

Fractales, grafos y códigos

HÉBER MESA PALOMINO*

Resumen

Dados dos Sistemas Iterados de Funciones con igual número de contracciones inyectivas, se establece una condición suficiente, en términos de ciertos conjuntos (que llamamos el conjunto de intersecciones del SIF), para que los atractores correspondientes resulten homeomorfos.

1. Introducción

En matemáticas uno de los trabajos más interesantes es *caracterizar*; unos buscan caracterizar grupos, anillos; otros espacios métricos o topológicos, en fin; independientemente del área de trabajo, encontramos objetos similares ante nuestros propósitos y en el mejor de los casos uno de ellos nos representa los demás. En la geometría fractal encontramos muchos conjuntos con interesantes características (el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpiński, la curva de Koch, la esponja de Menger, etc.), cada uno de los cuales se puede generar mediante un Sistema Iterado de Funciones (SIF) (ver [1]), y cada uno constituye un espacio que es un cociente topológico del espacio de Cantor, suministrando así información “más clara” acerca de la naturaleza del conjunto. Pero aún subsiste la dificultad de analizar el cociente que en algunos casos es más complejo que el conjunto inicial, además no existe un criterio para saber si dos SIF generan conjuntos homeomorfos; en este artículo planteamos un nuevo camino en este estudio, considerando códigos asociados a ciertos puntos del espacio cociente.

El artículo se encuentra dividido en tres secciones; la primera (Preliminares) donde el lector encontrará todos los fundamentos teóricos de los siguientes

*Licenciado en matemáticas, Universidad Industrial de Santander EMAIL: heber_mesa@hotmail.com

capítulos y los resultados existentes en el tema: como la función φ que asocia códigos a los puntos del atractor (Teorema 1.1) y afirmar que el atractor de un SIF es homeomorfo a un espacio cociente de Cantor (Teorema 1.2); la segunda (Grafos) muestra como podemos asociar a cada atractor una familia de grafos, la cual puede representar propiedades del atractor como la conexidad; la tercera (Códigos) presenta una condición suficiente para que dos atractores bajo ciertas características sean homeomorfos basándose en los códigos asociados a los puntos del conjunto de intersecciones (Definición 3.1.1 y Proposición 3.1.3).

2. Preliminares

La palabra “fractal”, ha evolucionado durante los últimos años, Benoit B. Mandelbrot fue el primero en usar esta palabra para describir conjuntos con propiedades fuera de lo común, como tener una dimensión no entera o ser autosemejantes, entre otras; hoy en día los fractales se pueden considerar como atractores de SIF.

Definición 2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sean f_1, \dots, f_N contracciones sobre X ; se define $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ como un Sistema Iterado de Funciones.*

Definición 2.2. *Sea $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF; se define atractor del SIF como el punto fijo de F , donde F está definida por $F(B) = \bigcup_{i=1}^N f_i(B)$ para cada $B \subseteq X$ compacto y no vacío.*

En [1] podemos encontrar una descripción detallada de como funcionan los SIF, además de las demostraciones que aquí no presentamos, como por ejemplo que F es una contracción y por tanto todo SIF genera un único atractor.

Definición 2.3. *Sean $\Sigma = \{1, \dots, N\}$ y $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF; entonces $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ es llamado espacio de códigos asociado al SIF; (la métrica d_c se puede consultar en [1]).*

Definición 2.4. *Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de códigos asociado al SIF; para cada $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ se define $\phi(\alpha, n, x) = (f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n})(x)$.*

El siguiente teorema (cuya demostración se encuentra en [1]), presenta la función que hace posible relacionar el atractor con el espacio de los códigos,

así mismo veremos como esta función determina un cociente topológico del espacio de Cantor.

Teorema 2.1. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF, A su atractor y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de códigos asociado al SIF; se define $\varphi: (\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c) \rightarrow (A, d)$ por $\varphi(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x)$ para cada $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$; entonces $\varphi(\alpha)$ siempre existe, pertenece a A y es independiente de $x \in X$; además φ es continua y sobreyectiva.

Definición 2.5. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de los códigos asociado al SIF. Se define la relación \sim sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$ como $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Es fácil ver que esta relación es de equivalencia, y por lo tanto define un conjunto cociente sobre el espacio de los códigos asociado al SIF.

Teorema 2.2. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF, A su atractor y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de los códigos asociado al SIF. Entonces se tiene que $\Sigma^{\mathbb{N}} / \sim \cong A$.

La demostración del anterior teorema se puede encontrar en [2].

3. Grafos

Como hemos visto, los atractores de los SIF son homeomorfos a un cociente de Cantor (es bien sabido que el espacio de códigos es homeomorfo al espacio de Cantor); el conocer la naturaleza de estos conjuntos ha sido objeto de investigación durante los últimos años. El teorema 1.2 nos acerca bastante a este propósito, reduciendo el problema a conocer la relación de equivalencia que induce dicho cociente.

Considerando el espacio de los códigos como espacio topológico tenemos que los abiertos básicos son conjuntos donde todos los códigos empiezan por un mismo código finito $\alpha_1 \dots \alpha_k$; de esta manera podemos clasificar estos conjuntos en ciertos niveles, de acuerdo con la longitud del código finito con que se caractericen los elementos de dichos conjuntos. El nivel cero sería todo el espacio de los códigos; el primer nivel, los abiertos básicos cuyos códigos coinciden todos en la primera componente; el segundo nivel, los abiertos básicos cuyos códigos coinciden todos en la primera y la segunda componente; así sucesivamente. La relación \sim “identifica” códigos de un abierto básico con códigos de otro en un mismo nivel, en el sentido de que podemos encontrar dos códigos diferentes (salvo si $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$) que pertenecen a abiertos básicos diferentes del mismo nivel y están relacionados. El comportamiento de estas

“identificaciones” se puede visualizar mejor utilizando grafos. Construyamos una familia de grafos de acuerdo con los niveles ya descritos. En cada nivel se define un grafo de la siguiente manera: como vértices tomaremos los abiertos básicos y cada arista unirá dos vértices si y sólo si existen dos códigos (uno en cada abierto) tal que están relacionados.

Uno de los ejemplos clásicos de este tipo de construcción se encuentra en *el triángulo de Sierpiński*, presentado en 1916 por Waclaw SIERPIŃSKI (1882-1969). La figura 1 muestra los grafos para los primeros cuatro niveles; en este conjunto esta familia de grafos se puede definir sin usar la codificación ya que la relación que determina el cociente homeomorfo al triángulo de Sierpiński está caracterizada por completo (véase [2]), es decir, conocemos todos los códigos que se relacionan.

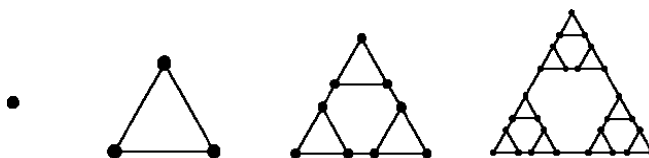


Figura 3.1: Grafos para el triángulo de Sierpiński.

Consideremos el siguiente SIF $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$, donde:

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \\ f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

y cuyo atractor es conocido como Cristales (figura 2).

Los grafos de los niveles uno y dos para Cristales aparecen en la figura 3.

El hecho de relacionar los grafos con los fractales puede resultar de gran utilidad; así, a cada atractor se le puede asociar una familia de grafos, ya que si para dos atractores tenemos que los grafos de cada nivel son isomorfos, entonces los atractores son homeomorfos (la demostración se puede encontrar en [4]); pero aún tenemos un problema: a fin de conocer los grafos de cada nivel para el atractor de un SIF, debemos conocer la relación, es decir, conocer los códigos que se relacionan y cómo se relacionan. Esperamos que lo que sigue sea útil para este propósito.

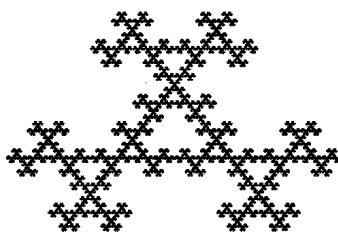


Figura 3.2: Cristales.

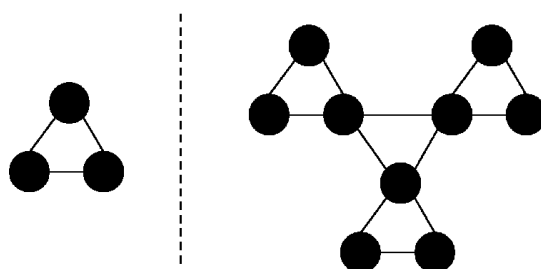


Figura 3.3: Grafos para Cristales.

4. Códigos

Cuando hablamos del *espacio de los códigos asociado al SIF*, lo que hacemos es “direccionar” los puntos del atractor utilizando un código semiinfinito sobre el alfabeto Σ ; es posible que dos códigos representen el mismo punto, y de ahí la relación ya definida; existen conjuntos en los cuales la relación se conoce explícitamente, como es el caso del triángulo de Sierpiński, donde la relación se puede redefinir como: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta) \vee (\exists \sigma \in \Sigma^*) \langle (\alpha, \beta \in \{\sigma 12^*, \sigma 21^*\}) \vee (\alpha, \beta \in \{\sigma 13^*, \sigma 31^*\}) \vee (\alpha, \beta \in \{\sigma 23^*, \sigma 32^*\}) \rangle$, donde Σ^* es el conjunto de códigos finitos sobre el alfabeto Σ incluyendo el código vacío λ y $a^* = aaa \dots$. El hecho de conocer la relación nos permite dibujar el grafo de cualquier nivel, aun más, caracterizarlos usando sólo teoría de grafos, es decir, en términos de vértices, aristas, grado de los vértices, conexidad, etc.

El problema de conocer la relación que induce a todas estas formas de trabajo puede simplificarse (por lo menos cuando las funciones son inyectivas) si conocemos ciertas características de esta relación y tenemos en cuenta el “comportamiento” en ciertos puntos, como veremos a continuación.

4.1. Caracterización

A continuación sólo consideraremos SIF de contracciones inyectivas. Si existe $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\alpha) = x$ diremos simplemente que, x tiene código α .

A continuación definiremos un subconjunto del atractor, tal que los códigos asociados a sus puntos nos brindarán toda la información necesaria acerca de \sim en todo el atractor.

Definición 4.1. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF de funciones inyectivas y A su atractor; definiremos el conjunto de intersecciones Γ como

$$\Gamma = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} f_i(A) \cap f_j(A).$$

Sea $\sigma \in \Sigma^*$, ($\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k, \sigma_i \in \Sigma \cup \{\lambda\}$), notemos $f_\sigma = f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}$ y $f_\lambda = \iota$, donde ι es la función identidad.

Proposición 4.1. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF de funciones inyectivas, A su atractor y $x \in A$; entonces x tiene más de un código si y sólo si $x \in f_\sigma(\Gamma)$ para algún $\sigma \in \Sigma^*$.

Demostración. Si $x \in A$ tiene más de un código, entonces existen $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tales que $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots, \beta = \beta_1 \beta_2 \dots, \alpha \neq \beta$ y $x = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Consideremos las primeras i componentes iguales de cada código, de manera que $\alpha_{i+1} \neq \beta_{i+1}$; llamemos $\sigma_1 = \alpha_1 = \beta_1, \dots, \sigma_i = \alpha_i = \beta_i, \sigma = \sigma_1 \dots \sigma_i, \alpha' = \alpha_{i+2} \dots, \beta' = \beta_{i+2} \dots$; entonces $x = \varphi(\sigma \alpha_{i+1} \alpha') = \varphi(\sigma \beta_{i+1} \beta')$, luego tenemos que $x = f_\sigma(f_{\alpha_{i+1}}(\varphi(\alpha'))) = f_\sigma(f_{\beta_{i+1}}(\varphi(\beta')))$; dado que $\alpha', \beta' \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, tenemos que $\varphi(\alpha'), \varphi(\beta') \in A$; teniendo en cuenta que f_j es inyectiva para $1 \leq j \leq N$, podemos concluir que $x \in f_\sigma(f_{\alpha_{i+1}}(A)) \cap f_\sigma(f_{\beta_{i+1}}(A)) = f_\sigma(f_{\alpha_{i+1}}(A) \cap f_{\beta_{i+1}}(A))$; recordando que $\alpha_{i+1} \neq \beta_{i+1}$, es claro que $f_{\alpha_{i+1}}(A) \cap f_{\beta_{i+1}}(A) \subseteq \Gamma$, por tanto $x \in f_\sigma(\Gamma)$.

Recíprocamente: si $x \in f_\sigma(\Gamma)$ y $\sigma = \lambda$, tendríamos que $x \in \Gamma$, entonces existen $i, j \in \Sigma$ con $i \neq j$ tales que $x \in f_i(A) \cap f_j(A)$, es decir, existe $y \in A$ para el cual $f_i(y) = f_j(y) = x$, dado que φ es sobreyectiva, se tiene que existe $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\alpha) = y$, por tanto $\varphi(i\alpha) = \varphi(j\alpha) = x$, luego x tiene por lo menos dos códigos; si $\sigma \neq \lambda$, entonces existe $y \in \Gamma$ tal que $f_\sigma(y) = x$, luego y tiene al menos dos códigos. Sean estos α y β ; se tiene entonces que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = y$, lo que implica $\varphi(\sigma\alpha) = \varphi(\sigma\beta) = x$, luego x tiene más de un código. ■ □

Ahora podemos caracterizar la relación \sim de la siguiente manera:

Proposición 3.1.2. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF de funciones inyectivas

y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de códigos asociado al SIF; entonces:

$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta) \vee (\exists x \in f_\sigma(\Gamma))(\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = x)$ (para algún $\sigma \in \Sigma^*$).

Demostración Sean $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, tales que $\alpha \sim \beta$. Si $\alpha = \beta$, nuestra demostración termina; si $\alpha \neq \beta$, tendríamos que $\exists x \in A$ tal que $x = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, es decir x tiene más de un código; utilizando la proposición 3.1.1 tenemos que $x \in f_\sigma(\Gamma)$ para algún $\sigma \in \Sigma^*$. El otro sentido de la demostración es trivial. ■

Estas proposiciones ofrecen un nuevo punto de vista del problema, ya que si deseamos conocer la relación, basta con conocer los códigos que se asocian a los puntos del conjunto de intersecciones Γ . En el caso que $\Gamma = \emptyset$, es claro que se tendría que $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$, en tal caso el atractor es homeomorfo al espacio de Cantor.

La siguiente proposición presenta una condición suficiente en términos del conjunto de intersecciones para determinar si dos atractores de SIF con igual número de contracciones inyectivas son homeomorfos.

Proposición 3.1.3. Sean $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ y $\{Y; h_1, \dots, h_N\}$ dos SIF de funciones inyectivas con atractores A y A' y conjuntos de intersecciones Γ y Γ' , respectivamente. Si $\exists \Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ biyectiva tal que $\forall x \in \Gamma$ se tiene $\varphi(\alpha) = x \Leftrightarrow \varphi'(\alpha) = \Psi(x)$, con $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, entonces $A \cong A'$.

Demostración. Demostremos que $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \sim' \beta$. Si $\alpha \sim \beta$ entonces $\alpha = \beta$ (lo cual implica $\alpha \sim' \beta$) o existe $x \in \Gamma$ tal que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(x)$ para algún $\sigma \in \Sigma^*$ (proposición 3.1.2), específicamente σ corresponde a las primeras i componentes iguales entre α y β ; es decir $\alpha = \sigma\alpha', \beta = \sigma\beta', \alpha' \neq \beta'$ y $\varphi(\alpha') = \varphi(\beta') = x$, luego $\varphi'(\alpha') = \varphi'(\beta') = \Psi(x)$, lo que a su vez implica $\varphi'(\sigma\alpha') = \varphi'(\sigma\beta') = h_\sigma(\Psi(x))$, es decir, $\alpha \sim' \beta$. El recíproco se realiza análogamente utilizando Ψ^{-1} ; luego $\Sigma^{\mathbb{N}} / \sim = \Sigma^{\mathbb{N}} / \sim'$ y $A \cong A'$. ■

Esta última proposición afirma, en pocas palabras, que si para cada elemento del conjunto de intersecciones de un atractor encontramos un elemento del conjunto de intersecciones del otro atractor tal que sus códigos coinciden, y viceversa, entonces los atractores correspondientes son homeomorfos. Veamos un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos los siguientes SIF de funciones inyectivas:

$\{\mathbb{R}; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ y $\{\mathbb{R}^2; h_1, h_2, h_3, h_4\}$, donde $f_1(x) = \frac{1}{4}x$, $f_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, $f_3(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ y $f_4(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$;

$$\begin{aligned}
h_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
h_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
h_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
h_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El atractor del primer SIF es el intervalo $I = [0, 1]$, mientras que el atractor del segundo SIF es la conocida “curva de Koch” (\mathcal{K}).



Figura 4.4: Intervalo $[0, 1]$



Figura 4.5: Curva de Koch

Considerando el conjunto de intersecciones de cada SIF y los códigos de estos puntos podemos demostrar fácilmente que estos conjuntos son homeomorfos.

$$\begin{aligned}
\Gamma_I &= \{\varphi_I(21^*) = \varphi_I(14^*), \varphi_I(24^*) = \varphi_I(31^*), \varphi_I(34^*) = \varphi_I(41^*)\} \\
\text{y } \Gamma_{\mathcal{K}} &= \{\varphi_{\mathcal{K}}(21^*) = \varphi_{\mathcal{K}}(14^*), \varphi_{\mathcal{K}}(24^*) = \varphi_{\mathcal{K}}(31^*), \varphi_{\mathcal{K}}(34^*) = \varphi_{\mathcal{K}}(41^*)\}
\end{aligned}$$

La función Ψ es evidente y, usando la proposición 3.1.3, $I \cong \mathcal{K}$.

Si deseamos construir los grafos de un atractor en cada nivel, basta con conocer los códigos de cada punto de Γ . El grafo del nivel cero siempre es un vértice sin arcos; el grafo del primer nivel es un grafo con N vértices y una arco entre dos vértices, dependiendo de la primera componente de los códigos

de los puntos de Γ ; el grafo del nivel $n + 1$ es un grafo con N copias del grafo del nivel n , unidas entre sí dependiendo de la componente $n + 1$ de los códigos de los puntos de Γ ; esto es una consecuencia de la autosimilaridad de estos conjuntos (véase [3]).

De esta manera hemos reducido el problema de conocer los fractales a conocer los códigos de ciertos puntos.

Referencias

- [1] BARNESLEY Michael F. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Cambridge, MA, 1989.
- [2] MESA Héber. *El triángulo de Sierpiński*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 2002.
- [3] SABOGAL Sonia. "Sobre autosemejanza topológica, Parte I." *Revista Integración*.
- [4] SABOGAL Sonia. *Auto semejanza en topología y algunas extensiones de la dualidad de Stone*. Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 2000.