

La ecuación icónica y el trazado de rayos sísmicos

FLOR VIVAS*, FRANCISCO CABRERA*, JOSÉ LIZCANO*

Resumen. El objetivo fundamental de la sismica y la sismología es la caracterización del subsuelo mediante la reconstrucción de las trayectorias que los rayos sísmicos siguen a través de las diferentes capas. Uno de los métodos sísmicos más utilizados en la actualidad es el método asintótico o de alta frecuencia, cuya parte cinemática para medios homogéneos se basa fundamentalmente en las leyes de Snell de la óptica geométrica. En medios con variaciones continuas de la velocidad se hace necesario realizar un desarrollo asintótico de la ecuación de onda, obteniéndose la ecuación icónica o ecuación del frente de onda. En este trabajo se muestra cómo obtener, a partir de la ecuación de onda, la ecuación icónica y la ecuación del rayo.

1. Introducción

La ecuación que modela la propagación de las ondas mecánicas en medios materiales se llama ecuación elastodinámica. Los métodos analíticos de solución de la ecuación elastodinámica no son en general conocidos, salvo en algunos casos particulares, por lo cual lo más común es recurrir a los métodos numéricos usuales: diferencias finitas y elementos finitos. Uno de los inconvenientes de estos métodos directos es el alto costo computacional para la solución de las ecuaciones involucradas.

Como opción a estos métodos directos está el método asintótico o método de alta frecuencia, aplicado fundamentalmente a estructuras suavemente no homogéneas. Las ecuaciones icónica¹ y de rayo constituyen la parte cinemática del fenómeno; a la par de estas ecuaciones esta la ecuación de transporte que modela la parte dinámica de la propagación de las ondas; solucionando estas ecuaciones se obtiene una completa descripción de la propagación; esto es, el

Palabras y frases claves: Ecuación icónica, trazado de rayos sísmicos, elastodinámica.

MSC2000: Primaria: 74F10, 74B10. Secundaria: 35Q99.

* Universidad de Pamplona, Departamento de Física y Matemáticas, Grupo de Modelamiento y Simulación Computacional LATTICE. fcabrera@unipamplona.edu.co.

¹Del griego *eikon* (imagen o representación). En inglés, *eikonal equation*.

tiempo de transito de un punto a otro, la trayectoria seguida por la onda y la amplitud de la onda en cada punto [1].

Las ecuaciones icónicas y de transporte son un par de ecuaciones en derivadas parciales, de primer orden y no lineales; la no linealidad hace que su complejidad pueda ser muy grande y que no se tenga conocimiento de soluciones analíticas, salvo en algunos casos particulares. Una función $T(x, y, z)$ que sea solución de la ecuación icónica representa una superficie en el espacio, la cual corresponde al frente de onda.

Para medios isotrópicos los rayos se definen como las curvas ortogonales al frente de onda, y se pueden ver como trayectorias extremales si el problema de propagación de ondas en medios suavemente no homogéneos se interpreta como un problema variacional.

2. La elastodinámica y la ecuación elastodinámica

La elastodinámica estudia las propiedades elásticas, plásticas y visco elásticas de los diferentes materiales o componentes del subsuelo, cada uno de los cuales se caracteriza por su rigidez y su compresibilidad. Deducir estas características a partir de observaciones en instrumentos típicos de la sismica, como son los geófonos, constituye un problema inverso muy importante en geofísica. El problema de predecir el registro medido en un geófono, conocidas las propiedades del medio, es un problema directo también de gran importancia.

El eje fundamental de la elastodinámica es la relación lineal entre las deformaciones y los esfuerzos a los que se somete un determinado material, relación conocida como ley de Hooke generalizada,

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}, \quad (1)$$

donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzos, e_{kl} el tensor de deformación y c_{ijkl} es el tensor que identifica los parámetros de elasticidad del medio, el cual en \mathbb{R}^3 tendrá 81 componentes. Debido a la simetría de τ y se tiene

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij},$$

por lo que en el caso más general c_{ijkl} tendrá 21 componentes independientes. Para diferentes estructuras existen ciertos tipos de simetría, reduciendo aún más el número de componentes independientes del tensor.

En el caso isotrópico el tensor c_{ijkl} se representa por las constantes de Lamé: λ , módulo de elasticidad, y μ , módulo de rigidez.

La expresión para el tensor c_{ijkl} en términos del delta de Kronecker es:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3)$$

La ecuación elastodinámica relaciona la variación espacial del tensor de esfuerzos con la variación temporal del vector desplazamiento; la ecuación de movimiento es entonces

$$\tau_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (4)$$

Reemplazando (3) en la ecuación (4) se obtiene

$$(\lambda u_{j,j})_{,j} + [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (5)$$

ecuación que corresponde a la ecuación elastodinámica para un medio no homogéneo isotrópico y elástico. Desarrollando la ecuación (5) y escribiéndola en forma vectorial, obtenemos

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\nabla^2 u + \nabla\lambda\nabla \cdot u + \nabla\mu \times \nabla \times u + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)u + f = \rho \ddot{u}. \quad (6)$$

Si el medio es homogéneo se reduce a

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\nabla^2 u = \rho \ddot{u}. \quad (7)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial en derivadas parciales (tres variables) que corresponde a los desplazamientos en un medio continuo.

3. Ecuación de onda y desacople de la ecuación elastodinámica

Partiendo de la identidad vectorial

$$\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - (\nabla \times \nabla \times u) \quad (8)$$

la ecuación (7) se escribe como

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot u) - \mu\nabla \times \nabla \times u = \rho \ddot{u}. \quad (9)$$

De acuerdo con el teorema de Helmholtz, el campo vectorial puede representarse en términos de un potencial vectorial Ψ y un potencial escalar Φ :

$$u = \nabla\phi + \nabla \times \psi, \quad (10)$$

con las condiciones $\nabla \times \phi = 0$ y $\nabla \cdot \psi = 0$.

Al sustituir (10) en (9) se desacopla totalmente la ecuación, y se obtiene

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - \rho\ddot{\phi}] + \nabla \times [\mu\nabla^2\psi - \rho\ddot{\psi}] = 0. \quad (11)$$

La ecuación (11) indica la existencia de dos tipos de ondas:

$$\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\ddot{\phi}, \quad \text{onda P con velocidad } \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (12a)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\rho}{\mu}\ddot{\psi}, \quad \text{onda S con velocidad } \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (12b)$$

4. Ecuación icónica o ecuación de frente de onda [2]

Las ecuaciones anteriormente deducidas corresponden a medios homogéneos; para medios no homogéneos, donde la velocidad sísmica varía suavemente, es decir que ρ , λ y μ tienen pequeños gradientes, podemos escribir una ecuación de onda de la forma

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2(x)} \ddot{\phi}, \quad (13)$$

la cual corresponde a una aproximación de la ecuación de onda para medios no homogéneos. Asumiendo una solución de esta ecuación de la forma

$$\phi(x, t) = A(x) e^{i\omega\left(\frac{w(x)}{c_0} - t\right)}, \quad (14)$$

reemplazando (14) en (13), y luego de separar la parte real y parte imaginaria, obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\nabla^2 A(x) - A(x) \frac{\omega}{c_0^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right)^2 \right] = \frac{-\omega^2}{c_0^2} A(x)$$

y

$$2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \right] + A(x) \nabla^2 w = 0.$$

La primera de estas ecuaciones se puede escribir como

$$(\nabla w)^2 = \frac{c_0^2}{A(x)\omega^2} \nabla^2 A(x) + \left(\frac{c_0}{c(x)} \right)^2.$$

Para ondas de alta frecuencia el coeficiente del laplaciano es aproximadamente 0, quedando:

$$(\nabla w)^2 = \left(\frac{c_0}{c(x)} \right)^2 \quad \text{ó} \quad (\nabla T)^2 = \left(\frac{1}{c(x)} \right)^2, \quad \text{donde } T(x) = \frac{W(x)}{c_0}.$$

La anterior ecuación se conoce como la ecuación icónica. T tiene unidades de tiempo y se denomina “tiempo de tránsito”. En la expresión

$$\phi(x, t) = A(x) e^{i\omega(T(x)-t)}, \quad (15)$$

para un t fijo, tomando $T(x) = c$, se obtiene la ecuación de una superficie en el espacio, o sea el frente de onda, es decir, los puntos del espacio que son alcanzados por la perturbación en el mismo tiempo.

Una forma de resolver la ecuación icónica se conoce como método de las características, y consiste en transformar la ecuación diferencial parcial (EDP) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) (véase [3]). Dada la ecuación EDP:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

se reemplaza por el sistema

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{dz}{\sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}} = dt.$$

La solución de este sistema nos da las curvas características, como se muestra en la Figura 1.

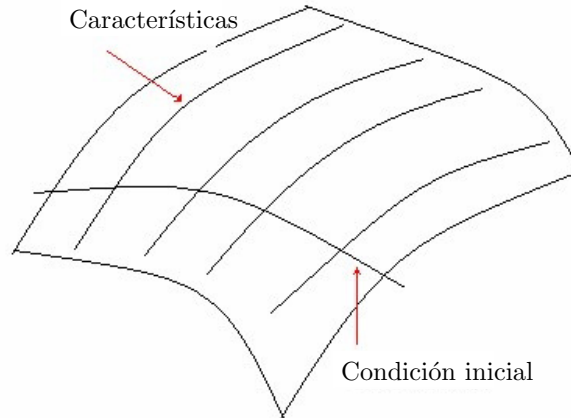


Figura 1. Superficies solución y curvas características.

El problema de resolver la ecuación icónica se puede analizar como un problema de Cauchy, dando la curva (superficie) que interseca a la superficie solución; de dicha curva se dice que es la condición inicial del problema.

5. La ecuación del rayo

Para medios isotrópicos los rayos se definen como las trayectorias ortogonales al frente de onda. Un rayo está caracterizado por una curva parametrizada $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Si utilizamos la parametrización de longitud de arco, los cosenos directores son $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, el vector tangente al rayo es paralelo a ∇T , vector ortogonal a la superficie solución de la ecuación icónica; este vector está formado por los cosenos directores, por lo cual se tiene

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad (17)$$

y

$$\frac{d}{ds}(x, y, z) = k\nabla T. \quad (18)$$

Al reemplazar (18) en (17) obtenemos

$$k^2 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = 1, \quad (19)$$

pero

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

corresponde a la ecuación icónica.

Haciendo $n = \frac{v_0}{c}$ podemos escribir la ecuación (18) como

$$n \frac{dx}{ds} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad n \frac{dy}{ds} = \frac{\partial T}{\partial y}, \quad n \frac{dz}{ds} = \frac{\partial T}{\partial z};$$

finalmente, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones haciendo $\vec{X} = (x, y, z)$:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c(x)} \frac{d\vec{X}}{ds} \right) = \nabla \left(\frac{1}{c(\vec{X})} \right). \quad (20)$$

La ecuación (20) es una ecuación de segundo orden. Si se quiere plantear para esta ecuación un problema de Cauchy, se deben dar las condiciones iniciales:

dirección del rayo $\left. \frac{dx}{ds} \right|_{s=s_0}$ y la posición inicial $\left. \vec{X} \right|_{s=s_0}$.

6. Algunos modelos de velocidad [4]

Un caso sencillo pero frecuente en sismica es aquel para el cual la velocidad c depende exclusivamente de la profundidad z , es decir $c = c(z)$. En este caso las dos primeras ecuaciones de (20) se escriben como

$$n \frac{dx}{ds} = c_1, \quad n \frac{dy}{ds} = c_2,$$

con c_1 y c_2 constantes. Resolviendo este par de ecuaciones se obtiene una recta en el plano xy , lo que significa que el rayo descansa sobre un plano perpendicular al plano xy . Se puede escoger dicho plano que sea coincidente con el plano xz ; por lo tanto, se tiene el sistema de ecuaciones reducido

$$n \frac{dx}{dz} = cte, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{dn}{dz}. \quad (21)$$

Los dos cosenos directores (ver Figura 2),

$$\frac{dx}{ds} = \text{sen}(i), \quad \frac{dz}{ds} = \text{cos}(i),$$

identifican las componentes del vector tangente al rayo en cada punto.

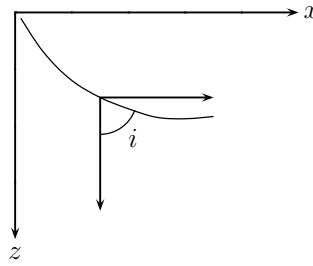


Figura 2. Trayectoria del rayo.

Tomando la primera de estas ecuaciones se obtiene $\frac{\text{sen } i}{c} = p$, siendo p una constante llamada el parámetro del rayo. El ángulo i es llamado el ángulo de incidencia, y da la inclinación del rayo con respecto a la vertical (el eje z en este caso). Ahora consideremos la segunda ecuación $\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (n \cos i) = \frac{dn}{dz}$. Aplicando la regla de la cadena al miembro izquierdo de esta ecuación se obtiene

$$\frac{dn}{dz} = \frac{d}{ds} (n \cos i) = -n \text{sen } i \frac{di}{ds} + \cos^2 i \frac{dn}{dz}, \quad (22)$$

de donde

$$\frac{di}{ds} = p \frac{dc}{dz}. \quad (23)$$

La ecuación (22) indica que la curvatura del rayo es proporcional a la variación de la velocidad. En el caso particular en que c es constante, esto indica que la curvatura del rayo es 0, es decir el rayo es un segmento de recta. Si la velocidad c es función lineal de la profundidad, z : $c = c_0 + c_1 z$, entonces (21) indica que la curvatura es constante, es decir el rayo corresponde a un arco de círculo de radio $R = \left(\frac{di}{ds} \right)^{-1} = (pc_1)^{-1}$. De la ecuación (22) podemos también concluir que si el modelo de velocidad es creciente, la concavidad de los rayos es hacia arriba; similarmente, si el modelo de velocidad es decreciente, la concavidad de los rayos es hacia abajo, como se ilustra en la Figura 3.

7. El tiempo de tránsito y el desplazamiento horizontal [4]

Recordando que para un rayo en particular el parámetro p es una constante, que puede ser especificado por las condiciones iniciales, ángulo y velocidad inicial, de la ecuación (21) se pueden deducir dos valores que son fundamentales para la generación posterior de los sismogramas sintéticos: el tiempo de tránsito desde la fuente hasta un punto en la superficie y la distancia horizontal desde la fuente hasta el punto de la superficie donde emerge el rayo.

Como

$$n \frac{dx}{dz} = cte, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{dn}{dz},$$

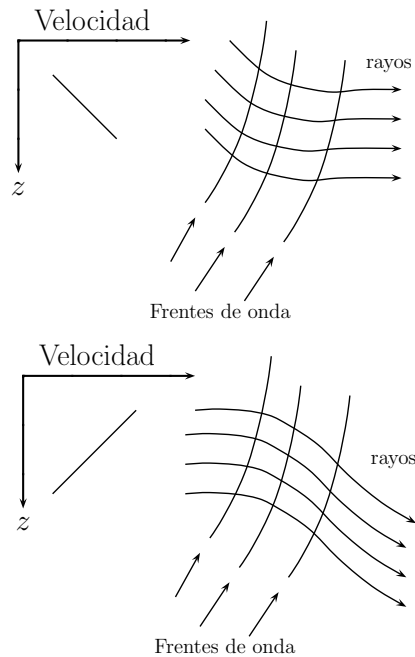


Figura 3. Modelo de velocidades y curvatura de rayos.

entonces

$$\text{sen } i = \frac{dx}{ds} = cp,$$

de donde

$$\cos i = \frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 i} = \sqrt{1 - c^2 p^2},$$

y por lo tanto

$$dx = ds \text{ sen } i = \frac{dz}{\cos i} cp,$$

obteniéndose $dx = \frac{cp}{\sqrt{1 - c^2 p^2}} dz$. Dados los puntos fuente y de recepción en la superficie, esta ecuación puede ser integrada en un intervalo de profundidad, lo que permite hallar la distancia horizontal $X(p)$ para el cual el rayo emerge a la superficie,

$$X(p) = 2 \int_0^{z \text{ máx}} \frac{cp}{\sqrt{1 - c^2 p^2}} dz, \quad (24)$$

siendo $z \text{ máx}$ la máxima profundidad de penetración del rayo. Similarmente se puede calcular el tiempo de tránsito T :

$$T = 2 \int_0^{z \text{ máx}} \frac{1}{C^2 \sqrt{1/c^2 - p^2}} dz. \quad (25)$$

Se puede expresar T en una forma desacoplada, o sea como la suma de un tiempo de tránsito horizontal y vertical:

$$T = pX + 2 \int_0^{z \text{ máx}} \sqrt{\gamma^2 - p^2} dz, \quad \text{donde } \gamma = 1/c. \quad (26)$$

En problemas concretos, los valores de T y X se pueden conocer por medio de mediciones. Para una estructura o modelo de velocidades desconocido se puede plantear el problema inverso de reconstruir $c(x, y, z)$ utilizando la ecuación (24) o la (25), resolviendo la ecuación integral de Fredholm de primera clase. Por lo general este problema inverso es un problema “mal puesto”, en el sentido de la no estabilidad de la solución, teniéndose que recurrir a algún proceso de regularización.

Por el contrario, si se parte de un hipotético modelo del subsuelo, en este caso el modelo de velocidades resolviendo las integrales (24) o (25), el modelo propuesto es muy cercano al modelo real, si las mediciones de T o X son muy parecidas a los valores calculados por medio de las integrales. En caso de una gran discrepancia, el modelo propuesto tiene que ser replanteado hasta lograr que la discrepancia sea lo más pequeña posible.

8. Conclusión

En este trabajo se presentaron en forma resumida los rudimentos básicos del modelamiento sísmico, haciendo énfasis en el método de trazado de rayos, donde la ecuación icónica es una aproximación de la ecuación de onda para estructuras suavemente no homogéneas; en la actualidad existen muchos trabajos de investigación que apuntan a buscar técnicas de trazado de rayos en estructuras complejas.

Uno de los problemas que tiene vigencia en estos momentos es el problema de trazar un rayo entre dos puntos: fuente y receptor (*two point seismic ray tracing* en inglés), problema de gran interés en sismica.

Desde el punto de vista matemático este es un problema típico de ecuaciones diferenciales con valor en la frontera. Los métodos más usuales para este problema son el método de disparo (*Shooting method*) y el método de flexiones (*Bending method*). En el primer método se resuelve la ecuación del rayo fijando las condiciones iniciales del mismo, esperando que el rayo solución pase por el punto final; de lo contrario, se toman otras condiciones iniciales, cambiando el ángulo inicial; este proceso se repite hasta que se satisfagan las condiciones de frontera.

En el segundo método se fijan los dos puntos (fuente y receptor), se toma un camino inicial entre ellos, y se perturba dicho camino en forma iterativa hasta que se satisfaga una condición extremal del principio de Fermat.

Para estos métodos existen diferentes propuestas para la obtención de algoritmos óptimos, a fin de aumentar la rapidez de convergencia, así como también para que sean robustos en cuanto a la estabilidad de los resultados.

Referencias

- [1] CERVENY V. “Ray Tracing Algorithms in Three-Dimensional Laterally Varying Layered Structures”, *Seismic Tomography*, 99-133, D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [2] BULANT Petr. “Two Point Tracing in 3-D”, Department of Geophysics, Charles University.
- [3] LUNERBURG R. K. *Mathematical Theory of Optics*, University Of California, Press Berkeley, 1964.
- [4] IORIO Valeria. *EDP Um Curso de Graduação*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), CNPq, 1991.
- [5] SLAWINSKY Michael. “On Elastic-Wave Propagation in Anisotropic Media: Reflexion/ Refraction Laws Ray Tracing and Travel Time Inversion”, Department of Geology and Geophysics, Calgary Alberta, 1996.

FLOR VIVAS, FRANCISCO CABRERA, JOSÉ LIZCANO
Universidad de Pamplona
Departamento de Física y Matemáticas
Grupo de Modelamiento y Simulación Computacional LATTICE
e-mail: fcabrera@unipamplona.edu.co