$N_k = \sum_{i=1}^{n-k} \Lambda_i - \sum_{i=n-k+1}^n \Lambda_i, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3)$$

y

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 1, & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

Por (1) y (2),

$$\begin{aligned} W_k \cdot N_k &= \frac{\lambda}{\Delta_{k+1}} \left( \sum_{i=1}^{n-k} \Lambda_i \cdot \Lambda_{n-k+1} \times N - \sum_{i=n-k+1}^n \Lambda_i \cdot \Lambda_{n-k+1} \times N \right) \\ &= \frac{\lambda}{\Delta_{k+1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} \det(\Lambda_i, \Lambda_{n-k+1}, N) + \sum_{i=n-k+1}^n \det(\Lambda_{n-k+1}, \Lambda_i, N) \right\} \\ &= \lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} W_{k+1} \cdot N_k &= \frac{\lambda}{\Delta_{k+1}} \left( \sum_{i=1}^{n-k} \Lambda_i \cdot \Lambda_{n-k} \times N - \sum_{i=n-k+1}^n \Lambda_i \cdot \Lambda_{n-k} \times N \right) \\ &= \frac{\lambda}{\Delta_{k+1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-k-1} \det(\Lambda_i, \Lambda_{n-k}, N) - \sum_{i=n-k+1}^n \det(\Lambda_{n-k}, \Lambda_i, N) \right\} \\ &= \lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

para todo  $k = 1, \dots, n$ .

Si  $1 \leq k \leq 2n$ , entonces los puntos  $W_j$  están en el semiespacio abierto

$$(-1)^{\delta_k} X \cdot N_{k-n\delta_k} < \lambda,$$

cuyo plano frontera pasa por  $W_k$  y  $W_{k+1}$ , para todo  $j \neq k, k+1$  (ver Figura 1).

En efecto, si  $1 \leq k \leq n$ , entonces

$$-\lambda < W_j \cdot N_k = \frac{\lambda}{\Delta_j} \left\{ \Delta_j - 2 \sum_{i=n-k+1}^{n-j} \det(\Lambda_i, \Lambda_{n-j+1}, N) \right\} < \lambda \quad (6)$$

para todo  $1 \leq j < k \leq n$ , y

$$-\lambda < W_j \cdot N_k = \frac{\lambda}{\Delta_j} \left\{ \Delta_j - 2 \sum_{i=n-j+2}^{n-k} \det(\Lambda_{n-j+1}, \Lambda_i, N) \right\} < \lambda \quad (7)$$

para todo  $k+1 < j \leq n$ .

Si  $n+1 \leq j \leq 2n$  (esto es,  $1 \leq j-n \leq n$ ) entonces  $j \neq k, k \neq 1$ , y por (2), (4) y (7),

$$W_j \cdot N_k = W_{n+(j-n)} \cdot N_k = -W_{j-n} \cdot N_k < \lambda.$$

Ahora, si  $n+1 \leq k \leq 2n$ , entonces, por las mismas referencias anteriores,

$$\begin{aligned} (-1)W_k \cdot N_{k-n} &= W_{k-n} \cdot N_{k-n} = \lambda, \\ (-1)W_{k+1} \cdot N_{k-n} &= W_{k-n+1} \cdot N_{k-n} = \lambda \end{aligned}$$

y

$$(-1)W_j \cdot N_{k-n} = W_{j+n(-1)^{\delta_j}} \cdot N_{k-n} < \lambda,$$

observando que  $W_j = -W_{j+n(-1)^{\delta_j}}$  para todo  $1 \leq j \leq 2n, j \neq k-n, k-n+1$ ; concluimos que  $W_1 \dots W_{2n}$  es un  $2n$ -gono convexo, centralmente simétrico en 0. Además, los  $2n$  puntos listados en (2) satisfacen  $X \cdot N = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** Si  $n \geq 2$ , sean  $A_1, \dots, A_n$  vectores dados en  $\mathbb{R}^2$  tales que para todo  $i < j$  los determinantes  $\det(A_i, A_j)$  son, o todos positivos o todos negativos. Hagamos

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{n-k} \det(A_i, A_{n-k+1}) + \sum_{i=n-k+2}^n \det(A_{n-k+1}, A_i), \quad (8)$$

$$V_k = \frac{\lambda}{\delta_k} A_{n-k+1}^*, \quad V_{n+k} = -V_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

donde  $\lambda > 0$ .

Sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  el campo escalar representado por

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^n |A_k \cdot X|, \quad (10)$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ . Entonces  $\varphi^{-1}(\lambda)$  es el zonágono de centro el origen 0 y vértices  $V_1, \dots, V_{2n}$ . Explícitamente,

$$\varphi^{-1}(\lambda) = \overline{V_{2n}V_1} \cup \bigcup_{i=1}^{2n-1} \overline{V_iV_{i+1}}. \quad (11)$$

*Demostración.* Hagamos  $N = (0, 0, 1)$  y  $\Lambda_k = (A_k, 0)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ; entonces  $\Lambda_k \cdot N = 0$ ,  $\Lambda_k \times N = (A_k^*, 0)$ ,  $k = 1, \dots, n$  y

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_i, \Lambda_j, N) &= \Lambda_i \cdot \Lambda_j \times N = \Lambda_i \cdot (A_j^*, 0) \\ &= A_i \cdot A_j^* = \det(A_i, A_j), \end{aligned} \quad (12)$$

determinantes estos, que de acuerdo a las hipótesis del Teorema 2.2, son o todos positivos o todos negativos, para todo  $i < j$ .

Por tanto, los vectores  $N, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  en  $\mathbb{R}^3$ , satisfacen todas las hipótesis del Teorema 2.1. Se infiere de (1), (8) y (12) que  $\Delta_k = \delta_k$ , y de (2) y (9) que

$$W_k = \frac{\lambda}{\delta_k} (A_{n-k+1}^*, 0) = \left( \frac{\lambda}{\delta_k} A_{n-k+1}^*, 0 \right) = (V_k, 0)$$

y

$$(V_{n+k}, 0) = W_{n+k} = -W_k = (-V_k, 0), \quad k = 1, \dots, n.$$

Concluimos del Teorema 2.1 que  $V_1 \dots V_{2n}$  es un zonágono en  $\mathbb{R}^2$  de centro 0.

A continuación probaremos la afirmación en (11). Sin perder generalidad asumiremos que todos los determinantes  $\det(A_i, A_j)$  son positivos para todo  $i < j$ . Esta condición nos garantiza que los  $2n$  puntos en (9) son diferentes.

Si  $0 \leq \lambda \leq 1$ , entonces

$$\alpha V_i + (1 - \alpha)V_{i+1} = \lambda \left( \frac{\alpha}{\delta_i} A_{n+1-i}^* + \frac{1 - \alpha}{\delta_i + 1} A_{n-i}^* \right), \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

$$\alpha V_i + (1 - \alpha)V_{i+1} = -\{\alpha V_{i-n} + (1 - \alpha)V_{i-n+1}\}, \quad n + 1 \leq i \leq 2n - 1,$$

$$\alpha V_{2n} + (1 - \alpha)V_1 = -\{\alpha V_n + (1 - \alpha)V_{n+1}\},$$

$$\alpha V_n + (1 - \alpha)V_{n+1} = \lambda \left( \frac{\alpha}{\delta_n} A_1^* - \frac{1 - \alpha}{\delta_1} A_n^* \right).$$

Denotando  $\Psi = \varphi(\alpha V_i + (1 - \alpha)V_{i+1})$  tenemos

$$\begin{aligned} \Psi = \lambda \left\{ \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \left| \frac{\alpha}{\delta_1} A_k \cdot A_{n+1-i}^* + \frac{1 - \alpha}{\delta_{i+1}} A_k \cdot A_{n-i}^* \right| \right. \\ \left. + \sum_{k=n-i}^n \left| \frac{\alpha}{\delta_1} A_k \cdot A_{n+1-i}^* + \frac{1 - \alpha}{\delta_{i+1}} A_k \cdot A_{n-i}^* \right| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \left\{ \frac{\alpha}{\delta_i} \sum_{k=1}^{n-(i+1)} A_k \cdot A_{n+1-i}^* + \frac{\alpha}{\delta_i} A_{n+1-(i+1)} \cdot A_{n+1-i}^* \right. \\
 &\quad + \frac{1-\alpha}{\delta_i+1} \sum_{k=1}^{n-(i+1)} A_k \cdot A_{n+1-(i+1)}^* + \frac{1-\alpha}{\delta_i+1} A_{n+1-(i+1)} \cdot A_{n-i+1}^* \\
 &\quad \left. + \sum_{k=n-i+2}^n \left| \frac{\alpha}{\delta_i} A_k \cdot A_{n+1-i}^* + \frac{1-\alpha}{\delta_i+1} A_k \cdot A_{n+1-(i+1)}^* \right| \right\} \\
 &= \lambda \left\{ \frac{\alpha}{\delta_i} \left( \sum_{k=1}^{n-i} A_k \cdot A_{n+1-i} + \sum_{k=n-i+2}^n A_{n+1-i} \cdot A_k^* \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-\alpha}{\delta_i+1} \left( \sum_{k=1}^{n-(i+1)} A_k \cdot A_{n+1-(i+1)}^* + \sum_{k=n-(i+1)+2}^n A_{n+1-(i+1)} \cdot A_k^* \right) \right\};
 \end{aligned}$$

en consecuencia,  $\Psi = \lambda$  para todo  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\varphi(\alpha V_i + (1-\alpha)V_{i+1}) = \varphi(\alpha V_{i-n} + (1-\alpha)V_{i-n+1}) = \lambda$$

para todo  $n+1 \leq i \leq 2n-1$  (esto es,  $1 \leq i-n \leq n-1$ ),

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha V_{2n} + (1-\alpha)V_1) &= \varphi(\alpha V_n + (1-\alpha)V_{n+1}) \\
 &= \lambda \sum_{k=1}^n \left| A_k \cdot \left( \frac{\alpha}{\delta_n} A_1^* - \frac{1-\alpha}{\delta_1} A_n^* \right) \right| \\
 &= \lambda \sum_{k=1}^n \left( \frac{\alpha}{\delta_n} A_1 \cdot A_k^* - \frac{1-\alpha}{\delta_1} A_k \cdot A_n^* \right) = \lambda.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\overline{V_{2n}V_1} \cup \bigcup_{i=1}^{2n-1} \overline{V_iV_{i+1}} \subseteq \varphi^{-1}(\lambda). \tag{13}$$

Denotemos por  $\mathfrak{P}$  la unión en (13) de todos los lados del polígono  $V_1 \dots V_n$ , y supongamos que existe un punto  $P$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$P \in \varphi^{-1}(\lambda) \sim \mathfrak{P}. \tag{14}$$

Ahora, dado que  $0$  es el centro de  $\mathfrak{P}$  (una curva de Jordan, [1, p. 184]), entonces  $0$  está en la componente interior de  $\mathfrak{P}$ , y puesto que  $0 \notin \varphi^{-1}(\lambda)$ , entonces  $P \neq 0$ . Por esto la semirrecta no degenerada  $\{tP \mid t \geq 0\}$  de punto inicial  $0$ , interseca a  $\mathfrak{P}$  (un conjunto acotado en  $\mathbb{R}^2$ ) en un punto  $P_0$ , es decir, existe  $t_0 > 0$  tal que  $P_0 = t_0P$ . Pero entonces, de acuerdo a (13),  $\varphi(P_0) = \lambda$ , o bien según (10),  $\lambda = t_0\varphi(P) = t_0\lambda$ , lo que implica  $t_0 = 1$  y  $P = P_0$ ; consecuentemente  $P \in \mathfrak{P}$ , lo cual contradice (14). Se infiere así la contenencia

$$\varphi^{-1}(\lambda) \subseteq \mathfrak{P},$$

la cual al unísono con (13) implica la igualdad en (11). ☑

### 3. Representación vectorial de la hoja cónica zonagonal

**Teorema 3.1.** Sean  $A, B, C$  y  $D$  vectores dados en  $\mathbb{R}^3$  tales que  $A, B$  y  $C$  son ortonormales satisfaciendo

$$\det(A, B, C) = 1. \quad (15)$$

Sean además,  $A_1, \dots, A_n$  vectores dados en  $\mathbb{R}^2$  bajo todas las hipótesis y notaciones del Teorema 2.2, y consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(u, v) = \sum_{k=1}^n |(u, v) \cdot A_k| A + uB + vC + D, \quad (16)$$

para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , expresión que representa paramétricamente una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

Para cada  $\lambda > 0$  sea a su vez  $V_1 \dots V_{2n}$  el zonágono en  $\mathbb{R}^2$  de centro el origen y vértices definidos en (8) y (9). Entonces:

(i)  $f(V_1) \dots f(V_{2n})$  es un zonágono contenido en  $f(\mathbb{R}^2)$  de centro

$$\lambda A + D = \frac{1}{2} \{f(V_k) + f(V_{n+k})\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (17)$$

y plano

$$(X - D) \cdot A = \lambda. \quad (18)$$

(ii) La traza de  $f$ , es decir  $f(\mathbb{R}^2)$ , es una hoja cónica zonagonal de ápice  $D = f(0)$ , y la directriz el zonágono  $f(V_1) \dots f(V_{2n})$  cuyo plano (18) interseca, ortogonalmente en  $\lambda A + D$ , a la semirrecta

$$\mathfrak{L} = \{D + tA : t \geq 0\}, \quad (19)$$

sobre la cual  $f(\mathbb{R}^2)$  se refleja mutuamente (ver Figura 2).

*Demostración.* Si

$$\mathfrak{P} = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{k=1}^n |A_k \cdot (u, v)| = \lambda \right\}, \quad (20)$$

entonces de acuerdo con el Teorema 2.2  $\mathfrak{P}$  es el zonágono  $V_1 \dots V_{2n}$  de centro el origen y vértices definidos en (8) y (9). Así, según (16) y (20),

$$f(u, v) = \lambda A + uB + vC + D, \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathfrak{P}, \quad (21)$$

es decir,  $f(\mathfrak{P}) \subseteq f(\mathbb{R}^2)$ .

Si  $A_k = (a_{k1}, a_{k2})$ , hagamos

$$\Lambda_k = a_{k1}B + a_{k2}C, \quad k = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Entonces  $\Lambda_k \cdot A = 0$  y

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda_i, \Lambda_j, A) &= \Lambda_i \cdot \Lambda_j \times A \\
 &= (a_{i1}B + a_{i2}C) \cdot (a_{j1}B \times A + a_{j2}C \times A) \quad (\text{por (22)}) \\
 &= a_{i1}a_{j2}B \cdot C \times A + a_{i2}a_{j1}C \cdot B \times A \\
 &= a_{i1}a_{j2} \det(A, B, C) - a_{i2}a_{j1} \det(A, B, C) \\
 &= a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1} \quad (\text{por (15)}) \\
 &= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix} = \det(A_i, A_j),
 \end{aligned}$$

determinantes estos, de acuerdo con las hipótesis del Teorema 2.2, tales que para todo  $i < j$ , son, o todos positivos o todos negativos.

Queda así establecido que los vectores  $A$  en 21 y  $\Lambda_k$  en (22) satisfacen la hipótesis del Teorema 2.1, siendo iguales las sumas en (1) y (8), es decir,  $\Delta_k = \delta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Dado que  $(A, B, C)$  es una tripla positiva de vectores en  $\mathbb{R}^3$  satisfaciendo (15), entonces

$$B \times A = -C \quad \text{y} \quad C \times A = B.$$

[1, p. 311–313, Theorem 11-9]. Por esto, y según (22),

$$\Lambda_k \times A - a_{k1}C + a_{k2}B, \quad k = 1, \dots, n,$$

y por ende, los puntos en (2) (con  $N = A$ ) son

$$\begin{aligned}
 W_k &= \frac{\lambda}{\Delta_k} \Lambda_{n-k+1} \times A = \frac{\lambda}{\delta_k} \Lambda_{n-k+1} \times A \\
 &= \frac{\lambda}{\delta_k} (-a_{n-k+1,1}C + a_{n-k+1,2}B). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 W_k &= -(\lambda A + D) + \left\{ \lambda A + \frac{\lambda}{\delta_k} (-a_{n-k+1,1})C + D \right\} \\
 &= -(\lambda A + D) + f \left( \frac{\lambda}{\delta_K} a_{n-k+1,2}, \frac{\lambda}{\delta_k} (-a_{n-k+1,1}) \right) \quad (\text{por (21)}) \\
 &= -(\lambda A + D) + f \left( \frac{\lambda}{\delta_K} (a_{n-k+1,2}, -a_{n-k+1,1}) \right) \\
 &= -(\lambda A + D) + f \left( \frac{\lambda}{\delta_K} A_{n-k+1}^* \right) \\
 &= -(\lambda A + D) + f(V_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{por (9)}),
 \end{aligned}$$

y

$$W_{n+k} = -W_k$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda}{\delta_k} a_{n-k+1,2} B + \frac{\lambda}{\delta_k} a_{n-k+1,1} C && \text{(por (23))} \\
&= \left\{ \lambda A + \left( -\frac{\lambda}{\delta_k} \right) a_{n-k+1,2} B + \frac{\lambda}{\delta_k} a_{n-k+1,1} C + D \right\} - (\lambda A + D) \\
&= f(-V_k) - (\lambda A + D) && \text{(por (21))} \\
&= f(V_{n+k}) - (\lambda A + D), \quad k = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

son los vértices, a la luz del Teorema 2.1, del zonágono  $W_1 \dots W_{2n}$ . Pero siendo  $W_k$  el traslado de  $f(V_k)$  por el vector  $-(\lambda A + D)$ , se infiere que  $f(V_1) \dots f(V_{2n})$  es también un zonágono en  $\mathbb{R}^3$ . Ahora bien, como el centro del zonágono  $W_1 \dots W_{2n}$  es el origen, esto es

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2}(W_k + W_{n-k}),$$

o bien,

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2} \{ [-(\lambda A + D) + f(V_k)] + [(\lambda A + D) + f(V_{n+k})] \},$$

esto implica la expresión en (17).

De (21) y la ortonormalidad de  $A, B, C$  recibimos

$$\{f(u, v) - D\} \cdot A = \lambda A \cdot A = \lambda \|A\|^2 = \lambda,$$

por lo cual  $\mathfrak{P}$  está en el plano (18).

A continuación probaremos la (ii) parte del teorema en cuestión. Sea  $\mathfrak{C}$  la hoja cónica zonagonal de ápice  $D$  y directriz del zonágono  $\mathfrak{P}$ . Puesto que  $D$  no satisface (18) (es decir, no está en el plano  $\mathfrak{P}$ ), entonces  $\mathfrak{C}$  es no degenerada.

Sea  $(u, v) \in \mathfrak{P}$  arbitrario pero fijo, y sea  $s \geq 0$ . Entonces  $s(u, v) = (su, sv)$  está en  $s\mathfrak{P}$  (degenerado si  $s = 0$ ), y

$$\begin{aligned}
D + s \{f(u, v) - D\} &= D + s \{\lambda A + uB + vC\} && \text{(por (21))} \\
&= (s\lambda)A + (su)B + (sv)C + D \\
&= f(su, sv).
\end{aligned}$$

Por esto, si consideramos para  $\mathfrak{C}$  su generatriz

$$\mathfrak{L}(u, v) = \{D + s \{f(u, v) - D\} \mid s \geq 0\},$$

una semirrecta de vector director

$$f(u, v) - D = \lambda A + uB + vC \neq \mathbf{0}$$

(por ser  $\lambda > 0$  y  $A, B, C$  linealmente independientes) y punto inicial  $D = f(\mathbf{0})$ , entonces

$$\mathfrak{L}(u, v) = f(L(u, v)),$$

donde

$$L(u, v) = \{s(u, v) \mid s \geq 0\},$$

la semirrecta en  $\mathbb{R}^2$  cuyo vector director  $(u, v)$  es no nulo, dado que el origen (su punto inicial) no está en  $\mathfrak{P}$ .

Por otro lado, si  $P \in \mathbb{R}^2 \sim \{\mathbf{0}\}$ , entonces el rayo  $\overrightarrow{\mathbf{0P}}$  interseca el polígono  $\mathfrak{P}$  en un punto  $(u', v')$ , siendo así  $P$  y  $(u', v')$  vectores de igual dirección y sentido. Es decir,  $(u', v') = tP$ , para algún escalar  $t \geq 0$ ; pero entonces, por (20),  $t = \lambda$  y por ende  $P = \lambda^{-1}(u', v') \in L(u', v')$ . Consecuentemente,

$$\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_c L(u, v) \subseteq \mathbb{R}^2$$

y

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{(u,v) \in \mathfrak{P}} \mathfrak{L}(u, v) = \bigcup_{(u,v) \in \mathfrak{P}} f(L(u, v)) = f\left(\bigcup_{(u,v) \in \mathfrak{P}} L(u, v)\right) = f(\mathbb{R}^2).$$

De (19) se pierde que  $\lambda A + D$  es la intersección ortogonal de  $\mathfrak{L}$  y el plano (18) del zonágono  $\mathfrak{P}$ .

Las expresiones

$$\{f(u, v) - f(-u, -v)\} \cdot A = 2(uB + vC) \cdot A = 0$$

y

$$\frac{1}{2} \{f(u, v) + f(-u, -v)\} = D + \sum_{k=1}^n |(u, v) \cdot A_k| A,$$

para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , nos permiten afirmar, a la luz de (19), que  $f(\mathbb{R}^2)$  se refleja mutuamente en  $\mathfrak{L}$ . \(\square\)

#### 4. Representación cartesiana de la hoja cónica zonagonal

**Teorema 4.1.** Sean  $N, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  vectores en  $\mathbb{R}^3$  bajo todas las hipótesis y condiciones del Teorema 2.1 y las notaciones (1), (2). Consideremos el campo escalar  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  representado por

$$F(X) = \sum_{k=1}^n |\Lambda_k \cdot X| + N \cdot X, \quad \text{para todo } X \in \mathbb{R}^3. \quad (24)$$

Entonces  $F^{-1}(\lambda)$  es una hoja cónica zonagonal de ápice

$$W = \lambda \|N\|^{-2} N \quad (25)$$

y directriz el zonágono  $W_1 \dots W_{2n}$  de centro el origen, contenido en el plano  $X \cdot N = 0$ .

*Demostración.* Si  $0 \leq \alpha \leq 1$ , entonces de (2) recibimos

$$\alpha W_i + (1 - \alpha) W_{i+1} = \lambda \left( \frac{\alpha}{\Delta_i} \Lambda_{n-i+1} \times N + \frac{1 - \alpha}{\Delta_{i+1}} \Lambda_{n-(i+1)+1} \times N \right),$$

si  $1 \leq i \leq n-1$ ;

$$\alpha W_i + (1-\alpha)W_{i+1} = -\{\alpha W_{i-n} + (1-\alpha)W_{i-n+1}\},$$

si  $n+1 \leq i \leq 2n-1$  (esto es, si  $1 \leq i-n \leq n-1$ );

$$\begin{aligned} \alpha W_{2n} + (1-\alpha)W_1 &= -\{\alpha W_n + (1-\alpha)W_{n+1}\} \\ &= \lambda \left( -\frac{\alpha}{\Delta_n} \Lambda_1 \times N + \frac{1-\alpha}{\Delta_1} \Lambda_n \times N \right); \end{aligned}$$

y por ende, remitiéndonos a (24),

$$\begin{aligned} &F(\alpha W_i + (1-\alpha)W_{i+1}) \\ &= \lambda \left\{ \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \left| \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i}, N) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n-i}^n \left| \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i}, N) \right| \right\} \\ &= \lambda \left\{ \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \left[ \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i}, N) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_{n-i}, N) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_{n-i+1}, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_{n-i+1}, \Lambda_{n-i}, N) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n-i+2}^n \left| \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i}, N) \right| \right\} \\ &= \lambda \left\{ \frac{\alpha}{\Delta_i} \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i}, N) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_{n-i+1}, N) + \left| -\frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_{n-i+1}, N) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n-i+2}^n \left| -\frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_{n-i+1}, \Lambda_k, N) - \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_k, N) \right| \right\} \\ &= \lambda \left\{ \frac{\alpha}{\Delta_i} \sum_{k=1}^{n-i} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i}, N) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_{n-i+1}, N) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n-i+2}^n \left[ \frac{\alpha}{\Delta_i} \det(\Lambda_{n-i+1}, \Lambda_k, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \det(\Lambda_{n-i}, \Lambda_k, N) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{\alpha}{\Delta_i} \left[ \sum_{k=1}^{n-i} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-i+1}, N) + \sum_{k=n-i+2}^n \det(\Lambda_{n-i+1}, \Lambda_k, N) \right] \right. \\ \left. + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \left[ \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \det(\Lambda_k, \Lambda_{n-(i+1)+1}, N) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=n-(i+1)+2}^n \det(\Lambda_{n-(i+1)+1}, \Lambda_k, N) \right] \right\},$$

luego, por (1),

$$F(\alpha W_i + (1-\alpha)W_{i+1}) = \lambda \left( \frac{\alpha}{\Delta_i} \Delta_i + \frac{1-\alpha}{\Delta_{i+1}} \Delta_{i+1} \right) = \lambda, \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-1;$$

$$F(\alpha W_i + (1-\alpha)W_{i+1}) = F(\alpha W_i - n + (1-\alpha)W_{i-n+1}) = \lambda,$$

si  $n+1 \leq i \leq 2n-1$  (esto es, si  $1 \leq i-n \leq n-1$ , caso anterior);

$$F(\alpha W_{2n} + (1-\alpha)W_1) = F(\alpha W_n + (1-\alpha)W_{n+1}) \\ = \lambda \sum_{k=1}^n \left| -\frac{\alpha}{\Delta_n} \det(\Lambda_k, \Lambda_1, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_1} \det(\Lambda_k, \Lambda_n, N) \right| \\ = \lambda \sum_{k=1}^n \left| \frac{\alpha}{\Delta_n} \det(\Lambda_1, \Lambda_k, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_1} \det(\Lambda_k, \Lambda_n, N) \right| \\ = \lambda \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\alpha}{\Delta_n} \det(\Lambda_1, \Lambda_k, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_1} \det(\Lambda_k, \Lambda_n, N) \right] \\ = \lambda \left\{ \frac{\alpha}{\Delta_n} \sum_{k=1}^n \det(\Lambda_1, \Lambda_k, N) + \frac{1-\alpha}{\Delta_1} \sum_{k=1}^{n-1} \det(\Lambda_k, \Lambda_n, N) \right\} \\ = \left( \frac{\alpha}{\Delta_n} \Delta_n + \frac{1-\alpha}{\Delta_1} \Delta_1 \right) \quad (\text{por (1)}) \\ = \lambda,$$

teniendo presente, en todos los cálculos anteriores, que

$$\Delta_j \det(\Lambda_i, \Lambda_k, N) > 0 \text{ si } i < k.$$

De esta manera, si  $\mathfrak{P}$  denota el zonágono  $W_1 \dots W_{2n}$ , es decir,

$$\mathfrak{P} = \overline{W_{2n}W_1} \cup \bigcup_{i=1}^{2n-1} \overline{W_iW_{i+1}},$$

entonces hemos demostrado que  $F(X) = \lambda$ , para todo  $X \in \mathfrak{P}$ , donde  $\mathfrak{P}$  está en el plano  $N \cdot X = 0$ . En otras palabras

$$F(\mathfrak{P}) = \lambda, \tag{26}$$

siendo  $\mathfrak{P}$  la intersección del plano  $N \cdot X = 0$  con  $F^{-1}(\lambda)$ .

De (25) obtenemos  $W \cdot N = \lambda > 0$ , y así el punto  $W$  no está en el plano de  $\mathfrak{P}$ . Consideremos, entonces, la hoja cónica zonagonal  $\mathfrak{C}$  de ápice  $W$  y directriz el polígono  $\mathfrak{P}$ ; explícitamente,

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{X \in \mathfrak{P}} \overrightarrow{WX}. \quad (27)$$

Así, si  $X \in \mathfrak{P}$  entonces  $\overrightarrow{WX}$  es el rayo representado por

$$Y(t) = W + t(X - W), \quad t \geq 0,$$

o bien, según (25),

$$Y(t) = \lambda \|N\|^{-2} N + t(X - \lambda \|N\|^{-2} N), \quad t \geq 0.$$

Entonces

$$\Lambda_k \cdot Y(t) = t \Lambda_k \cdot X,$$

$$N \cdot Y(t) = \lambda + t(N \cdot X - \lambda) = \lambda(1 - t) \quad (\text{pues } N \cdot X = 0),$$

$$\begin{aligned} F(Y(t)) &= t \sum_{k=1}^n |\Lambda_k \cdot X| + \lambda(1 - t) && (\text{por (24)}) \\ &= t \left\{ \sum_{k=1}^n |\Lambda_k \cdot X| + N \cdot X \right\} + \lambda(1 - t) \\ &= tF(X) + \lambda(1 - t) && (\text{por (24)}) \\ &= t\lambda + \lambda(1 - t) && (\text{por (26)}) \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

y por ende

$$\mathfrak{P} \subseteq F^{-1}(\lambda). \quad (28)$$

Recíprocamente, sea  $X \in F^{-1}(\lambda)$  y  $X \neq W$ . Entonces

$$\Lambda_k \cdot X = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Así  $X$  y  $N$  serían paralelos, es decir,  $X = tN$  para algún escalar  $t$ ; pero entonces  $\lambda = F(X) = t\|N\|^2$  y  $X = \lambda\|N\|^{-2}N = W$  (por (25)), lo cual es una contradicción. Por tanto,

$$\lambda - N \cdot X > 0.$$

Hagamos  $\delta = \lambda - N \cdot X$  y

$$D = W + \lambda\delta^{-1}(X - W) = \lambda\|N\|^{-2}(1 - \lambda\delta^{-1})N + \lambda\delta^{-1}X. \quad (29)$$

Entonces,  $\Lambda_k \cdot D = \lambda\delta^{-1}\Lambda_k \cdot X$ ,

$$\begin{aligned} N \cdot D &= \lambda(1 - \lambda\delta^{-1}) + \lambda\delta^{-1}N \cdot X \\ &= \lambda(1 - \lambda\delta^{-1} + \delta^{-1}N \cdot X) \\ &= \lambda\{1 - \delta^{-1}(\lambda - N \cdot X)\} \\ &= \lambda(1 - \delta^{-1} \cdot \delta) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(D) &= \lambda\delta^{-1} \sum_{k=1}^n |\Lambda_k \cdot X| \\ &= \lambda\delta^{-1} \left\{ \left( \sum_{k=1}^n |\Lambda_k \cdot X| + N \cdot X \right) - N \cdot X \right\} \\ &= \lambda\delta^{-1}(\lambda - N \cdot X) = \lambda\delta^{-1} \cdot \delta = \lambda. \end{aligned}$$

Se infiere de (26) que  $D \in \mathfrak{P}$ , y de (29) y (27) que

$$X = W + (1 + \lambda^{-1}\delta)(D - W) \in \overrightarrow{WD} \subseteq \mathfrak{C},$$

y por ende,

$$F^{-1}(\lambda) \subseteq \mathfrak{C}.$$

De esta contención y de (28) concluimos finalmente que  $\mathfrak{C} = F^{-1}(\lambda)$ .  $\square$

### Referencias

- [1] APOSTOL Tom M. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Second printing, 1965.
- [2] WILLIAMS Robert. *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. New York; Dover Publications, 1979.

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
Duitama, Boyacá, Colombia.