Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 19, No 1, p. 23–36, enero-junio de 2001

Construção de soluções solitônicas das equações de Einstein

Guillermo A. González*

Resumen

Se faz o estudo do Método do Espalhamento Inverso para a construção de soluções das equações de Einstein no vazio. A construção de soluções para o caso no qual a solução particular é uma métrica diagonal é apresentada brevemente. Finalmente, expressões explícitas para soluções com dois sólitons são apresentadas.

1 Introdução

Um problema importante na teoria da Relatividade Geral é a obtenção de soluções exatas das equações de Einstein que correspondam a configurações de matéria fisicamente realistas. Porém, a obtenção de soluções exatas é um problema de alta complexidade, o qual só tem sido resolvido em casos simples altamente simétricos. Dentro deste contexto, tem-se desenvolvido nas duas últimas décadas diversas técnicas para a obtenção de soluções exatas, as quais não só reproduzem importantes resultados já conhecidos, mas também geram novas soluções [1].

O Método do Espalhamento Inverso, também chamado de Método Solitônico ou Método da Vestimenta ("Vesture"), desenvolvido por Belinsky e Zakharov [2, 3], é uma das mais eficientes técnicas para a geração de soluções às equações de Einstein no vazio para o caso em que o tensor métrico só depende de duas variáveis. O Método do Espalhamento Inverso baseia-se na solução explícita de um sistema sobredeterminado de equações diferenciais parciais acopladas com coeficientes que dependem de uma solução particular dada das equações

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Santander, Colombia, Email: guillego@uis.edu.co

de Einstein no vazio. Quando é aplicado ao caso de soluções estacionárias com simetria axial, o Método do Espalhamento Inverso tem provado ser de grande utilidade para a obtenção de muitas novas soluções, assim como também para gerar quase todas as soluções importantes conhecidas [4 - 10].

O objetivo do presente trabalho é o estudo do Método do Espalhamento Inverso para a construção de soluções das equações de Einstein no vazio. O plano geral do trabalho é o seguinte. Na seção 2 é apresentado um breve resumo dos aspectos principais do método, seguindo o tratamento dado nas referências [2, 3]. A construção de soluções solitônicas para o caso no qual a solução particular é uma métrica diagonal é apresentada brevemente na seção 3 seguindo as referências [3, 6]. Finalmente, na seção 4, expressões explícitas para soluções com dois sólitons são apresentadas com base em [6, 9]. Algumas soluções estáticas do tipo Weyl são apresentadas em 4.1, e a solução de Kerr-NUT é apresentada em 4.2.

2 O Método do espalhamento inverso

A métrica para um espaço-tempo axialmente simétrico pode-se escrever como

$$ds^2 \;=\; e^{(\Lambda-\Phi)}(dr^2+dz^2) \;+\; G_{AB}dx^A dx^B, \tag{2.1}$$

onde $x^A = (t, \varphi)$ e a matriz G_{AB} é dada por

$$G = -\begin{pmatrix} e^{\Phi} & \mathcal{W}e^{\Phi} \\ \mathcal{W}e^{\Phi} & \mathcal{W}^2 e^{\Phi} - \mathcal{R}^2 e^{-\Phi} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

de tal forma que $\det G = -\mathcal{R}^2$.

As equações de Einstein no vazio levam ao seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} &(\mathcal{R}G_{AB,r}G^{BC})_{,r} \;+\; (\mathcal{R}G_{AB,z}G^{BC})_{,z} = 0, \\ (\ln\mathcal{R})_{,r}\;\Psi_{,z} \;+\; (\ln\mathcal{R})_{,z}\;\Psi_{,r} \;&=\; 2\,(\ln\mathcal{R})_{,rz} \;-\; \tfrac{1}{2}\,G_{AB,r}G^{AB}{}_{,z}, \\ (\ln\mathcal{R})_{,r}\;\Psi_{,r} \;-\; (\ln\mathcal{R})_{,z}\;\Psi_{,z} \;&=\; (\ln\mathcal{R})_{,rr} \;-\; \tfrac{1}{4}\,G_{AB,r}G^{AB}{}_{,r} \\ &-\; (\ln\mathcal{R})_{,zz} \;+\; \tfrac{1}{4}\,G_{AB,z}G^{AB}{}_{,z}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\Psi = \Lambda - \Phi$.

Tomando o traço da primeira equação no sistema anterior, obtemos a equação de Laplace em duas dimensões,

$$\mathcal{R}_{,rr} \; + \; \mathcal{R}_{,zz} \; = \; 0, \tag{2.4}$$

de modo que a função $\mathcal{R}(r,z)$ pode ser considerada como a parte real de uma função analítica $\mathcal{F}(\nu) = \mathcal{R}(r,z) + i\mathcal{Z}(r,z)$, onde $\nu = r + iz$. A função $\mathcal{F}(\nu)$ define então uma transformação conforme das coordenadas,

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \mathcal{R}(r,z), \\ z &\rightarrow \mathcal{Z}(r,z), \end{aligned} \tag{2.5}$$

de tal forma que a métrica (2.1) pode-se escrever como

$$ds^2 \; = \; e^{(\tilde{\Lambda}-\Phi)}(d\mathcal{R}^2 \; + \; d\mathcal{Z}^2) \; + \; G_{AB}dx^A dx^B, \tag{2.6}$$

onde $\tilde{\Lambda}(\mathcal{R},\mathcal{Z}) = \Lambda(r,z) - \ln|\mathcal{F}'(\nu)|^2$. As coordenadas $(t,\varphi,\mathcal{R},\mathcal{Z})$ são chamadas de coordenadas de Weyl [11, 12].

Com a métrica escrita da forma anterior, as equações de Einstein (2.3) escrevem-se como

$$(\mathcal{R}G_{AB,\mathcal{R}}G^{BC})_{,\mathcal{R}} \; + \; (\mathcal{R}G_{AB,\mathcal{Z}}G^{BC})_{,\mathcal{Z}} \; = \; 0, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{,\mathcal{R}} &= -\tfrac{1}{\mathcal{R}} + \tfrac{1}{4\mathcal{R}} Tr\{U^2 - V^2\}, \\ \tilde{\Psi}_{,\mathcal{Z}} &= \tfrac{1}{2\mathcal{R}} Tr\{UV\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\tilde{\Psi} = \tilde{\Lambda} - \Phi$ e as matrizes U e V estão definidas através das relações

$$U \; = \; \mathcal{R}G_{,\mathcal{R}}G^{-1} \quad , \quad V \; = \; \mathcal{R}G_{,\mathcal{Z}}G^{-1}. \tag{2.9}$$

É fácil verificar que a condição de integrabilidade do sistema sobredeterminado de equações (2.8) está garantida automaticamente se a matriz G satisfaz o sistema de equações (2.7); assim, conhecendo uma solução para o sistema (2.7), a função $\tilde{\Lambda}(\mathcal{R},\mathcal{Z})$ pode-se obter através da integração das equações (2.8).

Das relações (2.9) e do sistema de equações (2.7) pode-se ver fácilmente que as matrizes U e V satisfazem o sistema de equações

$$\begin{aligned} U_{,\mathcal{R}} \; + \; V_{,\mathcal{Z}} &= 0, \\ V_{,\mathcal{R}} \; - \; U_{,\mathcal{Z}} &= \tfrac{1}{\mathcal{R}} \, \{[U,V] \; + \; V\}, \end{aligned}$$

onde $[U, V] = UV - VU$. Vamos agora representar este sistema de equações na forma de condições de compatibilidade para um sistema sobredeterminado mais geral de equações matriciais [2, 3].

Sejam $D_{\mathcal{R}}$ e $D_{\mathcal{Z}}$ operadores diferenciais lineares definidos como (ver [3])

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{R}} &= \partial_{\mathcal{R}} + \frac{2\lambda\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\partial_\lambda, \\ D_{\mathcal{Z}} &= \partial_{\mathcal{Z}} - \frac{2\lambda^2}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\partial_\lambda, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde λ é um parâmetro complexo independente das coordenadas $\mathcal{R}$, $\mathcal{Z}$. É fácil ver que o sistema (2.10) é completo; isto é, $[D_{\mathcal{R}}, D_{\mathcal{Z}}] = 0$. Vamos considerar a função matricial complexa $\psi(\lambda, \mathcal{R}, \mathcal{Z})$ e o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{R}}\psi &= \frac{\mathcal{R}U + \lambda V}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\psi, \\ D_{\mathcal{Z}}\psi &= \frac{\mathcal{R}V - \lambda U}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\psi, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde as matrizes U, V são reais e não dependem do parâmetro λ. As condições de compatibilidade deste sistema são equivalentes ao sistema (2.10).

Uma solução do sistema (2.11) proporciona uma solução G das equações de Einstein dada pelo valor da matriz ψ para $\lambda = 0$,

$$G(\mathcal{R}, \mathcal{Z}) = \psi(0, \mathcal{R}, \mathcal{Z}). \tag{2.12}$$

Seja G_0 uma solução particular do sistema (2.7), com a qual podem ser obtidas as correspondentes matrizes U_0, V_0 e ψ_0. Vamos procurar soluções do sistema (2.11) da forma

$$\psi(\lambda, \mathcal{R}, \mathcal{Z}) = \mathcal{X}(\lambda, \mathcal{R}, \mathcal{Z})\psi_0(\lambda, \mathcal{R}, \mathcal{Z}). \tag{2.13}$$

A condição de que a matriz G seja real é equivalente às condições (ver [2])

$$\bar{\mathcal{X}}(\bar{\lambda}) = \mathcal{X}(\lambda) \quad , \quad \bar{\psi}(\bar{\lambda}) = \psi(\lambda), \tag{2.14}$$

onde a barra denota o complexo conjugado, enquanto que a condição de que a matriz G seja simétrica leva à condição (ver [2])

$$G = \mathcal{X}(\lambda)G_0\mathcal{X}^T(\upsilon) = \mathcal{X}(\upsilon)G_0\mathcal{X}^T(\lambda), \tag{2.15}$$

onde o T denota a transposta e $\upsilon = -\mathcal{R}^2/\lambda$.

Considerando que a matriz ψ_0 satisfaz o sistema (2.11), obtém-se para a matriz $\mathcal{X}$ o sistema de equações

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{R}}\mathcal{X} &= \left(\frac{\mathcal{R}U + \lambda V}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\right)\mathcal{X} \;-\; \mathcal{X}\left(\frac{\mathcal{R}U_0 + \lambda V_0}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\right), \\ D_{\mathcal{Z}}\mathcal{X} &= \left(\frac{\mathcal{R}V - \lambda U}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\right)\mathcal{X} \;-\; \mathcal{X}\left(\frac{\mathcal{R}V_0 - \lambda U_0}{\mathcal{R}^2 + \lambda^2}\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

com as condições adicionais

$$\mathcal{X}(0, \mathcal{R}, \mathcal{Z}) \;=\; GG_0^{-1} \quad , \quad \mathcal{X}(\infty, \mathcal{R}, \mathcal{Z}) \;=\; I, \tag{2.17}$$

onde I é a matriz identidade.

3 Construção de soluções solitônicas

As soluções solitônicas para a matriz G correspondem à presença de pólos da matriz $\mathcal{X}(\lambda, \mathcal{R}, \mathcal{Z})$ no plano complexo do parâmetro espectral λ, ver [2, 3]. Vamos considerar o caso geral, no qual a matriz $\mathcal{X}$ tem n pólos simples. A matriz $\mathcal{X}(\lambda, \mathcal{R}, \mathcal{Z})$ pode-se então representar na forma

$$\mathcal{X} \;=\; I \;+\; \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{\lambda - \mu_k}, \tag{3.1}$$

onde as matrizes X_k e as funções μ_k só dependem das variáveis $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Z}$.

As funções μ_k são determinadas através da substituição da expressão (3.1) no sitema (2.16). Requerendo que no lado esquerdo das equações (2.16) não existam pólos de segunda ordem nos pontos $\lambda = \mu_k$ obtém-se para as funções μ_k as equações (ver [3])

$$\mu_{k,\mathcal{R}} \;=\; \frac{2\mathcal{R}\mu_k}{\mathcal{R}^2 + \mu_k^2} \;,\; \mu_{k,\mathcal{Z}} \;=\; \frac{-2\mu_k^2}{\mathcal{R}^2 + \mu_k^2}, \tag{3.2}$$

cujas soluções podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \mu_k &= \alpha_k - \mathcal{Z} \;\pm\; R_k, \\ R_k &= \sqrt{(\alpha_k - \mathcal{Z})^2 + \mathcal{R}^2}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os α_k são constantes arbitrárias, geralmente complexas.

A relação $\mathcal{X}(\mu_k)\mathcal{X}^{-1}(\mu_k) = I$ implica que $X_k\mathcal{X}^{-1}(\mu_k) = 0$; isto é, as matrizes X_k são degeneradas e assim as suas componentes podem-se escrever como

$$(X_k)_{AB} \;=\; n_A^{(k)} m_B^{(k)}. \tag{3.4}$$

Os vetores $m_A^{(k)}$ podem ser obtidos requerendo que as equações (2.16) sejam satisfeitas nos pólos $\lambda = \mu_k$, e os vetores $n_A^{(k)}$ podem ser determinados através da relação (2.17).

Os vetores $m_A^{(k)}$ podem ser exprimidos fácilmente em termos de uma solução particular ψ_0 das equações (2.11) introduzindo as matrizes

$$M^{(k)} \;=\; \psi_0^{-1}(\mu_k, \mathcal{R}, \mathcal{Z}), \tag{3.5}$$

de forma que

$$m_A^{(k)} \;=\; M_{AB}^{(k)} m_{0B}^{(k)}, \tag{3.6}$$

onde os $m_{0B}^{(k)}$ são vetores constantes arbitrários. Os vetores $n_A^{(k)}$ podem ser escritos como

$$n_A^{(k)} \;=\; \sum_{l=1}^{n} \frac{(\Gamma)_{kl}^{-1} N_A^{(l)}}{\mu_k}, \tag{3.7}$$

onde os vetores $N_A^{(k)}$ e a matriz Γ_{kl} estão dados por

$$\begin{aligned} N_A^{(k)} \;&=\; (G_0)_{AB} m_B^{(k)}, \\ \Gamma_{kl} \;&=\; \frac{m_A^{(k)}(G_0)_{AB} m_B^{(l)}}{\mathcal{R}^2 + \mu_k\mu_l}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

A matriz G_0 é uma solução particular dada das equações (2.7). Claramente, Γ_{kl} é uma matriz simétrica.

A solução G pode-se então escrever como (ver [3, 6])

$$G_{AB} \;=\; (G_0)_{AB} \;-\; \sum_{k,l=1}^{n} \frac{(\Gamma)_{kl}^{-1} N_A^{(k)} N_B^{(l)}}{\mu_k\mu_l}. \tag{3.9}$$

Para garantir que a matriz G seja real, é preciso escolher as constantes arbitrárias $m_{0A}^{(k)}$ de tal forma que os vetores $m_A^{(k)}$ correspondentes aos pólos reais $\lambda = \mu_k$ sejam reais e que os vetores $m_A^{(p)}$ e $m_A^{(q)}$ correspondentes aos pólos complexos conjugados $\lambda = \mu_p$ e $\lambda = \mu_q = \bar{\mu}_p$ sejam complexos conjugados um do outro.

O determinante da matriz G assim obtida está dado por

$$\det G \;=\; (-1)^n \mathcal{R}^{2n} \prod_{k=1}^{n} \mu_k^{-2} \;\det G_0, \tag{3.10}$$

de tal forma que G não satisfaz a condição $\det G = -\mathcal{R}^2$. Para resolver este problema definimos a matriz

$$\mathcal{G} \;=\; \mathcal{R}\; G\; (|\det G|)^{-1/2}, \tag{3.11}$$

a qual satisfaz as equações (2.7) e, se $\det G_0 = -\mathcal{R}^2$ e n é um número par, $\det \mathcal{G} = -\mathcal{R}^2$.

A integração das equações (2.8) pode-se realizar explícitamente (ver [2, 3, 6]) e o resultado pode-se escrever na forma

$$\tilde{\Psi}_n = \tilde{\Psi}_0 + \ln\left[\mathcal{R}^{-n^2/2} \det\Gamma \prod_{k=1}^{n} \mu_k^{n+1} \prod_{k>l}^{n} (\mu_k - \mu_l)^{-2}\right] + \ln C_n, \tag{3.12}$$

onde as C_n são constantes arbitrárias.

Vamos procurar soluções ψ_0 das equações (2.11) associadas com métricas diagonais da forma

$$ds^2 = -\; e^{\Phi_0} dt^2 \;+\; e^{-\Phi_0}[\mathcal{R}^2 d\varphi^2 \;+\; e^{\tilde{\Lambda}_0}(d\mathcal{R}^2 + d\mathcal{Z}^2)], \tag{3.13}$$

onde as funções Φ_0 e $\tilde{\Lambda}_0$ dependem só das coordenas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Z}$. As equações de Einstein (2.3) neste caso são equivalentes ao sistema

$$\begin{gathered} \Phi_{0,\mathcal{R}\mathcal{R}} \;+\; \tfrac{1}{\mathcal{R}}\Phi_{0,\mathcal{R}} \;+\; \Phi_{0,\mathcal{Z}\mathcal{Z}} = 0, \\ \tilde{\Lambda}_0 = \tfrac{1}{2}\int \mathcal{R}[(\Phi_{0,\mathcal{R}}^2 - \Phi_{0,\mathcal{Z}}^2) d\mathcal{R} + 2\Phi_{0,\mathcal{R}}\Phi_{0,\mathcal{Z}} d\mathcal{Z}]. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Estas soluções das equações de Einstein no vazio são conhecidas como soluções de Weyl ou métricas de Weyl, ver [11, 12].

Dado que a matriz G_0 para a métrica (3.13) é diagonal, pode-se considerar que a função associada ψ_0 é também uma matriz diagonal. Supondo esta condição, as equações (2.11) levam ao sistema

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\partial_{\mathcal{R}} - \lambda\partial_{\mathcal{Z}} + 2\lambda\partial_\lambda)\det\psi_0 &= 2\det\psi_0, \\ (\mathcal{R}\partial_{\mathcal{Z}} + \lambda\partial_{\mathcal{R}})\det\psi_0 &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

com a condição $\det\psi_0(0,\mathcal{R},\mathcal{Z}) = -\mathcal{R}^2$. Uma solução é

$$\det\psi_0 \;= \lambda^2 \;+\; 2\lambda\mathcal{Z} \;-\mathcal{R}^2. \tag{3.16}$$

Uma solução mais geral é obtida somando à anterior o termo $c\lambda$, onde c é uma constante arbitrária. Porém, tal termo só introduz uma redefinição das constantes arbitrárias no resultado final.

A matriz ψ_0 pode ser escrita como (ver [6])

$$\psi_0 \;=\; -\begin{pmatrix} e^F & 0 \\ 0 & \det\psi_0 e^{-F} \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

de tal forma que as equações (2.11) são equivalentes às equações

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\partial_{\mathcal{R}} - \lambda\partial_{\mathcal{Z}} + 2\lambda\partial_\lambda)F \;&=\; \mathcal{R}\Phi_{0,\mathcal{R}}, \\ (\mathcal{R}\partial_{\mathcal{Z}} + \lambda\partial_{\mathcal{R}})F \;&=\; \mathcal{R}\Phi_{0,\mathcal{Z}}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

com a condição $F(0,\mathcal{R},\mathcal{Z}) = \Phi_0(\mathcal{R},\mathcal{Z})$. A condição de integrabilidade para F é a primeira das equações (3.14).

Nas expressões finais (3.9) para a matriz G e (3.12) para a função $\tilde{\Psi}$ só é preciso conhecer a matriz ψ_0 ao longo das trajetórias dos pólos $\lambda = \mu_k$; assim, para construir as soluções solitônicas necessita-se conhecer apenas as funções $F_k \;\equiv\; F|_{\lambda=\mu_k}$. Considerando as equações (3.2) e (3.18), obtém-se para as funções F_k o sistema de equações

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\ F_{k,\mathcal{R}} \;-\; \mu_k\ F_{k,\mathcal{Z}} \;&=\; \mathcal{R}\ \Phi_{0,\mathcal{R}}, \\ \mathcal{R}\ F_{k,\mathcal{Z}} \;+\; \mu_k\ F_{k,\mathcal{R}} \;&=\; \mathcal{R}\ \Phi_{0,\mathcal{Z}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

cuja solução é

$$F_k = \int \frac{\mathcal{R}}{2\mu_k}[(\mu_{k,\mathcal{R}}\Phi_{0,\mathcal{R}} - \mu_{k,\mathcal{Z}}\Phi_{0,\mathcal{Z}})d\mathcal{R} + (\mu_{k,\mathcal{R}}\Phi_{0.\mathcal{Z}} + \mu_{k,\mathcal{Z}}\Phi_{0,\mathcal{R}})d\mathcal{Z}]. \tag{3.20}$$

A existência da solução (3.20) está garantida pelo fato de que $\ln\mu_k$ é solução da primeira das equações (3.14).

4 Soluções com dois sólitons

Soluções com dois sólitons são definidas como aquelas soluções obtidas usando uma matriz $\mathcal{X}$ com dois pólos, os quais são reais ou complexos conjugados um do outro. As expressões para a matriz $\mathcal{G}$ podem ser escritas na forma [6, 9]

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{tt} &= \frac{[\mathcal{R}(\mu_2-\mu_1)Q_1]^2-[(\mathcal{R}^2+\mu_1\mu_2)Q_2]^2}{[\mathcal{R}(\mu_2-\mu_1)S_1]^2+[(\mathcal{R}^2+\mu_1\mu_2)S_2]^2}\,(e^{\Phi_0}),\\
\mathcal{G}_{t\varphi} &= \frac{4\mu_1\mu_2\mathcal{R}(\alpha_1-\alpha_2)(p_2q_2R_2T_1-p_1q_1R_1T_2)}{[\mathcal{R}(\mu_2-\mu_1)S_1]^2+[(\mathcal{R}^2+\mu_1\mu_2)S_2]^2},\\
\mathcal{G}_{\varphi\varphi} &= \frac{[\mathcal{R}(\mu_2-\mu_1)P_1]^2-[(\mathcal{R}^2+\mu_1\mu_2)P_2]^2}{[\mathcal{R}(\mu_2-\mu_1)S_1]^2+[(\mathcal{R}^2+\mu_1\mu_2)S_2]^2}\,(-\mathcal{R}^2e^{-\Phi_0}),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

e a função $\tilde{\Psi}$ pode-se escrever como

$$\tilde{\Psi}=\tilde{\Psi}_0\;+\;\ln\left\{\frac{[\mathcal{R}(\mu_2-\mu_1)S_1]^2+[(\mathcal{R}^2+\mu_1\mu_2)S_2]^2}{\mu_1\mu_2R_1R_2}\right\}. \tag{4.2}$$

As funções P_k, Q_k, S_k e T_k estão dadas por

$$\begin{aligned}
P_1 &= p_1p_2(\mathcal{R}^2/\mu_1\mu_2)^{1/2}\,Y_1Y_2\;+\;q_1q_2(\mu_1\mu_2/\mathcal{R}^2)^{1/2}\,(Y_1Y_2)^{-1},\\
P_2 &= p_1q_2(\mu_2/\mu_1)^{1/2}\,(Y_1/Y_2)\;-\;q_1p_2(\mu_1/\mu_2)^{1/2}\,(Y_2/Y_1),\\
Q_1 &= p_1p_2(\mu_1\mu_2/\mathcal{R}^2)^{1/2}\,Y_1Y_2\;+\;q_1q_2(\mathcal{R}^2/\mu_1\mu_2)^{1/2}\,(Y_1Y_2)^{-1},\\
Q_2 &= p_1q_2(\mu_1/\mu_2)^{1/2}\,(Y_1/Y_2)\;-\;q_1p_2(\mu_2/\mu_1)^{1/2}\,(Y_2/Y_1),\\
S_1 &= p_1p_2Y_1Y_2\;+\;q_1q_2(Y_1Y_2)^{-1},\\
S_2 &= p_1q_2Y_1(Y_2)^{-1}\;-\;q_1p_2Y_2(Y_1)^{-1},\\
T_1 &= (p_1Y_1)^2\;-\;(q_1/Y_1)^2,\\
T_2 &= (p_2Y_2)^2\;-\;(q_2/Y_2)^2,
\end{aligned}$$

onde $Y_k=(\mathcal{R}/\mu_k)^{1/2}\exp(F_k-\Phi_0/2)$, $p_k=-(m_{0\varphi}^{(k)}/2\alpha_k)$ e $q_k=m_{0t}^{(k)}$. Muitas métricas conhecidas podem ser obtidas como casos especiais da expressão anterior para soluções particulares Φ_0 apropriadas, ver [6, 7, 8].

4.1 Soluções estáticas de Weyl

Soluções estáticas do tipo Weyl podem ser obtidas escolhendo as constantes $q_1=0$ e $p_2=0$, de tal forma que $\mathcal{G}_{t\varphi}=0$. Considerando a solução particular

$\Phi_0 = \tilde{\Lambda}_0 = 0$, a solução pode-se escrever na forma (2.6) com

$$\begin{aligned} \Phi &= \ln \frac{\mu_1}{\mu_2}, \\ \tilde{\Lambda} &= \ln \left| \frac{(\mu_1 \mu_2 + \mathcal{R}^2)^2}{(\mu_1^2 + \mathcal{R}^2)(\mu_2^2 + \mathcal{R}^2)} \right|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

As outras possíveis escolhas das constantes p_k e q_k tais que $\mathcal{G}_{t\varphi} = 0$ são equivalentes como conseqüência da relação $\mu_k^+ \mu_k^- = -\mathcal{R}^2$, onde os índices $\pm$ correspondem à escolha do sinal na expressão (3.3).

Dada a solução anterior, pode-se provar facilmente que a transformação $\Phi \to \gamma\Phi$, $\tilde{\Lambda} \to \gamma^2\tilde{\Lambda}$ define uma nova solução do tipo Weyl, onde γ é uma constante arbitrária. Escolhendo o sinal positivo na expressão (3.3) e re-escrevendo as constantes α_k na forma

$$\alpha_1 = \mathcal{Z}_0 - \sigma, \qquad \alpha_2 = \mathcal{Z}_0 + \sigma, \tag{4.4}$$

onde $\mathcal{Z}_0$ é uma constante real e σ pode ser real ou imaginária, pode-se definir as variáveis

$$\xi = \frac{R_1 + R_2}{2\sigma}, \qquad \eta = \frac{R_1 - R_2}{2\sigma}, \tag{4.5}$$

e considerar as três possibilidades: $\sigma \neq 0$ real, σ imaginária ou $\sigma = 0$.

4.1.1 Solução de Zipoy-Voorhes

Quando a constante σ é real, as variáveis ξ e η correspondem às coordenadas *esferoidais prolatas*, as quais estão relacionadas com as coordenadas de Weyl através da relação

$$\mathcal{R}^2 = \sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2), \qquad \mathcal{Z} - \mathcal{Z}_0 = \sigma\xi\eta, \tag{4.6}$$

$1 \leq \xi \leq \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$. A solução pode-se escrever na forma

$$\begin{aligned} \Phi &= \gamma \ln \left[\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right], \\ \tilde{\Lambda} &= \gamma^2 \ln \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \right], \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde γ é uma constante real. Esta solução é conhecida na literatura como a solução de Zipoy-Voorhes (ver [13, 14]) ou a solução γ de Weyl (ver [11, 12]) e representa o campo gravitacional de um buraco-negro deformado. Quando $\gamma = 1$ esta solução é equivalente à solução de Schwarzschild.

4.1.2 Solução de Bonnor-Sackfield

Quando a constante σ é imaginária, $\sigma = i\kappa$, as variáveis $\zeta = i\xi$ e η correspondem às coordenadas *esferioidais oblatas*, as quais estão relacionadas com as coordenadas de Weyl através da relação

$$\mathcal{R}^2 = \kappa^2(\zeta^2 + 1)(1 - \eta^2), \qquad \mathcal{Z} - \mathcal{Z}_0 = \kappa\zeta\eta, \tag{4.8}$$

onde $0 \leq \zeta \leq \infty$ e $-1 \leq \eta \leq 1$. A solução pode-se escrever na forma

$$\begin{aligned} \Phi &= -i\gamma \, \ln\left[\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right], \\ \tilde{\Lambda} &= -\gamma^2 \ln\left[\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 + \eta^2}\right], \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde γ é uma constante real. Esta solução foi obtida inicialmente por Zipoy [13] e Voorhes [14] e foi interpretada por Bonnor e Sackfield como a solução correspondente a um disco estático sem pressão, ver [15].

4.1.3 Solução de Chazy-Curzon

Para o caso em que $\sigma = 0$, pode-se fazer $\gamma \to \gamma/\sigma$ e tomar o limite $\sigma \to 0$, de tal forma que

$$\Phi = -2\gamma\frac{\partial \ln \mu}{\partial \alpha}. \tag{4.10}$$

A solução obtida pode-se escrever como

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{-2\gamma}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + (\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_0)^2}}, \\ \tilde{\Lambda} &= \frac{-\gamma^2\mathcal{R}^2}{[\mathcal{R}^2 + (\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_0)^2]^2}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde γ é uma constante real. Esta solução é conhecida como a solução de Chazy-Curzon, ver [16, 17].

4.2 A solução de Kerr-NUT

A solução com dois sólitons construída com base na solução particular $\Phi_0 = \tilde{\Lambda}_0 = 0$, para o caso em que as constantes p_k e q_k são todas diferentes de zero, é equivalente à solução de Kerr-NUT (ver [18, 19]), como se pode provar diretamente através de uma transformação das coordenadas, (ver [2, 3]).

Em termos das coordenadas esferoidais prolatas ξ e η, a solução pode-se escrever na forma (ver [20])

$$\begin{aligned} \Phi &= \ln\left[\frac{p^2\xi^2 + q^2\eta^2 - 1}{(p\xi + u)^2 + (q\eta + v)^2}\right], \\ \tilde{\Lambda} &= \ln\left[\frac{p^2\xi^2 + q^2\eta^2 - 1}{p^2(\xi^2 - \eta^2)}\right], \\ \mathcal{W} &= \frac{2\sigma}{p}\left[\frac{q(1-\eta^2)(up\xi + vq\eta + 1)}{p^2\xi^2 + q^2\eta^2 - 1} + v\eta\right], \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde

$$\begin{aligned} p &= p_1q_2 - q_1p_2 \quad , \quad q = p_1p_2 + q_1q_2, \\ u &= p_1q_2 + p_2q_1 \quad , \quad v = p_1p_2 - q_1q_2, \end{aligned}$$

com a condição $p^2 + q^2 = u^2 + v^2 = 1$.

A solução pode-se escrever nas coordenadas (R, θ), chamadas de coordenas de Boyer e Lindquist [21], através da transformação

$$\begin{aligned} \xi &= (R - m)/\sigma \quad , \quad \eta = \cos\theta, \\ p &= \sigma/\sqrt{m^2 + l^2} \quad , \quad q = a/\sqrt{m^2 + l^2}, \\ u &= m/\sqrt{m^2 + l^2} \quad , \quad v = l/\sqrt{m^2 + l^2}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

com $\sigma^2 = m^2 + l^2 - a^2$. Esta solução leva à solução de Kerr [1] quando $l = 0$, à solução de NUT [19] quando $a = 0$ e à solução de Schwarzschild quando $a = l = 0$. Os parâmetros m, a e l chamam-se massa, parâmetro de Kerr e parâmetro de NUT, respectivamente (ver [1]).

Agradecimentos

O autor expressa seu agradecimento à Comissão para o Aperfeiçoamento do Pessoal da Educação Superior, CAPES, e ao Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, COLCIENCIAS.

Referencias

[1] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E. and McCallum, M. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* (Cambridge University Press, 1980).

[2] Belinsky, V. A. and Zakharov, V. E. "Integration of the Einstein Equations by means of the Inverse Scattering Technique and Construction of Exact Soliton Solutions". *Zh. Eksp. Teor. Fis.* 75, 1955 (1978). [*Sov. Phys. JETP* 48, 985 (1978).]

[3] Belinsky, V. A. and Zakharov, V. E. "Stationary Gravitational Solitons with Axial Symmetry". *Zh. Eksp. Teor. Fis.* 77, 3 (1979). [*Sov. Phys. JETP* 50, 1 (1979).]

[4] Chaudhuri, S. and Das, K. C. *Two-soliton Solutions of Axially Symmetric Metrics.* Gen. Rel. Grav. 29, 75 (1997).

[5] Letelier, P. S. "Cylindrically Symmetric Solitary Wave Solutions to the Einstein Equations". *J. Math. Phys.* 25, 2675 (1984).

[6] Letelier, P. S. "Static and Stationary Multiple Soliton Solutions to the Einstein Equations". *J. Math. Phys.* 26, 467 (1985).

[7] Letelier, P. S. "Soliton Solutions to the Vacuum Einstein Equations Obtained from a Nondiagonal Seed Solution". *J. Math. Phys.* 27, 564 (1986).

[8] Letelier, P. S. *On Soliton Solutions to the Vacuum Einstein Equations Obtained from a General Seed Solution.* Class. Quantum Grav. 6, 875 (1989).

[9] Letelier, P. S. and Oliveira, S. R. "Exact Selfgraviting Disks and Rings: a Solitonic Approach". *J. Math. Phys.* 28, 165 (1987).

[10] McCrea, J. D. "Static Axially Symmetric Gravitational Fields with Shell Sources". *J. Phys.* A9, 697 (1976).

[11] Weyl, H. *Zur Gravitationstheorie.* Ann. Physik 54, 117 (1917).

[12] Weyl, H. *Bemerkung Über die Axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.* Ann. Physik 59, 185 (1919).

[13] Zipoy, D. M. "Topology of Some Spheroidal Metrics". *J. Math. Phys.* 7, 1137 (1966).

[14] Voorhees, B. H. "Static Axially Symmetric Gravitational Fields". *Phys. Rev.* D2, 2119 (1970).

[15] Bonnor, W. B. and Sackfield, A. "The Interpretation of Some Spheroidal Metrics". *Comm. Math. Phys.* 8, 338 (1968).

[16] Chazy, J. "Sur le Champ de Gravitation de Deux Masses Fixes dans la Théorie de la Relativité". *Bull. Soc. Math. France.* 52, 17 (1924).

[17] Curzon, H. E. J. "Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations". *Proc. London Math. Soc.* 23, 477 (1924).

[18] Demiański, M. and Newmann, E. T. "A Combined Kerr-NUT Solution of the Einstein Field Equations". *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys.* 14, 653 (1966).

[19] Newmann, E., Tamburino, L. and Unti, T. "Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric". *J. Math. Phys.* 4, 915 (1963).

[20] Reina, C. and Treves, A. "Axisymmetric Gravitational Fields". *Gen. Rel. Grav.* 7, 817 (1976).

[21] Boyer, R. H. and Lindquist, R. W. "Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric". *J. Math. Phys.* 8, 265 (1967).