Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 27, No. 2, 2009, pág. 125–133

Análisis comparativo de algunos modelos analíticos para estrellas de quarks

Manuel Malaver de la Fuente*

Resumen. En la presente investigación se ha encontrado una nueva clase de soluciones que resuelven el sistema de ecuaciones de Maxwell-Einstein que satisface una ecuación lineal de estado para estrellas de quarks. Se propone una nueva forma particular de potencial gravitacional que depende de un parámetro ajustable, se resuelve el sistema de ecuaciones de Maxwell-Einstein y se obtiene una ecuación diferencial de primer orden cuya solución es una familia de modelos analíticos singulares y no singulares para estrellas de quarks cargadas. Variables como la densidad de energía, la presión y la intensidad de campo eléctrico se escriben en términos de funciones racionales polinómicas. Una modificación del parámetro ajustable permite obtener una solución no singular propuesta por Komathiraj y Maharaj. A diferencia de otros modelos propuestos, la forma del potencial gravitacional escogido permite resolver la ecuación diferencial para cualquier valor del parámetro y obtener soluciones físicamente aceptables.

1. Introducción

La existencia de estrellas de quarks en equilibrio hidrostático fue sugerido por Itoh [1] en un tratamiento preliminar. Las soluciones exactas del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell para campos gravitacionales con simetría esférica son necesarias para describir el comportamiento de esferas compactas cargadas en relatividad general y han generado una gran cantidad de diferentes aplicaciones en sistemas estelares relativistas, como es el caso de los modelos que estudian el comportamiento de estrellas sometidas a fuertes campos gravitacionales conocidas como estrellas de neutrones [2].

Palabras y frases claves: Ecuaciones de Maxwell-Einstein, estrellas de quarks, parámetro ajustable, potencial gravitacional.
MSC2000: 83Cxx, 83C22, 83.31.

* Universidad Marítima del Caribe, Catia la Mar, Estado Vargas, Venezuela. *e-mail*: mmf_umc@hotmail.com

Diversos investigadores han usado una gran variedad de técnicas matemáticas para intentar obtener soluciones exactas, las cuales se han utilizado para analizar las propiedades físicas de estrellas esféricas cargadas, como lo han demostrado Komathiraj y Maharaj [3], Sharma *et al.* [4], Patel y Koppar [5], Patel *et al.* [6] y Tikekar y Singh [7]. Estos análisis indican que el sistema de ecuaciones Einstein-Maxwell es importante en la descripción de objetos astronómicos densos.

Debido a que la física de objetos de altas densidades constituidos por materia de quarks no ha sido bien comprendida, recientes investigaciones se han centrado en el desarrollo de modelos descritos por una ecuación de estado del tipo

$$p = \tfrac{1}{3}(\rho - 4B), \tag{1}$$

donde ρ es la densidad de energía, p es la presión isotrópica y B es una constante [8]. La restricción del quark es determinada por la constante B que equilibra la presión de quarks y estabiliza el sistema. Los estudios de Bombaci [9], Li *et al.* [10], Dey *et al.* [11], Pons *et al.* [12] y Usov [13], dirigidos hacia objetos astronómicos compactos, sugieren que podrían tratarse de estrellas de quarks cuyo comportamiento está descrito por una ecuación de estado del tipo (1).

Considerando la suposición de simetría esférica y la existencia de un vector de Killing conforme, Mak y Harko [14] encuentran un modelo relativista de estrella de quarks cargada, que resultó ser parte de una clase más general de modelos analíticos en presencia de campos electromagnéticos con presión isotrópica, como lo demostraron Komathiraj y Maharaj en un reciente estudio [15].

En esta investigación se utilizó el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell con la ecuación de estado (1) y se obtuvo una nueva clase de soluciones exactas para estrellas de quarks cargadas. Se propone una nueva forma del potencial gravitacional dependiente de un parámetro ajustable, que permite obtener uno de los modelos analíticos no singulares propuestos por Komathiraj y Maharaj [15]. En la sección 2 se escriben las ecuaciones de Einstein-Maxwell como un conjunto de ecuaciones diferenciales utilizando la transformación debida a Durgapal y Bannerji [16]. En la sección 3 se presenta el modelo propuesto con una forma muy específica de potencial gravitacional. En las secciones 4 y 5 se estudian dos nuevos modelos de estrellas de quarks cargadas, un modelo no singular y otro singular, respectivamente. En la sección 6 se presentan las conclusiones de este trabajo.

2. Las ecuaciones de campo

Considerando que el espacio-tiempo es estático y esféricamente simétrico (lo cual es consistente con el estudio de objetos cargados compactos en astrofísica relativista), la métrica de este espacio-tiempo estará dada por

$$ds^{\,2} = -\epsilon^{2\nu(r)}dt^{\,2} + \epsilon^{2\lambda(r)}dr^{\,2} + r^2(d\theta^{\,2} + \sin^2\theta d\phi^{\,2}), \tag{2}$$

donde $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ son dos funciones arbitrarias. Para esferas cargadas el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell queda como

$$\frac{1}{r^2}(1-\epsilon^{-2\lambda}) + \frac{2\lambda'}{r}\epsilon^{-2\lambda} = \rho + \tfrac{1}{2}E^2 \tag{3}$$

$$-\frac{1}{r^2}(1-\epsilon^{-2\lambda}) + \frac{2\nu'}{r}\epsilon^{-2\lambda} = p - \tfrac{1}{2}E^2, \tag{4}$$

$$\epsilon^{2\lambda}\left(\nu'' + \nu'^{\,2} + \frac{\nu'}{r} - \nu'\lambda' - \frac{\lambda'}{r}\right) = p + \tfrac{1}{2}E^2, \tag{5}$$

$$\sigma = \frac{1}{r^2}\epsilon^{\lambda}(r^2E)', \tag{6}$$

donde p es la presión de la estrella, E es la intensidad del campo eléctrico, ρ es la densidad de energía y σ es la densidad de carga. Las primas indican derivada respecto a la coordenada radial.

Es conveniente introducir la siguiente transformación:

$$A^2\,y^2(x) = \epsilon^{2\nu(r)}, \qquad Z(x) = \epsilon^{-2\lambda(r)}, \qquad x = C\,r^2, \tag{7}$$

donde A y C son constantes arbitrarias. Con esta transformación, el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell toma la forma equivalente

$$\frac{1-Z}{x} - 2\dot{Z} = \frac{\rho}{C}, \tag{8}$$

$$4Z\,\frac{\dot{y}}{y} + \frac{Z-1}{x} = \frac{p}{C} - \frac{E^2}{2C}, \tag{9}$$

$$4\,Z\,x^2\ddot{y} + 2\,\dot{Z}\,x^2\dot{y} + \left(\dot{Z}\,x - Z + 1 - \frac{E^2\,x}{C}\right)\,y = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\sigma^2}{C} = \frac{4\,Z}{x}\left(x\,\dot{E} + E\right)^2, \tag{11}$$

donde el punto denota derivada con respecto a la variable x. La ecuación (10) es la condición de presión isotrópica. Se puede reemplazar el sistema de ecuaciones de campo, incluyendo la ecuación (1), por el sistema

$$\rho = 3\,p + 4\,B, \tag{12}$$

$$\frac{p}{C} = Z\,\frac{\dot{y}}{y} - \frac{1}{2}\,\dot{Z} - \frac{B}{C}, \tag{13}$$

$$\frac{E^2}{2\,C} = \frac{1-Z}{x} - 3Z\frac{\dot{y}}{y} - \frac{1}{2}\dot{Z} - \frac{B}{C}, \tag{14}$$

$$0 = 4\,Z\,x^2\,\ddot{y} + \left(6\,x\,Z + 2\,x^2\,\dot{Z}\right)\,\dot{y} + \left[2\,x\left(\dot{Z} + \frac{B}{C}\right) + Z - 1\right], \tag{15}$$

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{C\,Z}{x}}\,\left(E + x\,\dot{E}\right). \tag{16}$$

Las ecuaciones (12) a (16) gobiernan el comportamiento gravitacional de una estrella de quark cargada.

3. El modelo

Utilizando el procedimiento sugerido por Komathiraj y Maharaj [3], es posible obtener una solución para el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell. En efecto, las ecuaciones (12)-(16) poseen las variables independientes (Z, y, p, ρ, E, σ). En la presente investigación se elige una forma particular del potencial gravitacional $y(x)$, de tal manera que se genere una ecuación diferencial de primer orden que tenga solución en término de funciones elementales. Para resolver el sistema de ecuaciones, se escoge la forma particular del potencial

$$y = (a + \alpha x)^2\,, \tag{17}$$

donde α y a son constantes. La forma elegida garantiza que $y(x)$ es continua y se comporta bien en el interior de la estrella para un amplio intervalo de valores de α. AL igual que en el modelo de Komathiraj y Maharaj [3], la función $y(x)$ se hace infinita en el centro de la estrella. La sustitución de (17) en (12)-(16) permite obtener la ecuación de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{Z} &+ \frac{21\,x^2\,\alpha^2 + 14\,x\,\alpha\,a + a^2}{8\,x^2\,a\,\alpha + 6\,x^3\,\alpha^2 + 2\,x\,a^2}\,Z \\ &= \frac{\left(1 - \frac{2B}{C}x\right)\left(a^2 + 2\,\alpha\,a\,x + \alpha^2\,x^2\right)}{8\,x^2\,a\,\alpha + 6\,x^3\,\alpha^2 + 2\,x\,a^2}.\end{aligned} \tag{18}$$

Es posible entonces obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell con la ecuación lineal de estado para diferentes valores de α, tal como se muestra en algunos ejemplos de esta investigación.

Obsérvese que para el caso $\alpha = 1$ se reproduce el modelo de estrellas de quarks cargadas no singular propuesto por Komathiraj y Maharaj [15]. Es interesante recalcar el hecho de que la ecuacion diferencial (18) se puede resolver para cualquier valor del parámetro α, obteniéndose en algunos casos soluciones singulares y no singulares, lo que no ocurre para la forma de $y(x)$ propuesta por Komathiraj y Maharaj [15], en la cual la ecuación diferencial obtenida cuando se reemplaza $y(x)$ en el sistema de ecuaciones (12)-(16) solo se podía resolver para pocos casos.

4. Modelo no singular con $\alpha = 2$

Una nueva solución exacta del sistema de ecuaciones (12)-(16) se puede encontrar con $\alpha = 2$. Para este caso (17) queda como

$$y = (a + 2x)^2 . \tag{19}$$

La ecuación (18) se convierte en:

$$\dot{Z} + \frac{84\,x^2 + 28\,x\,a + a^2}{16\,x^2\,a + 24\,x^3 + 2\,x\,a^2}\,Z = \frac{\left(1 - \frac{2B}{C}x\right)\left(a^2 + 4\,a\,x + 4\,x^2\right)}{16\,x^2\,a + 24\,x^3 + 2\,x\,a^2}, \tag{20}$$

la cual se puede integrar para dar la función

$$Z = \frac{1}{\Gamma_0}\Big[9\left(40\,x^3 + 84\,a\,x^3 + 70\,a^2\,x + 35\,a^3\right) - \frac{2Bx}{C}(280\,x^3 + 540\,a\,x^2 + 378\,a^2\,x + 105\,a^3)\Big], \tag{21}$$

donde $\Gamma_0 = 315\,(2\,x + a)^2\,(6\,x + a)$. Esta función permite generar el siguiente modelo analítico:

$$\epsilon^{2\nu} = A^2\,(a + 2\,x)^4 , \tag{22}$$

$$\epsilon^{2\lambda} = \frac{1}{Z}, \tag{23}$$

$$\rho = f(x) + \frac{1}{\Gamma_1}\Big[60480Bx^5 + 99600aBx^4 + 58896a^2Bx^3 + 15120a^3Bx^2 + 2520a^4Bx + 315Ba^5\Big], \tag{24}$$

$$p = g(x) + \frac{1}{\Gamma_1}\Big[- 100800\,Bx^5 + (6480C - 188560\,aB)x^4 + (15408\,aC - 134928\,a^2B)x^3 + (15120\,Ca^2 - 45360\,Ba^3)x^2 + (8820\,Ca^3 - 6720\,Ba^4)x + 1575\,Ca^4 - 315\,Ba^5\Big], \tag{25}$$

$$\begin{aligned}E^2 = h(x) + \frac{1}{\Gamma_1}\Big[&60480\,Bx^5 + (124480\,aB - 38880\,C)x^4 \\ &+ (96768\,Ba^2 - 86688\,aC)x^3 + (33264\,Ba^3 - 78624\,Ca^2)x^2 \\ &+ (2940\,Ba^4 - 42840\,Ca^3)x - 4410\,Ca^4 - 630\,Ba^5\Big], \quad (26)\end{aligned}$$

donde $\Gamma_1 = (2\,x + a)\,(6\,x + a)\,\Gamma_0$.

Se ha establecido que

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{1}{\Gamma_1}\Big[&(1080\,C - 8925\,B)x^3 + (2916\,aC + 9396\,Ba^2)x^2 \\ &+ (3402\,a^2C + 378\,a^3B)x + 2835\,Ca^3 + 315\,Ba^4\Big], \quad (27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x) = \frac{1}{\Gamma_1}\Big[&(360\,C - 2984\,B)x^3 + (972\,aC + 3132\,Ba^2)x^2 \\ &+ (1134\,a^2C + 126\,a^3B)x + 945\,Ca^3 + 105\,Ba^4\Big], \quad (28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(x) = \frac{1}{\Gamma_1}\Big[&2\,C(6660\,x^2 + 7308\,ax + 2205\,a^2) \\ &+ 2\,B(1680\,x^3 + 2700\,ax^2 + 1512\,a^2x + 315\,a^3)\Big]. \quad (29)\end{aligned}$$

El modelo mostrado satisface el sistema de ecuaciones (12)-(16) y constituye otra nueva familia de soluciones para una estrella de quarks cargada. Los potenciales gravitacionales $\epsilon^{2\nu}$ y $\epsilon^{2\lambda}$ se pueden escribir en términos de funciones polinómicas, y las variables densidad, presión y la intensidad de campo eléctrico también se representan analíticamente. La función $\epsilon^{2\nu}$ es continua y se comporta bien en el interior de la estrella y tienen un valor finito de $\epsilon^{2\nu} = A^2\,a^4$ en $x = 0$. La densidad de energía ρ es positiva en el interior y en el centro adquiere el valor de $\rho = 2B$. La presión p es regular y en el centro $x = 0$ tiene el valor $p = \frac{8C}{a} - \frac{2B}{3}$. La intensidad de campo eléctrico es continua en el interior y se desvanece en el centro $x = 0$. El hecho de que las funciones $\epsilon^{2\nu}$, $\epsilon^{2\lambda}$, ρ, p y E tengan un valor finito en $x = 0$ implica que las soluciones (20)-(26) para estrellas de quarks cargadas son físicamente aceptables y no presentan singularidades en el origen, tal como lo establecen Jotania y Tikekar [17].

5. *Modelo singular con* $\alpha = 4$

Otra solución exacta puede ser encontrada con $\alpha = 4$. Para este caso particular se obtiene de (17)

$$y = (a + 4x)^2. \quad (30)$$

La ecuación diferencial (18) queda como:

$$\dot{Z} + \frac{336\,x^2 + 56\,x\,a + a^2}{32\,x^2\,a + 96\,x^3 + 2\,x\,a^2}\,Z = \frac{\left(1 - \frac{2B}{C}x\right)\left(a^2 + 8\,a\,x + 16\,x^2\right)}{32\,x^2\,a + 96\,x^3 + 2\,x\,a^2}, \tag{31}$$

la cual, al ser integrada, permite obtener la siguiente función Z:

$$Z = \frac{1}{\Gamma_1}\Big[- \tfrac{256}{9}\,Bx^4 - \tfrac{2}{7}(96\,aB - 64\,C)x^3 - \tfrac{2}{5}(24\,a^2B - 48\,aC)x^2 - \tfrac{2}{3}(2\,Ba^3 - 12\,Ca^2)x + 2\,Ca^3\Big]. \tag{32}$$

La expresión (32) permite generar el siguiente modelo analítico:

$$\epsilon^{2\nu} = A^2(a + 4\,x)^4, \tag{33}$$

$$\epsilon^{2\lambda} = \frac{2\,C\,\Gamma_2}{\Gamma_1 Z}, \tag{34}$$

$$\rho = k(x) + \frac{1}{\Gamma_3}\Big[43008\,Bx^5 + \left(\tfrac{27648}{7}\,C + \tfrac{603136}{21}\,aB\right)x^4 + \tfrac{1}{35}\left(164352\,aC + 310784\,a^2B\right)x^3 + (2304\,Ca^2 + 1344\,a^3B)x^2 + (672\,Ca^3 + 104\,Ba^4)x + 60\,Ca^4 + 4\,Ba^5\Big], \tag{35}$$

$$p = m(x) + \frac{1}{\Gamma_3}\Big[2048\,Bx^5 + \left(\tfrac{9216}{7}\,C - \tfrac{106496}{63}\,aB\right)x^4 + \tfrac{1}{35}(54784\,aC - 33792\,a^2B)\,x^3 + (768\,Ca^2 - 192\,a^3B)x^2 + \left(224\,Ca^3 - \tfrac{40}{3}\,Ba^4\right)x + 20\,Ca^4\Big], \tag{36}$$

$$E^2 = n(x) + \frac{1}{x\,\Gamma_2}\Big[C(4\,x + a)^2(12\,x + a) + \tfrac{256}{9}\,Bx^4 + \tfrac{2}{7}(96\,96aB - 64\,C)x^3 + \tfrac{2}{5}(24\,a^2B - 48\,aC)x^2 + \tfrac{2}{3}(2\,Ba^3 - 12\,Ca^2)x - 2\,Ca^2\Big], \tag{37}$$

donde $\Gamma_2 = (4\,x + a)^2(12\,x + a)$ y $\Gamma_3 = (4\,x + a)(12\,x + a)\Gamma_2$.

Se ha considerado que

$$k(x) = \frac{1}{\Gamma_3}\Big[\tfrac{2048}{3}\,Bx^5 + \tfrac{1}{3}(512\,aB - 7168\,B)x^4 - (\tfrac{12800}{42}\,aB + \tfrac{2304}{7}\,C)x^3 - \tfrac{1}{7}(4896\,a^2B + 576\,aC)x^2 - (\tfrac{186}{5}\,Ba^3 + \tfrac{468}{5}\,Ca^2)x - 9\,Ca^3 - B\,a^4\Big], \tag{38}$$

$$m(x) = \frac{1}{\Gamma_3}\Big[\tfrac{2048}{9}\,Bx^5 + \tfrac{1}{9}(512\,aB - 7168\,B)x^4 - (\tfrac{12800}{14}\,aB + \tfrac{768}{7}\,C)x^3 \\ - \tfrac{1}{7}(1632\,a^2B + 192\,aC)x^2 - (\tfrac{186}{15}\,Ba^3 + \tfrac{156}{5}\,Ca^2)x - 9\,Ca^3 - Ba^4\Big], \quad (39)$$

$$n(x) = \frac{1}{\Gamma_3}\Big[-\tfrac{60416}{3}\,Bx^5 \\ - (\tfrac{831744}{63}\,aB + \tfrac{18432}{7}\,C)x^4 - \tfrac{1}{35}(140800\,a^2B + 97280\,aC)x^3 \\ - \Big(\tfrac{1}{35}(27512\,Ba^3 + 4656\,Ca^2) - \tfrac{8192}{3}\Big)x^2 \\ - (\tfrac{946}{15}\,Ba^4 + \tfrac{464}{5}\,Ca^3 - \tfrac{8192}{9}\,a)x \\ + 13\,Ca^4 + \tfrac{512}{9}\,a^2 - \tfrac{4}{3}\,Ba^5\Big], \quad (40)$$

Para esta clase de solución encontrada, los funciones $\epsilon^{2\nu}$ y $\epsilon^{2\lambda}$ adquieren valores finitos en el centro $x = 0$, al igual que en el caso para $\alpha = 2$. La densidad de energía toma el valor de $\rho = \frac{51C}{a} + 3\,B$ en el centro de la estrella. En $x = 0$, la presión toma el valor de $p = \frac{17C}{a} - \frac{B}{3}$. Sin embargo, esta clase de solución posee una singularidad en la densidad de carga y en el campo eléctrico. Esta singularidad en $x = 0$ no se presenta en la densidad, la cual siempre permanece finita, lo cual contrasta con el modelo de Mak y Harko [14] y Komathiraj y Maharaj [15].

6. Conclusiones

Se ha generado una nueva clase de soluciones exactas para el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell. Se estudiaron dos nuevos tipos de soluciones analíticas especificando la forma del potencial gravitacional. El primer tipo de solución es un modelo de estrella de quarks no singular que tiene valores finitos para la densidad, la presión y la intensidad de campo eléctrico en el centro de la estrella. La segunda clase de solución presenta un comportamiento similar al de la solución de Komathiraj y Maharaj [2], pero solo presenta singularidades en la densidad de carga y la intensidad de campo eléctrico. El método para generar soluciones analíticas exactas depende de la escogencia de la forma de $y(x)$ con la que se obtiene la función Z, necesaria para determinar soluciones físicamente aceptables.

Referencias

[1] N. Itoh. *Prog. Theor. Phys.* 44, 291 (1970).

[2] K. Komathiraj y S.D. Maharaj. *Gen. Rel. Grav.* 39, 2079 (2007).

[3] K. Komathiraj y S.D. Maharaj. *J. Math. Phy.* 042051 (2007).

[4] R. Sharma, S. Mukherjee y S.D. Maharaj. *Gen. Rel. Grav.* 33, 999 (2001).

[5] L.K. Patel y S.K. Koppar. *Aust. J. Phys.* 40 (1987).

[6] L.K. Patel, R. Tikekar y M.C. Sabu. *Gen. Rel. Grav.* 33, 999 (2001).

[7] R. Tikekar y G.P. Singh. *Gravitation and Cosmology.* 4, 294 (1998).

[8] S.D. Maharaj y S. Thirukkanesh. *Pramana -J. Phys.* 72, 481 (2009).

[9] I. Bombaci. *Phys. Rev.* C55, 1587 (1997).

[10] X-D Li, Z-G-Dai y Z-R Wang. *Astron. Astrophys.* 303, L1 (1995).

[11] M. Dey, I. Bombaci, J. Dey, S. Ray y B.C. Samanta. *Phys.Lett.* B 438, 123 (1998).

[12] J.A. Pons, F.M. Walter, J.M. Lattimer, M. Prakash, R. Neuhauser y A. Penghui. *Astrophys.J.* 564, 981 (2002).

[13] V.V. Usov. *Phys.Rev.* D70, 067301 (2004).

[14] M.K. Mak y T. Harko. *Int.J.Mod. Phys.* D13, 149 (2004).

[15] K. Komathiraj y S.D. Maharaj. *Int.J.Mod.Phys.* D16, 1803 (2007).

[16] M. C.Durgapal y R. Bannerji. *Phys.Rev.* D27, 328 (1983).

[17] K. Jotania y R. Tikekar. *Int.J.Mod.Phys.* D15, 1175 (2006).

(Recibido el 30 de septiembre de 2009; aceptado el 3 de diciembre de 2009)

Manuel Malaver de la Fuente
Universidad Marítima del Caribe
Catia la Mar, Estado Vargas
Venezuela
e-mail: mmf_umc@hotmail.com