Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 27, No. 2, 2009, pág. 99–123

Imágenes débilmente confluentes de la curva sinusoidal del topólogo

Sergio Macías*

Resumen. En el presente trabajo se caracterizan las imágenes débilmente confluentes de la curva del topólogo. Se demuestra que si G es la curva sinusoidal del topólogo y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ es una función débilmente confluente, donde Y es un continuo, entonces Y es o un arco, o una curva cerrada simple, o una compactación de $[0, \infty)$ cuyo residuo es un arco o una curva cerrada simple. Más aún, si Y es alguno de estos continuos y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, se dan condiciones para que f sea débilmente confluente.

1. Introducción

Este trabajo está basado en la tesis de maestría de Jeffrey A. Brooks [2]. Las funciones confluentes fueron definidas por J. J. Charatonik en [3]. Posteriormente, A. Lelek generalizó este concepto y definió las funciones débilmente confluentes [8]. Para responder a una pregunta de J. J. Charatonik, S. B. Nadler Jr. caracterizó las imágenes confluentes de la curva sinusoidal del topólogo [15].

El objetivo de este trabajo es caracterizar las imágenes débilmente confluentes de la curva sinusoidal del topólogo de la siguiente manera: Si $\mathfrak{S}$ es la curva sinusoidal del topólogo y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ es una función débilmente confluente, donde Y es un continuo, entonces Y es un arco, una curva cerrada simple o una compactación de $[0, \infty)$ cuyo residuo es un arco o una curva cerrada simple. Más aún, si Y es alguno de estos continuos y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, daremos condiciones para que f sea débilmente confluente.

Palabras y frases claves: Continuo, curva sinusoidal del topólogo, función débilmente confluente, rayo.
MSC2000: 54E40; 54B15.

* Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, México D.F., C.P. 04510, México. *e-mail*: macias@servidor.unam.mx

2. Definiciones

Si (Z, d) es un espacio métrico, entonces dado un subconjunto A de Z, el interior de A se denota como $Int_Z(A)$, su frontera se denota por $Fr_Z(A)$ y su cerradura como $Cl_Z(A)$. El símbolo $\mathbb{R}$ denotará el conjunto de los números reales.

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Para cada número natural n, sea $g_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ una función continua. A la doble sucesión $\{X_n, g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios y funciones se la llama una *sucesión inversa*. A las funciones g_n^{n+1} se las llama *funciones de ligadura*. El *límite inverso* de la sucesión inversa $\{X_n, g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, se denota por $\varprojlim\{X_n, g_n^{n+1}\}$ y se define como

$$\varprojlim\{X_n, g_n^{n+1}\} = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \;\middle|\; g_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n\right\}.$$

Dado un número natural m, sea $\pi_m\colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_m$ la función proyección. La restricción $\pi_m|_{\varprojlim\{X_n, g_n^{n+1}\}}$ la denotaremos por g_m. Para mayor información sobre límites inversos, se puede consultar el Capítulo 2 de [10].

Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$ con su topología usual. Los *puntos extremos* de un arco son las imágenes de 0 y 1 bajo cualquier homeomorfismo. Un *rayo* es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,\infty)$, también con su topología usual. El círculo es el espacio $\mathcal{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a $\mathcal{S}^1$.

Dados dos espacios métricos Y y Z, una *homotopía entre* Y *y* Z es una función continua $H\colon Y \times [0,1] \to Z$. Decimos que dos funciones $f, g\colon Y \to Z$ son *homotópicas* si existe una homotopía $G\colon Y \times [0,1] \to Z$ tales que $G((y,0)) = f(y)$ y $G((y,1)) = g(y)$ para toda $y \in Y$. El espacio Y es *contraíble* si la función identidad de Y es homotópica a una función constante.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* de un espacio Z es un subconjunto A de Z que es un continuo. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de X, existe un arco en X con x_1 y x_2 como sus puntos extremos. Un continuo arcoconexo es *únicamente arcoconexo* si no tiene curvas cerradas simples. Un continuo X es *unicoherente* si cada vez que tomemos a $X = K \cup L$, donde K y L son subcontinuos de X, se tiene que $K \cap L$ es conexo. El continuo X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes. Un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples.

Sean X un continuo y K y L dos subcontinuos de X tales que $X = K \cup L$. Definimos $r(K, L)$ como el número de componentes de $K \cap L$. El *grado de multicoherencia de* X, denotado $r(X)$, se define como el número

$$r(X) = \sup\{r(K, L) \mid K \text{ y } L \text{ son subcontinuos de } X \text{ con } X = K \cup L\} - 1.$$

Observemos que es posible que $r(X) = \infty$.

Sean X un continuo, Z un subcontinuo de X y A y B dos subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Decimos que Z *es irreducible entre* A *y* B si $Z \cap A \neq \varnothing$, $Z \cap B \neq \varnothing$ y ningún subcontinuo propio de Z tiene esta propiedad.

Si X y Y son continuos y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces f es *confluente* si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$. Diremos que f es *débilmente confluente* si para cada subcontinuo Q de Y, existe un subcontinuo K de X tal que $f(K) = Q$. Decimos que f es *monótona* si para cada subconjunto conexo C de Y, se tiene que $f^{-1}(C)$ es un subconjunto conexo de X.

Sean X y Y dos continuos, $\varepsilon > 0$ y $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Decimos que f es una *ε-función* si para cada $y \in Y$, se tiene que $\operatorname{diám}(f^{-1}(y)) < \varepsilon$.

Dado un continuo X, una *cadena* es una colección finita $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ de subconjuntos no vacíos de X tales que $C_j \cap C_k = \varnothing$ si $|j - k| \leq 1$. A los elementos de $\mathcal{C}$ se las llama *eslabones* de la cadena. Si los elementos de $\mathcal{C}$ son abiertos, entonces diremos que $\mathcal{C}$ *es una cadena abierta*. Además, si $\mathcal{C}$ es una cadena abierta y ε es un número real positivo tal que $\operatorname{diám}(C_k) < \varepsilon$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\mathcal{C}$ es una *ε-cadena*. Un continuo X es *encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena que cubre a X. Sean X un continuo encadenable y p y q dos puntos de X. Decimos que p y q son *puntos extremos opuestos* (en el sentido de Bing [1, pág. 661]) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un ε-cadena que cubre a X cuyo primer eslabón tiene a p y su último eslabón tiene a q.

Dado un continuo X, una *cadena circular* es una colección finita $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ de subconjuntos no vacíos de X tales que $C_j \cap C_k = \varnothing$ si $|j - k| \leq 1$ ó $|j - k| = n - 1$. Si los elementos de $\mathcal{C}$ son abiertos entonces diremos que $\mathcal{C}$ *es una cadena circular abierta*. Además, si $\mathcal{C}$ es una cadena circular abierta y ε es un número real positivo tal que $\operatorname{diám}(C_k) < \varepsilon$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\mathcal{C}$ es una *ε-cadena circular*. Un continuo X es *circularmente encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena circular que cubre a X.

Un continuo X es llamado *susliniano* si cualquier familia de subcontinuos de X disyuntos dos a dos es a lo más numerable.

Un *triodo* es un continuo que se puede escribir como la unión de tres subcontinuos tales que la parte común de los tres es un subcontinuo propio de cada uno de ellos y, además, es la parte común de cualesquiera dos de ellos. Un *triodo simple* es un continuo que consta de tres arcos, los cuales sólo tienen uno de sus puntos extremos en común. Un *triodo semisimple* es un continuo X que es la unión de un rayo H y un arco A tales que $H \cap A = \varnothing$ y $Cl_X(H) \setminus H$ es un subarco o un punto de A que no contiene ningún punto extremo de A. Notemos que un triodo simple es un caso particular de un triodo semisimple. Un continuo es *atriódico* si no contiene triodos.

Sean:

$$\mathfrak{H} = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x \leq \frac{2}{\pi} \right\},$$
$$\mathfrak{J} = \left\{ (0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

y

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{J} \cup \mathfrak{H}.$$

Notemos que $\mathfrak{S}$ es un continuo; este continuo es el que se denomina la *curva sinusoidal del topólogo*.

3. Resultados preliminares

Demostraremos los resultados sobre funciones débilmente confluentes que nos servirán para el resto del trabajo.

Teorema 3.1. *Sean X y Y dos continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Entonces f es débilmente confluente si y sólo si para cada subcontinuo Q de Y existe una componente K de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) = Q$.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente confluente. Sea Q un subcontinuo de Y. Por hipótesis, existe un subcontinuo L de X tal que $f(L) = Q$. Notemos que esto implica que $L \subset f^{-1}(Q)$. Sea K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a L. Entonces $f(K) = Q$.

La otra implicación es clara. ☑

Teorema 3.2. *Si X, Y y Z son tres continuos, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son dos funciones débilmente confluentes entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es débilmente confluente.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Z. Como g es débilmente confluente, existe un subcontinuo L de Y tal que $g(L) = Q$. Como f es débilmente confluente y L es un subcontinuo de Y, existe un subcontinuo K de X tal que $f(K) = L$. De donde se sigue que $g \circ f(K) = g(f(K)) = g(L) = Q$. Por tanto, $g \circ f$ es débilmente confluente. ☑

Teorema 3.3. *Si X, Y y Z son tres continuos, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son dos funciones continuas tales que $g \circ f\colon X \to Z$ es débilmente confluente, entonces g es débilmente confluente.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Z. Como $g \circ f$ es débilmente confluente, existe un subcontinuo K de Z tal que $g \circ f(K) = Q$. Entonces $f(K)$ es un subcontinuo de Y tal que $g(f(K)) = Q$. Por tanto, g es débilmente confluente. ☑

Lema 3.4. *Si Z es un continuo y $f\colon X \to [0,1]$ es una función continua y sobreyectiva, entonces f es débilmente confluente.*

Demostración. Sea $[a,b]$ un subcontinuo de $[0,1]$. Definimos $K = \{(z, f(z)) \mid z \in Z\}$. Claramente K es un subcontinuo de $Z \times [0,1]$. Supongamos que $K \cap (Z \times [a,b])$ no contiene un subcontinuo irreducible entre $K \cap (Z \times \{a\})$ y $K \cap (Z \times \{b\})$. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y no vacíos P y R de $K \cap (Z \times [a,b])$ tales que $K \cap (Z \times [a,b]) = P \cup R$, $K \cap (Z \times \{a\}) \subset P$ y $K \cap (Z \times \{b\}) \subset R$ [16, 5.2]. Sean

$$P' = P \cup \left[\pi_{[0,1]}^{-1}([0,a]) \cap K\right] \text{ y } R' = R \cup \left[\pi_{[0,1]}^{-1}([b,1]) \cap K\right],$$

donde $\pi_{[0,1]}\colon Z \times [0,1] \to [0,1]$ es la función proyección. Observemos que esto implica que $K = P' \cup R'$, lo cual es una contradicción, ya que P' y R' son dos subconjuntos cerrados, disyuntos y no vacíos de K, y K es conexo. En consecuencia, existe un subcontinuo irreducible L de $K \cap (Z \times [a,b])$ entre $K \cap (Z \times \{a\})$ y $K \cap (Z \times \{b\})$. Sea $\pi_Z\colon Z \times [0,1] \to Z$ la función proyección. Notemos que $f(\pi_Z(L))$ es un subcontinuo de $[a,b]$ tal que $\{a,b\} \subset f(\pi_Z(L))$. De donde $f(\pi_Z(L)) = [a,b]$. Por tanto, f es débilmente confluente. ☑

Teorema 3.5. *Sean X un continuo encadenable y Z un continuo. Si $f\colon Z \to X$ es una función continua y sobreyectiva, entonces f es débilmente confluente.*

Demostración. Sea $f\colon Z \to X$ una función continua y sobreyectiva. Como X es encadenable, X es homeomorfo a $\varprojlim\{[0,1], g_n^{n+1}\}$, donde cada g_n^{n+1} es sobreyectiva [10, 2.4.22]. Supondremos que $X = \varprojlim\{[0,1], g_n^{n+1}\}$.

Sea Q un subcontinuo de X. Notemos que $Q = \varprojlim\{g_n(Q), g_n^{n+1}|_{g_{n+1}(Q)}\}$ [10, 2.1.20]. Por el Lema 3.4, cada $g_n \circ f$ es una función débilmente confluente. Así que, como $g_n(Q)$ es un subcontinuo de $[0,1]$, para cada número natural n, existe un subcontinuo K_n de Z tal que $g_n \circ f(K_n) = g_n(Q)$. Como la familia de subcontinuos de Z es un espacio métrico y compacto [10, 1.8.5], existe una subsucesión $\{K_{n_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un subcontinuo K de Z. Como X es homeomorfo a $\varprojlim\{[0,1], g_{n_\ell}^{n_{\ell+1}}\}$ [10, 2.1.38], sin pérdida de generalidad, supondremos que K es el límite de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sea $q \in Q$. Para cada número natural n, existe $z_n \in K_n$ tal que $g_n \circ f(z_n) = g_n(q)$. Sea z un punto de acumulación de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Mostraremos que $f(z) = q$. Supongamos que $f(z) \neq q$. Entonces existe un número natural N tal que $g_N \circ f(z) \neq g_N(q)$. Así que, existe un abierto U de $[0,1]$ tal que $g_N \circ f(z) \in U$ y $g_N(q) \notin U$. En consecuencia, $f^{-1}(g_N^{-1}(U))$ es un subconjunto abierto de Z que tiene a z. Como z es un punto de acumulación de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe un número natural $m > N$ tal que $z_m \in f^{-1}(g_N^{-1}(U))$. De aquí se obtiene que:

$$g_N(q) = g_N^m \circ g_m(q) = g_N^m \circ g_m \circ f(z_m) = g_N \circ f(z_m) \in U,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $f(z) = q$ y $Q \subset f(K)$.

Ahora, sea $z \in K$. Como $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a K, para cada número natural n, existe $z_n \in K_n$ tal que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z. Sea n un número natural. Entonces $g_n \circ f(z_n) \in g_n(Q)$. Para cada número natural n, sea $x_n \in g_n^{-1}(g_n \circ f(z_n)) \cap Q$. Sea x un punto de acumulación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Mostraremos que $f(z) = x$. Supongamos que $f(z) \neq x$. Entonces existe un número natural N_1 tal que $g_{N_1} \circ f(z) \neq g_{N_1}(x)$. De donde existen dos abiertos disyuntos V y W de $[0,1]$ tales que $g_{N_1} \circ f(z) \in V$ y $g_{N_1}(x) \in W$. Observemos que $f^{-1}(g_{N_1}^{-1}(V))$ es un abierto de Z que tiene a z y $g_{N_1}^{-1}(W)$ es un abierto de X que tiene a x. Como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z, existe un número natural $N \geq N_1$ tal que si $n \geq N$, entonces $z_n \in f^{-1}(g_{N_1}^{-1}(V))$. Como x es un punto de acumulación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe un número natural $m \geq N$ tal que $x_m \in g_{N_1}^{-1}(W)$. Esto es, $g_{N_1}(x_m) \in W$. Por otro lado, tenemos que

$$g_{N_1}(x_m) = g_{N_1}^m \circ g_m(x_m) = g_{N_1}^m \circ f(z_m) \in V,$$

lo cual es una contradicción, ya que $V \cap W = \varnothing$. Así que $f(z) = x$. Por tanto, $f(K) = Q$ y f es débilmente confluente. ☑

4. Funciones débilmente confluentes en continuos atriódicos

Probaremos que la imagen débilmente confluente de un arco es un arco o una curva cerrada simple (Corolario 4.2). También caracterizaremos a los continuos arcoconexos sin triodos semisimples (Teorema 4.4).

Teorema 4.1. *Sean X un continuo atriódico y susliniano y Y un continuo. Si $f\colon X \to Y$ es débilmente confluente, entonces Y es atriódico.*

Demostración. Supongamos que Y contiene un triodo T, donde $T = A \cup B \cup C$ y $Q = A \cap B \cap C = A \cap B = A \cap C = B \cap C$. Sean $a \in A \setminus Q$, $b \in B \setminus Q$ y $c \in C \setminus Q$. Por conveniencia, supondremos que $d(a, B \cup C) = d(b, A \cup C) = d(c, A \cup B) = 1$. Para cada $\varepsilon \in (0, 1]$, sean $\mathcal{V}_\varepsilon(Q) = \{y \in Y \mid d(y, Q) < \varepsilon\}$, $a_\varepsilon \in Fr_Y(Q) \cap A$, $b_\varepsilon \in Fr_Y(Q) \cap B$ y $c_\varepsilon \in Fr_Y(Q) \cap C$. Además, sean A_ε, B_ε, C_ε y T_ε subcontinuos de A, B, C y T, respectivamente, tales que $\{a_\varepsilon\} \cup Q \subset A_\varepsilon$, $\{b_\varepsilon\} \cup Q \subset B_\varepsilon$, $\{c_\varepsilon\} \cup Q \subset C_\varepsilon$ y $T_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ (la existencia de estos continuos se sigue de [16, 5.5]).

Para cada $\varepsilon \in (\frac{1}{4}, 1]$, sea T'_ε la componente de $f^{-1}(T_\varepsilon)$ tal que $f(T'_\varepsilon) = T_\varepsilon$ (Teorema 3.1). Sean $a'_\varepsilon \in f^{-1}(a_\varepsilon) \cap T'_\varepsilon$, $b'_\varepsilon \in f^{-1}(b_\varepsilon) \cap T'_\varepsilon$ y $c'_\varepsilon \in f^{-1}(c_\varepsilon) \cap T'_\varepsilon$. Además, sean $K_\varepsilon(A)$ la componente de $f^{-1}(A_\varepsilon \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{4}}(Q))$ que tiene a a'_ε, $K_\varepsilon(B)$ la componente de $f^{-1}(B_\varepsilon \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{4}}(Q))$ que tiene a b'_ε y $K_\varepsilon(C)$ la componente de $f^{-1}(C_\varepsilon \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{4}}(Q))$ que tiene a c'_ε. Observemos que $K_\varepsilon(A) \cup K_\varepsilon(B) \cup K_\varepsilon(C) \subset T'_\varepsilon$ y que cada $K_\varepsilon(A)$, $K_\varepsilon(B)$ y $K_\varepsilon(C)$ es no degenerado, ya que si $D \in \{A, B, C\}$ entonces $K_\varepsilon(D) \cap f^{-1}(Cl_Y(\mathcal{V}_\varepsilon(Q)) \neq \varnothing$ [16, 5.4].

Para cada $\varepsilon \in (\frac{1}{4}, 1)$ y cualesquiera α, β y $\gamma \in (\varepsilon, 1]$, se tiene que $T'_\varepsilon \cap K_\alpha(A) = \varnothing$ o $T'_\varepsilon \cap K_\beta(B) = \varnothing$ o $T'_\varepsilon \cap K_\gamma(C) = \varnothing$; pues de otro modo, $T'_\varepsilon \cup K_\alpha(A) \cup K_\beta(B) \cup K_\gamma(C)$ sería un triodo en X. De aquí se sigue que para cada $\varepsilon \in (\frac{1}{4}, 1)$ existe $D \in \{A, B, C\}$ tal que si $\delta \in (\varepsilon, 1]$, entonces $T'_\varepsilon \cap K_\delta(D) = \varnothing$. Sin perder generalidad, supondremos que existe un subconjunto no numerable E de $(\frac{1}{4}, 1)$ tal que si $\varepsilon \in E$ y $\alpha \in (\varepsilon, 1]$, entonces $T'_\varepsilon \cap K_\alpha(A) = \varnothing$. Entonces $\{K_\varepsilon(A) \mid \varepsilon \in E\}$ es una colección no numerable de subcontinuos disyuntos dos a dos y no degenerados de X. Lo cual implica que X no es susliniano. Esto es una contradicción. Por tanto, Y es atriódico. ☑

Corolario 4.2. *La imagen débilmente confluente de un arco es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Sean X un arco, Y un continuo y $f\colon X \to Y$ una función débilmente confluente. Notemos que Y es localmente conexo [16, 8.16]. Como X es un arco, es fácil demostrar que X es susliniano. Así que, por el Teorema 4.1, Y es atriódico. Por [16, 8.40], Y es un arco o una curva cerrada simple. ☑

El Teorema 2 de [18] (Teorema 4.4) nos da una caracterización particularmente simple para los continuos arcoconexos. Para demostrarlo, necesitamos el siguiente

Lema 4.3. *Un continuo únicamente arcoconexo y que no contiene triodos semisimples es un arco o un continuo circularmente encadenable y arcoconexo que no es una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea X un continuo únicamente arcoconexo que no contiene triodos semisimples. Dados dos puntos x_1 y x_2 de X, $\alpha(x_1, x_2)$ denotará al único arco en X cuyos puntos extremos son x_1 y x_2. Dividiremos la prueba en varias partes.

Parte (1). *Si α y β son dos arcos en X tales que $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, entonces $\alpha \cup \beta$ es un arco en X.*

Para ver esto, observemos que $\alpha \cup \beta$ es un continuo localmente conexo [16, 8.16] sin curvas cerradas simples. Así que, $\alpha \cup \beta$ debe de ser una dendrita. Como X no tiene triodos semisimples, $\alpha \cup \beta$ no contiene triodos simples. Por tanto, $\alpha \cup \beta$ es un arco.

Parte (2). *Si Y es un subespacio arcoconexo de X que no está contenido en un arco de X, entonces Y contiene una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$ que no está contenida en un arco de X.*

Para probar esto, sea $D = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un subconjunto denso y numberable de Y, en donde $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Para cada número natural $n \geq 2$, sea $\sigma_n = \bigcup_{j=1}^{n} \alpha(x_1, x_j)$. Notemos que, por la Parte (1), cada σ_n es un arco. Sea $x \in \sigma_2 \setminus \{x_1, x_2\}$. Entonces, para cada $n \geq 2$, x divide a σ_n en dos subarcos σ_n' y σ_n'' que tienen a x como uno de sus puntos extremos. Estos subarcos son escogidos de tal manera que $\sigma_n' \subset \sigma_{n+1}'$ y que $\sigma_n'' \subset \sigma_{n+1}''$. Supongamos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n'$ está contenido en un arco B' de X y que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n''$ está contenido en un arco B'' de X. Entonces $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n') \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n'')$ está contenido en el arco $B' \cup B''$ (como $x \in B' \cap B''$, por la Parte (1), $B' \cup B''$ es un arco). Como D es denso en Y y $D \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n') \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n'')$, se tiene que $Y \subset B' \cup B''$, lo cual es una contradicción. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n''$ no está contenido en un arco. No es difícil probar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n''$ es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$.

Parte (3). *Sean* $f\colon [0,\infty) \to X$ *una función continua e inyectiva y* $A = f([0,\infty))$. *Si* $x \in X \setminus \{f(0)\}$, *entonces* $\alpha(x, f(0))$ *y* A *satisfacen alguna de las siguientes condiciones:*

(a) $\alpha(x, f(0)) \subset A$;

(b) $\alpha(x, f(0)) \cap A = \{f(0)\}$, *ó*

(c) $A \subset \alpha(x, f(0))$.

Más aún, si (a) *ó* (b) *se satisfacen, entonces* $\alpha(x, f(0)) \cup A$ *es también una imagen continua e inyectiva de* $[0,\infty)$.

Para demostrar que alguno entre (a), (b) ó (c) se debe cumplir, primero notemos que si $x \in A$, entonces existe una $t \in [0,\infty)$ tal que $f(t) = x$. Como X es únicamente arcoconexo, se tiene que $\alpha(x, f(0)) = f([0,t]) \subset A$; i.e., ($a$) se cumple. Ahora supongamos que $x \in X \setminus A$ y que (b) no se cumple. Entonces existe $t_0 \in (0,\infty)$ tal que $f(t_0) \in \alpha(x, f(0))$. Como $f(0)$ es un punto extremo de $\alpha(x, f(0))$ y $x \in X \setminus A$, se tiene que $\{t \in (0,\infty) \mid f(t) \in \alpha(x, f(0))\}$ no está acotado superiormente (si estuviera acotado superiormente, $\alpha(x, f(0)) \cup A$ contendría un triodo simple). Como X es únicamente arcoconexo, si $s, t \in (0,\infty)$ son tales que $s \leq t$ y $f(s), f(t) \in \alpha(x, f(0))$, entonces $f([s,t]) \subset \alpha(x, f(0))$. De aquí se sigue que $A \subset \alpha(x, f(0))$. Esto termina la prueba de que alguno de (a) (b) ó (c) se cumple. El hecho de que si (a) ó (b) se cumple entonces $\alpha(x, f(0)) \cup A$ es una imagen continua e inyectiva de $[0,\infty)$ es claro.

Parte (4). *Sean* $g\colon \mathbb{R} \to X$ *una función continua e inyectiva y* $G = g(\mathbb{R})$. *Entonces* $g((-\infty, 0])$ *está contenido en un arco en* X *ó* $g([0,\infty))$ *está contenido en un arco en* X.

Para ver esto, primero observemos que $G \neq X$, pues de otro modo, por [17, pág. 9], X contendría a un triodo semisimple. Así que podemos tomar $x \in X \setminus G$. Consideremos el arco $\alpha(x, g(0))$. Por la Parte (3) y el hecho de que $x \in X \setminus G$, terminaríamos la prueba si mostramos que $\alpha(x, g(0)) \cap g((-\infty, 0]) \neq \{g(0)\}$ o que $\alpha(x, g(0)) \cap g([0,\infty)) \neq \{g(0)\}$. Supongamos que $\alpha(x, g(0)) \cap g((-\infty, 0]) = \{g(0)\}$ y que $\alpha(x, g(0)) \cap g([0,\infty)) = \{g(0)\}$. Entonces $T = \alpha(x, g(0)) \cup g([-1, 1])$ es un triodo simple en X, lo cual es una contradicción al hecho de que X no contiene triodos semisimples.

Parte (5). *Dadas dos imágenes disyuntas continuas e inyectivas de* $[0, \infty)$ *en* X*, alguna de ellas está contenida en un arco en* X*.*

Sean $f_1, f_2 \colon [0, \infty) \to X$ dos funciones continuas e inyectivas diferentes, $A_1 = f_1([0, \infty))$ y $A_2 = f_2([0, \infty))$. Como $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, el inciso (a) de la Parte (3) no se cumple para $\alpha(f_1(0), f_2(0))$ y ninguno de los rayos A_1 o A_2. Si el inciso (c) de la Parte (3) se cumple para $\alpha(f_1(0), f_2(0))$ y alguno de A_1 ó A_2, entonces hemos terminado. Por tanto, supongamos que

$$\alpha(f_1(0), f_2(0)) \cap A_j = \{f_j(0)\}$$

para cada $j \in \{1, 2\}$. Bajo estas hipótesis, es claro que $\alpha(f_1(0), f_2(0)) \cup A_1 \cup A_2$ es una imagen continua e inyectiva de $\mathbb{R}$. Ahora, el resultado se sigue de la Parte (4).

Para terminar la demostración del lema, supongamos que X no es un arco. Entonces le podemos aplicar la Parte (2) a X y concluir que existe una función continua e inyectiva $g \colon [0, \infty) \to X$ tal que $S = g([0, \infty))$ no está contenido en un arco en X. Por la Parte (3) y el hecho de que S no está contenido en un arco en X, se tiene que si $x_1, x_2 \in X \setminus S$, entonces $\alpha(x_1, x_2) \cap S = \varnothing$ (aquí aplicamos la Parte (3) a $\alpha(x_j, g(t))$, $j \in \{1, 2\}$ y $g([t, \infty))$ si $t \in \alpha(x_1, x_2)$). Notemos que $X \setminus S$ no puede ser un sólo punto $\{p\}$; si esto fuera cierto, entonces la Parte (3) y el hecho de que S no está contenido en un arco en X implicarían que $\alpha(p, g(0)) \cap S = \{g(0)\}$, lo cual es una contradicción. De donde $X \setminus S$ es un subconjunto arcoconexo de X ó $X \setminus S = \varnothing$. Pero ahora podemos concluir que $X \setminus S$ está contenido en un arco en X, pues de otro modo podríamos aplicar la Parte (2) a $X \setminus S$ para obtener una imagen continua e inyectiva, E, de $[0, \infty)$, tal que E no esté contenido en un arco en X (como $E \cap S = \varnothing$, esto contradiría la Parte (5)). Así que, sea $\alpha(z_1, z_2)$ un arco de X tal que $X \setminus S \subset \alpha(z_1, z_2)$. Notemos que

$$S \cup \alpha(z_1, z_2) = X. \tag{*}$$

Consideremos dos casos que involucran a z_1, z_2 y a S. Primero, supongamos que alguno de los puntos z_1 ó z_2 no pertenece a S. Sin perder generalidad, supondremos que z_1 no pertenece a S. Entonces, aplicando la Parte (3) a $\alpha(z_1, g(0))$ y a

S, obtenemos que $\alpha(z_1, g(0)) \cap S = \{g(0)\}$. En consecuencia, por la Parte (3), $\alpha(z_1, g(0)) \cup S$ es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$ bajo una función k (observemos que $k(0) = z_1$). También tenemos que $\alpha(z_1, g(0)) \cup S = X$, porque, si no fuera cierto, entonces, por (*), $z_2 \notin \alpha(z_1, g(0)) \cup S$ y así, aplicando la Parte (3) a $\alpha(z_2, k(0))$ y a $k([0, \infty))$, tendríamos que $\alpha(z_1, g(0)) \cap \alpha(z_1, z_2) = \{z_1\}$, lo cual contradice (*) pues $z_1 \neq g(0)$. Por consiguiente, X es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$. Ahora, supongamos que $\{z_1, z_2\} \subset S$. Así que $\alpha(z_1, z_2) \subset S$ también. Lo que implica que $X \setminus S = \varnothing$; esto es, $X = S$ y, otra vez, X es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$. Por tanto, en cualquier caso, hemos probado que X es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$. Como X no contiene triodos semisimples, por [17, pág. 9], se tiene que X es un continuo circularmente encadenable y arcoconexo. Como X es únicamente arcoconexo, X no es una curva cerrada simple. ☑

Teorema 4.4. *Un continuo X es arcoconexo y no contiene triodos semisimples si y sólo si X es un arco o un continuo circularmente encadenable y arcoconexo.*

Demostración. Sea X un continuo arcoconexo que no contiene triodos semisimples. Supongamos que X contiene una curva cerrada simple C y que existe un punto $p \in X \setminus C$. Como X es arcoconexo, existe un arco γ en X tal que sus puntos extremos son p y algún punto de C. Claramente, $C \cup \gamma$ contiene un triodo simple, lo cual contradice la hipótesis de que X no contiene triodos semisimples. Por tanto, X es únicamente arcoconexo. Ahora, por el Lema 4.3 se tiene que X es un arco o un continuo circularmente encadenable y arcoconexo.

La implicación inversa se sigue de que los continuos circularmente encadenables son atriódicos [10, 2.1.447]. ☑

5. Funciones débilmente confluentes sobre continuos circularmente encadenables y arcoconexos

Mostraremos que una curva cerrada simple es el único continuo circularmente encadenable y arcoconexo que es una imagen débilmente confluente de $\mathfrak{S}$ (Teorema 5.8).

Empezaremos enunciando un teorema que nos indica dos maneras diferentes de construir continuos (circularmente) encadenables. Este resultado es consecuencia de [12, Teorema 2]:

Teorema 5.1. *Si X es un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es (circularmente) encadenable;*

(2) *X es homeomorfo a $\varprojlim\{[0,1], f_n^{n+1}\}$ ($\varprojlim\{\mathcal{S}^1, f_n^{n+1}\}$), donde cada función f_n^{n+1} es continua y sobreyectiva;*

(3) *para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función $f\colon X \to [0,1]$ ($f\colon X \to \mathcal{S}^1$).*

El siguiente resultado nos presenta cómo son las componentes por arcos de un continuo encadenable cuando éste tiene exactamente dos de ellas. Una demostración de este teorema se puede encontrar en [14, Teorema 1].

Teorema 5.2. *Si un continuo encadenable tiene exactamente dos componentes por arcos, entonces una de ellas es un arco y la otra es un rayo.*

Teorema 5.3. *Sean $\{D_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de dendroides y $X = \varprojlim\{D_n, f_n^{n+1}\}$. Entonces:*

(1) *Si X es arcoconexo, entonces X es un dendroide o un conjunto de un solo punto.*

(2) *Si X es localmente conexo, entonces X es una dendrita o un conjunto de un solo punto.*

(3) *Si para cada número natural n, D_n es una dendrita y f_n^{n+1} es monótona y sobreyectiva, entonces X es una dendrita o un conjunto de un solo punto.*

Demostración. Observemos que, por [10, 2.1.26], X es un continuo hereditariamente unicoherente. Por tanto, (1) se cumple. También se prueba (2), ya que una dendrita es un dendroide localmente conexo. Para ver que se cumple (3), notemos que, por [10, 2.1.20], $X = \varprojlim\{f_n(X), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(X)}\}$, donde para cada n, $f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(X)}$ es sobreyectiva. No es difícil ver que, como cada D_n es hereditariamente unicoherente, cada función $f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(X)}$ es monótona. Por tanto, X es localmente conexo [10, 2.1.14]. Ahora, (3) se sigue de (2). ☑

Lema 5.4. *Si X es un dendroide que no es un arco, entonces X contiene un triodo simple.*

Demostración. Sea X un dendroide. Observemos que si dos arcos se intersecan entonces su unión es un arco o contiene un triodo simple. Supongamos que X no contiene un triodo. Entonces un subconjunto denso y numerable de X puede ser usado para construir una sucesión monótona creciente de arcos cuya unión es densa en X. Por [9, págs. 13 y 14] esa unión debe de estar contenida en un arco, de donde se obtiene que X es un arco. ☑

Teorema 5.5. *Sean* $\{[0,1], f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de arcos y* $X = \varprojlim\{[0,1], f_n^{n+1}\}$*. Si* X *es arcoconexo, entonces* X *es un arco o un conjunto de un solo punto.*

Demostración. Por Teorema 5.3, X es un dendroide o un conjunto de un solo punto. Supongamos que X no es un arco ni un conjunto de un solo punto. Entonces, por el Lema 5.4, X contiene un triodo simple, pero esto contradice el hecho de que los continuos encadenables son atriódicos [10, 2.1.41]. Por tanto, X es un arco o un conjunto de un solo punto. ☑

Teorema 5.6. *Sean* $\{\mathcal{S}^1, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de círculos con funciones de ligadura sobreyectivas y* $X = \varprojlim\{\mathcal{S}^1, f_n^{n+1}\}$*. Si* X *es arcoconexo, entonces*

(1) *X es una curva cerrada simple, o*

(2) *X se puede expresar en la forma $A \cup C$, donde A es un arco, C es un continuo encadenable con exactamente dos componentes por arcos y $A \cap C$ consta de los dos puntos extremos de A. Más aún, los dos puntos de $A \cap C$ son puntos extremos opuestos de C.*

Inversamente, un continuo que satisface (1) *ó* (2) *es arcoconexo y es homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de círculos con funciones de ligadura sobreyectivas.*

Demostración. Primero observemos que X es atriódico [10, 2.1.44] y que todo subcontinuo propio de X es encadenable [10, 2.1.43]. Por [10, 2.1.45], $r(X) \leq 1$. Supongamos que $r(X) = 0$. Entonces, como todo subcontinuo de X es encadenable, X es hereditariamente unicoherente [10, 2.1.28]. De donde se tiene que X es un dendroide. Como X es atriódico, por el Lema 5.4, X es un arco. Pero, claramente, X no puede ser un arco. De donde se sigue que $r(X) = 1$. Supongamos que E yF son dos subcontinuos de X tales que $E \cup F = X$ y que $D \cap F$ no es conexa. Entonces, como todo subcontinuo propio de

X es encadenable, por los Teoremas 5.1 y 5.5 y [10, 2.1.20], se tiene que E y F son arcos. En consecuencia, como $E \cap F$ no es conexa, $E \cup F$ contiene una curva cerrada simple S. Ahora, como todo subcontinuo propio de X es encadenable y X es atriódico, resulta que $S = X$, lo que prueba que X es una curva cerrada simple.

De ahora en adelante, supondremos que F no es arcoconexo. Supongamos que F tiene, por lo menos, tres componentes por arcos. Sean F_1, F_2 y F_3 tres componentes por arcos distintas de F. Sean β un arco con sus puntos extremos en F_1 en F_2, y γ un arco que comparte uno de sus puntos extremos con el punto extremo de β en F_2 y el otro punto extremo en F_3. Si $\beta \cup \gamma = X$, entonces la no unicoherencia de X implicaría que X contiene, de hecho, es igual a, una curva cerrada simple; lo que contradiría la hipótesis de que F no era arcoconexo. Por consiguiente, $\beta \cup \gamma$ es un subcontinuo propio de X. Como todo subcontinuo propio de X es encadenable, por los Teoremas 5.1 y 5.5 y [10, 2.1.20], $\beta \cup \gamma$ es un arco. Ahora, como cada componente de $F \cap (\beta \cup \gamma)$ es un subcontinuo de $\beta \cup \gamma$, tales componentes son arcos. En consecuencia hay, por lo menos, tres componentes, de donde $r(F \cap (\beta \cup \gamma)) \geq 2$, lo que contradice el hecho de que $r(X) = 1$ (claramente, como $F \cap (\beta \cup \gamma)$ no es unicoherente y cada subcontinuo propio de X es encadenable y, por consiguiente, unicoherente [10, 2.1.28], se tiene que $F \cap (\beta \cup \gamma) = X$). Como F no es arcoconexo, hemos demostrado que F tiene exactamente dos componentes por arcos. Como F es un subcontinuo propio de X, F es encadenable.

Sea $C = F$. Por el Teorema 5.2, una de las componentes por arcos de C es un arco y la otra es un rayo. Denotemos por I la componente por arcos que es un arco y por H la componente por arcos que es un rayo. Sea h el punto extremo de H. Sea α un arco en X tal que h es uno de sus puntos extremos y el otro punto extremo está en I. Como X es atriódico y H no está contenido en un arco en X, se tiene que $\alpha \cap H = \{h\}$. También resulta que $\alpha \cap I$ es un arco o un punto que incluye, por lo menos, un punto extremo de I. Si $\alpha \cap I$ sólo incluye un punto extremo de I, entonces sea e este punto extremo. Si $\alpha \cap I$ incluye los dos puntos extremos de I, sea e el punto extremo de I que es un punto de corte de α. Sea A el subarco de α que tiene a h y a e como sus puntos extremos. Claramente, $C \cap A$ consiste, exactamente, de los dos puntos extremos de A. Ahora mostraremos que h y e son puntos extremos opuestos de C. Usando el hecho de que C es atriódico [10, 2.1.41] (en particular, usamos el hecho de que $Cl_X(H)$ contiene, por lo menos, un punto extremo de I) y el Teorema 5.2, se puede verificar que cualquier subcontinuo de C que contenga a h es irreducible entre h y algún otro de sus puntos (i.e., h satisface [1, (A), pág. 660]). Esto implica, por [1, Teorema 13], que h es un punto extremo de C. Más aún, si $I \subset Cl_X(H)$, entonces el Teorema 5.2 [1, (A), pág. 660] y [1, Teorema 13] pueden ser utilizados para ver que cada uno de los puntos extremos de I, en particular e, es un punto extremo de C. De donde se sigue, por [1, Teorema 14], que h y e son puntos extremos opuestos de C.

Supongamos que $I \not\subset Cl_X(H)$. Si $e \in Cl_X(H)$, entonces $A \cup Cl_X(H)$ no sería unicoherente, ya que $A \cap Cl_X(H)$ sería igual a $\{e, h\}$. Además, sería un subcontinuo propio de X, pues $I \not\subset Cl_X(H)$. Esto contradice el hecho de que todo subcontinuo propio de X es encadenable (los continuos encadenables son unicoherentes [10, 2.1.28]). Por consiguiente, $e \in X \setminus Cl_X(H)$. Ahora, se puede verificar que

cualquier subcontinuo de C que tenga a e y a un punto de H, debe de contener a I. (**)

Usando (**), se puede verificar que e cumple con [1, (A), pág. 660]. En consecuencia, por [1, Teorema 13], e es un punto extremo de C. Utilizando nuevamente (**), se puede mostrar que C es un continuo irreducible entre e y h. Por tanto, por [1, Teorema 14], e y h son puntos extremos opuestos de C.

Inversamente, supongamos que X es un continuo que cumple con (2). Por el Teorema 5.2, una de las componentes por arcos de C es un rayo, H, y la otra es un arco, I. Como los dos puntos de $A \cap C$ son puntos extremos opuestos de C, uno de ellos es el punto extremo, h, de H y el otro es un punto extremo, e, de I. Del hecho de que A interseca tanto a H como I, se sigue que X es arcoconexo. Ahora probaremos que X es homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de círculos con funciones de ligadura sobreyectivas. Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ una ε-cadena que cubre a C tal que $h \in U_1 \setminus U_2$ y $e \in U_n \setminus U_{n-1}$ [1, pág. 661]. Sea $\mathcal{N}^\star(\mathcal{U})$ el poliedro asociado al nervio, $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, de $\mathcal{U}$ [10, 1.4.9] (Observemos que $\mathcal{N}^\star(\mathcal{U})$ es un arco). Sea $\Psi\colon C \to \mathcal{N}^\star(\mathcal{U})$ una función canónica relativa a $\mathcal{U}$ [5, pág. 286]. Como $h \in U_1 \setminus U_2$ y $e \in U_n \setminus U_{n-1}$, $\Psi(h)$ es uno de los puntos extremos de $\mathcal{N}^\star(\mathcal{U})$ y $\Psi(e)$ es el otro punto extremo de $\mathcal{N}^\star(\mathcal{U})$ (esto se sigue de la definición de una función canónica [5, pág. 286]). Como $\mathcal{U}$ es una ε-cadena, Ψ es una ε-función. Sean $\mathcal{S}^1_+ = \{(x,y) \in \mathcal{S}^1 \mid y \geq 0\}$ y $\mathcal{S}^1_- = \{(x,y) \in \mathcal{S}^1 \mid y \leq 0\}$. Componiendo Ψ con un homeomorfismo de $\mathcal{N}^\star(\mathcal{U})$ sobre $\mathcal{S}^1_+$, obtenemos una ε-función f de C sobre $\mathcal{S}^1_+$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f(h) = (-1,0)$ y $f(e) = (1,0)$. Como A es un arco cuyos puntos extremos son e y h, existe un homeomorfismo g de A sobre $\mathcal{S}^1_-$ tal que $g(h) = (-1,0)$ y $g(e) = (1,0)$. Sea $\ell\colon X \to \mathcal{S}^1$ definida como

$$\ell(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C, \\ g(x) & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Notemos que ℓ es una ε-función de X sobre $\mathcal{S}^1$. Por tanto, por el Teorema 5.1, X es homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de círculos con funciones de ligadura sobreyectivas. ☑

Lema 5.7. *Sean X y Y espacios topológicos y Z un subconjunto denso de X. Supongamos que $Y = D \cup K$, donde $Int_Y(D \setminus K) \neq \varnothing$ e $Int_Y(K \setminus D) \neq \varnothing$. Si para cualquier función continua $f\colon X \to Y$ se tiene que $f(Z) \subset D$ ó $f(Z) \subset K$, entonces no existe una función sobreyectiva de X en Y.*

Demostración. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva tal que $f(Z) \subset D$ ó $f(Z) \subset K$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $f(Z) \subset K$. Como $Int_Y(D \setminus K)$ es un subconjunto abierto y no vacío de Y y f es una función continua y sobreyectiva, $f^{-1}(Int_Y(D \setminus K))$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Ahora bien, como $f(Z) \subset K$, $f(Z) \cap Int_Y(D \setminus K) = \varnothing$. De donde, $f^{-1}(Int_Y(D \setminus K)) \cap Z = \varnothing$. Lo que implica que Z no es denso en X. ☑

Teorema 5.8. *Si Y es un continuo circularmente encadenable y arcoconexo y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ es una función débilmente confluente, entonces Y es una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ una función débilmente confluente y supongamos que Y no es una curva cerrada simple. Entonces, por el Teorema 5.6, existen un arco A y un continuo encadenable X tales que $Y = A \cup C$. Por el Teorema 5.2, las dos componentes por arcos de C deben de ser un arco, B, y un rayo R. Como los dos puntos de $A \cap C$ son puntos extremos opuestos de C, estos puntos deben de estar en diferentes componentes por arcos de C. Supongamos que $A \cap C = \{x, y\}$, que $x \in B$ y que $y \in R$. Sea K un subarco propio de A que tiene a x. Entonces $K \cup C$ es un subcontinuo de Y con exactamente dos componentes por arcos; estas son $K \cup B$ y R. Como f es débilmente confluente, existe un subcontinuo W de $\mathfrak{S}$ tal que $f(W) = K \cup C$. Como $f(W)$ es un subcontinuo propio de Y, W debe de ser un subcontinuo propio de $\mathfrak{S}$. Además, como $K \cup C$ no es arcoconexo, W no es arcoconexo. Así que, $W = \mathfrak{J} \cup \mathfrak{H}'$, donde $\mathfrak{H}' = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x \leq a \right\}$ para alguna $a \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$. Notemos que $\mathfrak{H}'$ es denso en W. En consecuencia, como $\mathfrak{H}'$ es arcoconexo, cualquier función continua de W en $K \cup C$ debe de mandar a $\mathfrak{H}'$ en alguna de las componentes por arcos de $K \cup C$, ya sea $K \cup B$ ó R. Lo que implica, por el Lema 5.7, que no existe una función continua y sobreyectiva de W en $K \cup C$, lo cual es una contradicción. Por tanto, Y es una curva cerrada simple. ☑

6. Funciones débilmente confluentes sobre curvas cerradas simples

Caracterizaremos a las funciones débilmente confluentes que van de un continuo encadenable en $\mathcal{S}^1$.

Teorema 6.1. *Sea X un subintervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Entonces la función $f\colon X \to \mathcal{S}^1$ definida como $f(x) = e^{ix}$ es débilmente confluente si y sólo si* $\text{diám}(X) \geq 4\pi$.

Demostración. Supongamos que $\text{diám}(X) \geq 4\pi$. Sea Y un subcontinuo de $\mathcal{S}^1$. Si $Y = \mathcal{S}^1$ entonces $f(X) = Y$. Así que, supongamos que Y es un subcontinuo propio de $\mathcal{S}^1$. Entonces Y es un arco. Sea m el punto medio de Y. Sea $\theta \geq 0$ tal que 2θ es el ángulo que subtiende a Y. Notemos que $\theta < \pi$. Sea p el punto medio de X. Entonces existe un punto $q \in [p-\pi, p+\pi]$ tal que $f(q) = m$. Como $p - \pi \leq q \leq p + \pi$ y $0 \leq \theta$, se sigue que $p - 2\pi < q - \theta \leq p + \pi$ y $p - \pi \leq q + \theta < p + 2\pi$. Por tanto, $f([q-\theta, q+\theta]) = Y$.

Ahora, supongamos que $\text{diám}(X) < 4\pi$. Si $\text{diám}(X) < 2\pi$, entonces f no es sobreyectiva y, por consiguiente, no es débilmente confluente. Así que supondremos que $2\pi \leq \text{diám}(X) < 4\pi$. Sean p el punto medio de X y $\theta \geq 0$ tal que 2θ es la longitud de X. Entonces $X = [p-\theta, p+\theta]$. Sean $q = p - \pi$ y $\alpha \in (\pi, \theta)$. Tomemos como Y el subcontinuo de $\mathcal{S}^1$ cuyo punto medio es $f(q)$ y subtiende un ángulo de 2α. Sea X' un subcontinuo de $\mathbb{R}$ tal que $X' \cap X \neq \varnothing$ y $f(X') = Y$. Observemos que X' debe de ser $[q-\alpha, q+\alpha]$ ó $[q + 2\pi - \alpha, q + 2\pi + \alpha] = [p + \pi - \alpha, p + \pi + \alpha]$. Pero ninguno de estos intervalos está contenido en X. Por tanto, f no es débilmente confluente. ☑

Recordemos que el *cubo de Hilbert* es cualquier espacio homeomorfo al producto numerable de copias de $[0,1]$, con la topología producto.

Los dos siguientes lemas son muy conocidos; presentamos su demostración por completez.

Lema 6.2. *El cubo de Hilbert, $\mathcal{Q}$, es contraíble.*

Demostración. Sea $H\colon \mathcal{Q} \times [0,1] \to \mathcal{Q}$ definida como

$$H(((x_n)_{n=1}^{\infty}, t))) = ((1-t)x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Entonces H es una función continua tal que $H(((x_n)_{n=1}^{\infty}, 0))) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $H(((x_n)_{n=1}^{\infty}, 1))) = \overline{0}$, donde $\overline{0}$ es el elemento de $\mathcal{Q}$ que tiene todas sus coordenadas iguales a cero. Por tanto, $\mathcal{Q}$ es contraíble. ☑

Lema 6.3. *Si X es un espacio contraíble y $f\colon X \to \mathcal{S}^1$ es una función continua, entonces f es homotópica a una función constante.*

Demostración. Como X es contraíble, existen un punto $p \in X$ y una función continua $H\colon X \times [0,1] \to X$ tales que $H((x,0)) = x$ y $H((x,1)) = p$ para toda $x \in X$. Sea $G\colon X \times [0,1] \to \mathcal{S}^1$ definida como

$$G((x,t)) = f\left(H((x,t))\right).$$

Entonces G es una función continua tal que $G((x,0)) = f(x)$ y $G((x,1)) = f(p)$ para toda $x \in X$. Por tanto, f es homotópica a una función constante. ☑

Teorema 6.4. *Si X es un continuo encadenable y $f\colon X \to \mathcal{S}^1$ es una función continua, entonces existe una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$.*

Demostración. Notemos que, como X es un continuo encadenable, entonces $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_n$, donde para cada n, $\mathcal{Q}_n$ es un cubo de Hilbert y $\mathcal{Q}_{n+1} \subset \mathcal{Q}_n$ [10, 2.1.30]. Sea $f\colon X \to \mathcal{S}^1$ una función continua. Por [11, 1.5.6 y 1.5.2], existen un abierto U de $\mathcal{Q}_1$ y $F\colon U \to \mathcal{S}^1$ tales que $X \subset U$ y $F|_X = f$. Por [10, 1.6.7], existe un número natural N tal que $\mathcal{Q}_N \subset U$. Como $\mathcal{Q}_N$ es contraíble (Lema 6.2), se tiene que $F|_{\mathcal{Q}_N}$ es homotópica a una función constante (Lema 6.3). En particular, $F|_X = f$ es homotópica a una función constante. Por tanto, existe una función continua $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ [20, (6.2), pág. 225]. ☑

Teorema 6.5. *Sean X un continuo y $f\colon X \to \mathcal{S}^1$ y $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$. Si $c = \text{diám}(X)$, entonces para cualquier función continua $\varphi_1\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi_1(x)}$, se tiene que $\text{diám}(\varphi_1(X)) = c$.*

Demostración. Como X es un continuo, $\varphi(X)$ es un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Supongamos que $\varphi(X) = [a,b]$. Sea $\varphi_1\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = e^{i\varphi_1(x)}$. Como $e^{i\varphi(x)} = e^{i\varphi_1(x)}$ para toda $x \in X$, por [20, (5.1), pág. 221], existe un úmero natural k tal que $\varphi_1(x) - \varphi(x) = 2k\pi$. De donde, $\varphi_1(X) = [a + 2k\pi, b + 2k\pi]$. Por tanto, $\text{diám}(\varphi_1(X)) = (b + 2k\pi) - (a + 2k\pi) = b - a = c$. ☑

Dados un continuo X y una función continua $f\colon X \to \mathcal{S}^1$, llamaremos *la extensión angular de f* al número $\text{diám}(\varphi(X))$, donde $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ para toda $x \in X$. Denotaremos a la extensión angular de f como $AS(f)$. Notemos que, por el Teorema 6.5, la extensión angular de f no depende de la función φ.

Teorema 6.6. *Sean X un continuo encadenable y $f\colon X \to \mathcal{S}^1$ una función continua. Entonces f es débilmente confluente si y sólo si $AS(f) \geq 4\pi$.*

Demostración. Como X es encadenable, por el Teorema 6.4 existe una función continua $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$. Como cualquier función continua sobre un arco es débilmente confluente (Lema 3.4), φ es débilmente confluente. Lo que implica que si f débilmente confluente, entonces la función $\exp\colon \varphi(X) \to \mathcal{S}^1$ definida como $\exp(x) = e^{ix}$ es débilmente confluente (Teorema 3.3). De donde, por el Teorema 6.1, $AS(f) \geq 4\pi$.

Ahora, supongamos que $AS(f) \geq 4\pi$. Entonces, por el Teorema 6.1, se tiene que la función exp es débilmente confluente. Como la composición de funciones déblimente confluentes es débilmente confluente (Teorema 3.2) y φ y exp son débilmente confluentes, entonces f es débilmente confluente. ☑

7. Imágenes homeomorfas de un rayo

Caracterizaremos a $[0,\infty)$ como un espacio métrico, atriódico, localmente compacto y no compacto (Teorema 7.6). Para esto, sean X un continuo y $f\colon [0,\infty) \to X$ una función continua y biyectiva. Definimos el conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in X \mid \text{existe una sucesión } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de elementos de } [0,\infty) \text{ que}$$

$$\text{converge a } \infty \text{ mientras que la sucesión } \{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } x\}.$$

Lema 7.1. *El conjunto $\mathcal{K}$ es compacto y no vacío.*

Demostración. El lema se sigue fácilmente del hecho de que X es un continuo y de que $\mathcal{K} = Cl_X\left(\bigcap\{f(t) \mid t \geq n\}\right)$. ☑

Lema 7.2. *El conjunto $\mathcal{K}$ no puede contener un conjunto de la forma $f([r_0,\infty))$, donde $r_0 \in [0,\infty)$.*

Demostración. Supongamos que existe $r_0 \in [0\infty)$ tal que $f([r_0,\infty)) \subset \mathcal{K}$. Entonces, como f es inyectiva, $f([n-1,n]) \cap \mathcal{K}$ no es denso en ninguna parte en $\mathcal{K}$ para cada número natural n. De donde, como $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([n-1,n]) \cap \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ sería de la primera categoría en sí mismo. Lo cual, por [7, Teorema 2-82], contradice el Lema 7.1. ☑

Lema 7.3. *Si $a, b \in [0,\infty)$ son tales que $a \leq b$ y $f(a), f(b) \in \mathcal{K}$, entonces $f([a,b]) \subset \mathcal{K}$.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existen $a, b, c \in [0, \infty)$ tales que $a \leq c \leq b$, $f(a), f(b) \in \mathcal{K}$ y $f(c) \in X \setminus \mathcal{K}$. Sean $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $[0, \infty)$ que convergen a ∞ y tales que $\{f(s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(a)$ y $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(b)$. Podemos suponer que para cada número natural n, $s_n < t_n$. Para cada n, sea $A_n = f([s_n, t_n])$. Como X es compacto, sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un subcontinuo A de X [10, 1.8.5]. Observemos que, por la definición de $\mathcal{K}$, se tiene que $A \subset \mathcal{K}$. En consecuencia, $f(c) \in X \setminus A$. Si $f^{-1}(A) \subset [0, r]$, para alguna $r \in [0, \infty)$, entonces $A \cup f([a, b])$ sería un subcontinuo del arco $[0, \text{máx}\{b, r\}]$. Por consiguiente, $A \cup f([a, b])$ sería un arco, lo cual no es posible, ya que $f(a), f(b) \in A \cap f([a, b])$ y $f(c) \notin A \cap f([a, b])$ implicaría que $A \cap f([a, b])$ no es conexo. De esta manera hemos probado que

$$A \text{ no está contenido en ningún intervalo cerrado y acotado de } [0, \infty). \tag{***}$$

Como $A \subset \mathcal{K}$, por el Lema 7.2 existe una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $[0, \infty)$ que converge a ∞ tal que la sucesión $f(u_n) \notin A$ para ninguna n. Sin pérdida de generalidad, supondremos que para cada n, $u_n \leq u_{n+1}$. Dado un número natural n, sea $M_n = [u_{n-1}, u_n] \cap f^{-1}(A)$, donde $u_0 = 0$. Por (***), para una infinidad de números naturales n, $M_n \neq \varnothing$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $M_n \neq \varnothing$ para toda n. Como f es inyectiva, los elementos de la sucesión de conjuntos compactos $\{f(M_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son mutuamente disyuntos. Observemos que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(M_n)$. De esta manera, hemos puesto al continuo A como una unión numerable de subconjuntos cerrados y mutuamente disyuntos, lo cual no es posible [16, 5.16]. Por tanto, el resultado es cierto. ☑

Lema 7.4. *El conjunto $\mathcal{K}$ es un punto o un arco de la forma $f([s_0, t_0])$, donde $0 \leq s_0 \leq t_0 < \infty$.*

Demostración. Por el Lema 7.1, $f^{-1}(\mathcal{K})$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $[0, \infty)$. Sea $s_0 = \text{mín}\, f^{-1}(\mathcal{K})$. Ahora, por el Lema 7.3, si $t \in f^{-1}(\mathcal{K})$ entonces $f([s_0, t]) \subset \mathcal{K}$. De donde, por Lema 7.2, $f^{-1}(\mathcal{K})$ tiene una cota superior. Sea $t_0 = \sup f^{-1}(\mathcal{K})$. Como $\mathcal{K}$ es compacto, $t_0 \in f^{-1}(K)$. En consecuencia, por Lema 7.3, $[s_0, t_0] \subset f^{-1}(K)$. Como f es sobreyectiva, se tiene que $[s_0, t_0] = f^{-1}(K)$. Por tanto, $f([s_0, t_0]) = \mathcal{K}$. ☑

Antes de probar el siguiente teorema notemos que si M es un espacio métrico localmente compacto, entonces la *compactación unipuntual de M* será denotada por M^*, donde el punto al infinito es ω. De esta forma, $M^* = M \cup \{\omega\}$.

Teorema 7.5. *Si M es un espacio métrico localmente compacto que es una imagen continua e inyectiva de $[0,\infty)$, entonces M es homeomorfo a $[0,\infty)$ ó M es compacto.*

Demostración. Sea $j\colon [0,\infty) \to M$ una función continua y biyectiva. Supongamos que M no es compacto. Veremos que j es un homeomorfismo. Sean γ un arco y $h\colon [-1,0] \to \gamma$ un homeomorfismo. Sea $Y = M^* \cup \gamma$ el espacio que se obtiene al identificar a $h(-1)$ con ω y a $h(0)$ con $j(0)$ (así $M^* \cap \gamma = \{\omega, j(0)\}$). Ahora, sea $J\colon [-1,\infty) \to Y$ definida como

$$J(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si } t \in [-1,0], \\ j(t) & \text{si } t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Entonces J es una función continua e inyectiva. Como $J(-1)$ tiene la propiedad de que existe una sucesión de puntos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $[0,\infty)$ que converge a ∞ tal que la sucesión $\{J(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $J(-1)$ (pues $J(-1) = \omega$ y hemos supuesto que M no es compacto) y $J(t)$ no tiene esa propiedad para ninguna $t \in (-1,0)$, se sigue del Lema 7.4, que el conjunto $\{x \in X \mid \text{existe una sucesión } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de elementos de } [0,\infty) \text{ que converge a } \infty \text{ mientras que la sucesión } \{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } x\}$ es vacío. De donde se obtiene que j es un homeomorfismo. ☑

Teorema 7.6. *Sean Z un espacio métrico, atriódico, localmente compacto, no compacto y $f\colon [0,\infty) \to Z$ una función continua y sobreyectiva. Entonces Z es homeomorfo a $[0,\infty)$.*

Demostración. Notemos que Z es arcoconexo. Primero veremos que si n es un número natural entonces $f([0,n])$ es un arco o un punto. Para esto, sea n un número natural fijo. Notemos que $f([0,n])$ es un continuo localmente conexo [16, 8.16] y atriódico. En consecuencia, $f([0,n])$ es un arco, una curva cerrada simple o un punto [16, 8.40]. Supongamos que $f([0,n])$ es una curva cerrada simple. Como Z no es compacto, existe $t \in [0,\infty)$ tal que $f(t) \in Z \setminus f([0,n])$. Lo que implica que Z contiene a un triodo simple, pues Z es arcoconexo, lo cual es una contradicción.

Ahora veremos que existe una función inyectiva $g\colon [0,\infty) \to Z$. Como Z tiene más de un punto, por el párrafo anterior existe un número natural n_1 tal que $f([0,n_1])$ es un arco. Ahora, supongamos inductivamente que hemos encontrado un número natural n_j tal que $n_j > n_1$, $f([0,n_{j-1}]) \subset f([0,n_j])$ y $f([0,n_j])$ es un arco. Como $Z \neq f([0,n_j])$, existe un número natural $n_{j+1} \geq n_j + 1$ tal que $f(n_{j+1})$ no es un elemento de $f([0,n_j])$, $f([0,n_j]) \subset f([0,n_{j+1}])$ y $f([0,n_{j+1}])$ es un arco. De esta forma, por inducción, hemos encontrado una subsucesión $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión natural $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f([0,n_j]) \subset f([0,n_{j+1}])$ y $f([0,n_j])$ es un arco para todo número natural j. Dado el número natural

j, sea $A_{j+1} = Cl_Z\left(f([n_j, n_{j+1}]) \setminus f([0, n_j])\right)$. Notemos que cada A_j es un arco y que $A_j \cap A_{j+1} = \{f(n_j)\}$.

Sea $g_1\colon [0, n_1] \to f([0, n_1])$ un homeomorfismo. Si $j > 1$ entonces sea $g_j\colon [n_{j-1}, n_j] \to A_j$ un homeomorfismo. Notemos que para cada número natural $j \geq 2$, $g_j(n_j) = g_{j+1}(n_j)$. Esto nos permite definir una función $g\colon [0, \infty) \to Z$ como $g(t) = g_j(t)$ si $t \in [n_{j-1}, n_j]$. Observemos que g es una función continua y biyectiva.

Como Z no es compacto, por el Teorema 7.5, Z es homeomorfo a $[0, \infty)$. ☑

8. Las caracterizaciones

Presentaremos las caracterizaciones mencionadas en la introducción.

Teorema 8.1. *Si Y es un continuo y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ es una función débilmente confluente, entonces Y es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios:*

(1) *un arco;*

(2) *una curva cerrada simple;*

(3) *una compactación de $[0, \infty)$, con un arco como residuo;*

(4) *una compactación de $[0, \infty)$, con una curva cerrada simple como residuo.*

Demostración. Primero notemos que $\mathfrak{S}$ es un continuo atriódico [10, 2.1.41] y que es fácil ver que es susliniano. De donde, por el Teorema 4.1, Y es atriódico.

Si Y es arcoconexo, entonces, por el Teorema 4.4, Y es un arco o un continuo circularmente encadenable y arcoconexo. Si Y es un continuo circularmente encadenable y arcoconexo entonces, por el Teorema 5.8, Y es una curva cerrada simple.

Si Y no es arcoconexo entonces $f(\mathfrak{H}) \cap f(\mathfrak{J}) = \emptyset$. Como $\mathfrak{J}$ es compacto, $f(\mathfrak{J})$ es cerrado en Y. Lo que implica que $f(\mathfrak{H}) = Y \setminus f(\mathfrak{J})$ es abierto en Y. Así que $f(\mathfrak{H})$ es un espacio localmente compacto que no es compacto. Como Y es atródico, $f(\mathfrak{H})$ es atriódico. De donde, por el Teorema 7.6, $f(\mathfrak{H})$ es homeomorfo a $[0, \infty)$. Más aún, $f(\mathfrak{H})$ es denso en Y, puesto que $f\left(Cl_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{H})\right) = f(\mathfrak{S}) = Y$ y $f\left(Cl_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{H})\right) \subset Cl_Y\left(f(\mathfrak{H})\right)$ por la continuidad de f. Lo anterior implica que Y es una compactación de $[0, \infty)$. Como $f(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{J}) = f(\mathfrak{S}) = Y$ y $f(\mathfrak{H}) \cap f(\mathfrak{J}) = \emptyset$, se sigue que $f(\mathfrak{J}) = Y \setminus f(\mathfrak{H})$. Además, puesto que $J = f^{-1}(f(\mathfrak{J}))$, $f|_{\mathfrak{J}}\colon \mathfrak{J} \to f(\mathfrak{J})$ es débilmente confluente. Así se obtiene que, por el Corolario 4.2, $f(\mathfrak{J})$ es un arco o una curva cerrada simple. Por tanto, Y es una compactación de $[0,\infty)$ cuyo resido es un arco o una curva cerrada simple. ☑

Teorema 8.2. *Sean Y un continuo y $f\colon \mathfrak{S} \to Y$ una función continua. Entonces f es débilmente confluente si y sólo si Y es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios:*

(1) *un arco;*

(2) *una curva cerrada simple y $AS(f) \geq 4\pi$;*

(3) *una compactación de $[0,\infty)$, con un arco como residuo;*

(4) *una compactación de $[0,\infty)$, con una curva cerrada simple como residuo y $AS(f|_{\mathfrak{J}}) \geq 4\pi$.*

Demostración. Si f es débilmente confluente, por el Teorema 8.1 se tiene que Y es homeomorfo a un arco, a una curva cerrada simple o a una compactación de $[0,\infty)$ cuyo resido es un arco o una curva cerrada simple. Si Y es homeomorfo una curva cerrada simple, por el Teorema 6.6, $AS(f) \geq 4\pi$. Si Y es homeomorfo a una compactación de $[0,\infty)$ cuyo residuo es una curva cerrada simple entonces, como $\mathfrak{J}$ es la componente por arcos compacta de $\mathfrak{S}$, se tiene que $f(\mathfrak{J})$ debe de ser la componente por arcos compacta de Y. Por consiguiente, $f(\mathfrak{J})$ debe de ser una curva cerrada simple (el residuo de la compactación). Además, $f|_{\mathfrak{J}}$ debe de ser débilmente confluente. Por tanto, por el Teorema 6.6, $AS(f|_{\mathfrak{J}}) \geq 4\pi$.

Inversamente, si Y es homeomorfo a un arco o a una compactación de $[0,\infty)$ cuyo resido es un arco entonces Y es encadenable y, por el Teorema 3.5, f es débilmente confluente.

Si Y es homeomorfo a una curva cerrada simple y $AS(f) \geq 4\pi$, entonces, por el Teorema 6.6, f es débilmente confluente.

Finalmente, supongamos que Y es homeomorfo a una compactación de $[0,\infty)$ con una curva cerrada simple como residuo y $AS(f|_{\mathfrak{J}}) \geq 4\pi$. Como $\mathfrak{J}$ es la componente por arcos compacta de $\mathfrak{S}$, $f(\mathfrak{J})$ debe de ser la componente por arcos compacta de Y. De donde $f(\mathfrak{J})$ es una curva cerrada simple. Como $AS(f|_{\mathfrak{J}}) \geq 4\pi$, por el Teorema 6.6 $f|_{\mathfrak{J}}$ es débilmente confluente. Sea B un subcontinuo de Y. Si B es un subcontinuo de $f(\mathfrak{J})$, como $f|_{\mathfrak{J}}$ es débilmente confluente, existe un subcontinuo A de $\mathfrak{J}$ tal que $f(A) = B$. Si B es un subcontinuo de $f(\mathfrak{H})$, entonces B está contenido en un subarco Q de $f(\mathfrak{H})$. De donde, por el Lema 3.4, $f|_{f^{-1}(Q)}\colon f^{-1}(Q) \to Q$ es débilmente confluente. Lo que implica que existe un subcontinuo A de $\mathfrak{H}$ tal que $f(A) = B$. Si B no está contenido en $f(\mathfrak{J})$ ni en $f(\mathfrak{H})$, entonces B consiste de $f(\mathfrak{J})$ y un rayo no acotado de $f(\mathfrak{H})$. Entonces algún rayo no acotado R de $\mathfrak{H}$ debe de ser mandado por f en $B \cap f(\mathfrak{H})$. De esta manera, $A = \mathfrak{J} \cup R$ es un subcontinuo de $\mathfrak{S}$ tal que $f(A) = B$. Por tanto, f es débilmente confluente. ☑

Observación 8.3. Aunque en la tesis de Brooks [2] sólo se habla de la curva sinusoidal del topólogo, notemos que los Teoremas 5.8, 8.1 y 8.2 son válidos para cualquier compactación de $[0, \infty)$ cuyo residuo sea un arco. Por tanto, en este trabajo se han caracterizado no sólo las imágenes débilmente confluentes de la curva sinusoidal del topólogo, sino de cualquier compactación de $[0, \infty)$ cuyo residuo sea un arco.

Referencias

[1] R H Bing. "Snake-like Continua", *Duke Math. J.*, 18 (1951), 653-663.

[2] J. A. Brooks. *Weakly Confluent Images of the Sinusoidal Curve*, Tesis de Maestría, West Virginia University, 1988.

[3] J. J. Charatonik. "Confluent Mappings and Unicoherent Continua", *Fund. Math.*, 56 (1964), 213-220.

[4] C. A. Eberhart, J. B. Fugate y G. R. Gordh, Jr. "Branchpoint Covering Theorems for Confluent and Weakly Confluent Maps", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 55 (1976), 409-415.

[5] S. Eilenberg y N. Steenod. *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1952.

[6] E. E. Grace y E. J. Vought. "Semi-confluent and Weakly Confluent Images of Tree-like and Atriodic Continua", *Fund. Math.*, 101 (1978), 151-158.

[7] J. G. Hocking y G. S. Young. *Topology*, Dover, New York, 1988.

[8] A. Lelek, Some Problems Concerning Curves, Colloq. Math., 23 (1971), 93-98.

[9] S. Macías. *La Estructura de los Dendroides Suaves*, Aportaciones Matemáticas # 10 de la Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[10] S. Macías. *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[11] J. van Mill. *Infinite-dimensional Topology*, North Holland, Amsterdam, 1989.

[12] S. Mardešić y J. Segal. "ε-mappings onto Polyhedra", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 109 (1963), 146-164.

[13] S. B. Nadler, Jr. "Multicoherence Techniques Applied to Inverse Limits", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157 (1971), 227-234.

[14] S. B. Nadler, Jr. "Arc Components of Certain Chainable Continua", *Canadian Math. Bull.*, 14 (1971), 183-189.

[15] S. B. Nadler, Jr. "Confluent Images of the Sinusoidal Curve", *Houston J. Math.*, 3 (1977), 515-519.

[16] S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[17] S. B. Nadler, Jr. y J. Quinn. "Embeddability and Structure Properties of Real Curves", *Memoirs Amer. Math. Soc.*, Vol. 125, Providence R. I., 1972.

[18] S. B. Nadler, Jr. y J. Quinn. "Embedding Certain Compactifications of a Half-ray", *Fund. Math.*, 78 (1973), 217-225.

[19] D. R. Reed. "Confluent and Related Mappings", *Colloq. Math.*, 29 (1974), 233-239.

[20] G. T. Whyburn. *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Providence, R. I., 1942.

(Recibido el 2 de julio 2009; aceptado el 19 de octubre de 2009)

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior
Ciudad Universitaria
México D.F.
C.P. 04510, México
e-mail: `macias@servidor.unam.mx`