Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 17, No 2, p. 65–98, julio–diciembre de 1999

La derivada de Carathéodory en $\mathbb{R}^2$

Sofía Pinzón* y Marlio Paredes**

Resumen

En este trabajo hacemos una completa revisión de la noción de derivada, para lo cual presentamos las definiciones de derivada de Gâteaux, Fréchet y Carathéodory. Se muestran las relaciones entre ellas y finalmente se da una topología sobre $\mathbb{R}^2$ para la cual los tres conceptos de derivada son equivalentes.

1. Introducción

Una de las nociones más utilizadas dentro de las matemáticas es, sin lugar a dudas, la noción de derivada, pues aparece naturalmente en diferentes áreas del conocimiento, tales como la física, la química, la biología, la ingeniería y la economía.

A nivel educativo esta noción se enseña en los cursos regulares de cálculo, pero por lo general, siempre en la forma en que fue definida por Cauchy en 1823. Una versión de ella para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ aparece en [14] textualmente como sigue:

Definición 1.1 (definición usual de la derivada). *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función y a es un punto de acumulación en el dominio de f, el valor de la derivada de la función f en a es el número*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

si el límite existe; esto equivale a $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, si el límite existe.

*Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia. Email: spinzon@uis.edu.co

**Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia. Email: mparedes@uis.edu.co

En dichos cursos no se tiene en cuenta que existen otras formas de ella que pueden ser más manejables, o más complicadas (en cuanto a las demostraciones de algunos teoremas básicos del cálculo). En este trabajo presentamos algunas de las más conocidas, para dar una idea de cómo se puede enseñar la noción de derivada y para utilizarla en su forma más adecuada para los requerimientos del momento.

Dentro de esas definiciones aparece la que dio Constantin Carathéodory (1873–1950) en su libro *Theory of Functions of a Complex Variable* [6], y aunque Carathéodory utiliza esta definición dentro del marco de la teoría de funciones de variable compleja, Stephen Kuhn [10] mostró que esta definición, aplicada a funciones de variable real, facilita en gran parte el manejo demostrativo de algunos de los teoremas del cálculo diferencial, como la regla de la cadena y el teorema de la función inversa, aunque se muestra un poco excéptico en el cálculo de derivadas.

Acosta y Delgado retomaron en [2] la idea de Kuhn y extendieron la definición para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, realizando algunas demostraciones y resolviendo algunos ejercicios, donde muestran cómo calcular derivadas utilizando la definición de Carathéodory. Además, establecen la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet (diferencial total) y Carathéodory.

Otra de las definiciones de diferencial es la conocida con el nombre de derivada de Gâteaux o derivada direccional. Es posible demostrar que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteaux, pero la afirmación inversa es falsa; luego, debido a la equivalencia entre la derivada de Carathéodory y la de Fréchet, toda función diferenciable según Carathéodory también es diferenciable según Gâteaux.

En $\mathbb{R}^n$ solamente se puede garantizar que una función diferenciable según Gâteaux es diferenciable según Fréchet en un punto si la derivada de Gâteaux es una función continua en ese punto, así que una pregunta natural es si existe una topología que garantice la continuidad de la derivada de Gâteaux, y así poder establecer la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Gâteaux y Carathéodory.

En la segunda sección de este artículo presentamos algunas de las nociones básicas del análisis necesarias para entender las restantes secciones.

En la tercera sección se presentan las tres nociones de diferencial que deseamos relacionar, mostrando algunos resultados que se dan a través de la búsqueda de condiciones para establecer la equivalencia entre ellas. Finalmente, en la cuarta sección se muestra la equivalencia entre las tres deficiones de derivada discutidas en la sección tres para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, para lo cual se construye una topología especial para $\mathbb{R}^2$ que garantiza la continuidad de la derivada de Gâteaux. Esta construcción se hizo a partir de la topología radial para $\mathbb{R}^2$ (ver Willard [18]).

2. Preliminares

2.1. Algunas nociones básicas de análisis

El propósito de esta sección es dar las notaciones y convenciones, así como las ideas de la teoría del análisis, que constituyen el material básico para el estudio de las secciones posteriores.

Definición 2.1. *Sean X e Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. Entonces f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para cada vecindad V de $f(x_0)$ en Y, existe una vecindad U de x_0 en X tal que $f(U) \subset V$.*

Teorema 2.1. *Sean X e Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para cada abierto H en Y, $f^{-1}(H)$ es abierto en X.*

Definición 2.2. [9] *Sean X e Y espacios de Banach. Un operador L sobre X con recorrido en Y es llamado:*

- *Aditivo, si $L(x+y) = L(x) + L(y)$, para todo $x, y \in X$.*
- *Homogéneo, si $L(\lambda x) = \lambda L(x)$, para cualquier escalar λ.*
- *Continuo en $x \in E$, si $\|L(x_n) - L(x)\| \to 0$ cuando $\|x_n - x\| \to 0$.*
- *Acotado, si existe un número no negativo M tal que $\|L(x)\| \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$.*

L es llamado lineal si es aditivo y homogéneo. Es bien conocido que un operador lineal es continuo en todo el espacio si y sólo si es continuo en $\odot$ (módulo aditivo del espacio), y es acotado si y sólo si es continuo.

Definición 2.3. [9] *Si L es un operador lineal acotado, entonces la norma de L, denotada por $\|L\|$, se define como*

$$\|L\| = \sup_{x \in X} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}, \quad x \neq \odot.$$

Si L y S son operadores lineales acotados de X en X, su suma $L+S$ y su producto LS son operadores lineales, y $\|L+S\| \leq \|L\|+\|S\|$, $\|LS\| \leq \|L\|\,\|S\|$. El conjunto de todos los operadores lineales acotados de X en Y forman un espacio de Banach si Y es completo.

Definición 2.4. [17] *Sean X e Y espacios de Banach; el operador $F : X \to Y$ es llamado uniformemente continuo sobre un conjunto $W \subset X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left\|F\left(x'\right) - F\left(x''\right)\right\| < \varepsilon$$

se cumple para cada par x' y $x'' \in W$ que satisfagan

$$\left\|x' - x''\right\| < \delta\,.$$

Proposición 2.1. [18] *Para un operador T de X en Y, donde X e Y son espacios lineales normados, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es continuo en algún $x_0 \in X$.*
2. *T es uniformemente continuo sobre X.*
3. *T es acotado.*

Definición 2.5. [18] *Sea X un espacio lineal normado. El conjunto de todos los funcionales lineales acotados definidos sobre X se llama el* ***espacio dual*** *de X, y se simboliza X^*.*

Definición 2.6. [18] *Sean X e Y espacios lineales normados. Una aplicación $F\colon X \to Y$ es llamada completamente compacta sobre un conjunto acotado $K \subset X$, si F es uniformemente continua sobre K y compacta (la imagen de un compacto es compacta).*

Definición 2.7. [18] *Los espacios lineales normados X para los cuales $(X^*)^*$ $= X$, son llamados* ***reflexivos****.*

Definición 2.8. [12] *La norma $\|\cdot\|'$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|$ sobre X si existen números positivos m y M tales que*

$$m\,\|x\| \leq \|x\|' \leq M\,\|x\|\,, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

2.2. La derivada

La noción de diferencial fue inicialmente concebida por Newton y Leibniz para funciones reales de una variable real. No obstante sólo a finales del siglo XIX la noción fue generalizada para funciones de varias variables.

Una definición de diferencial total que se encuentra en la primera edición del *Cours d'Analyse* de Goursat (1902) deja ver cómo se definía la diferenciación a comienzos de este siglo:

"*Sea* $w = f(x, y, z)$ *una función de tres variables independientes* x, y, z. *Se llama diferencial total* dw *a la siguiente expresión:*

$$dw = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz\,,$$

donde dx, dy, dz *son tres incrementos constantes y arbitrarios atribuidos a las variables independientes* x, y, z."

Y para que una función tuviese diferencial total en un punto de su dominio era necesario y suficiente que en este punto ella tuviera todas las derivadas parciales, y no era necesario exigir la continuidad de la función. De hecho, en esta época cualquier teorema sobre diferenciación poseía la hipotesis adicional que las derivadas parciales estaban definidas en una vecindad de un punto y eran continuas en ese punto.

Fue exactamente de la búsqueda de condiciones generales para la existencia de la diferencial total que nacieron las diferentes nociones de derivada; algunas de estas interpretaciones aparecen tratando de dar sentido a la forma en que el límite del cociente diferencial $\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$ se obtiene; algunas veces la existencia de la derivada particularizada y con algunas condiciones implica la existencia de la derivada total.

Las derivadas laterales representan una de las primeras generalizaciones de la derivada ordinaria, en la que no se restringe su existencia a la existencia del límite del cociente diferencial, ya que este límite puede no existir, por lo cual se consideran los límite laterales: límite superior y límite inferior.

Necesitamos solamente la continuidad de las derivadas laterales en el punto para garantizar la existencia de la derivada ordinaria en ese punto.

Definición 2.9. [15] *Una función* f *definida sobre un intervalo* $I = [a, b]$ *tiene definidas en cada punto de* I *cuatro derivadas laterales (excepto en* a *y en* b*, en los cuales sólo se definen dos derivadas):*

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \textit{(derivada superior derecha);}$$
$$D^- f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \textit{(derivada superior izquierda);}$$
$$d^+ f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \textit{(derivada inferior derecha);}$$
$$d^- f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \textit{(derivada inferior izquierda).}$$

Cambiando la forma del cociente diferencial da como resultado una gran cantidad de particularizaciones de la derivada. Una de las más comunes es la derivada simétrica (también llamada la derivada de Riemann), definida así:

$$f^{[']}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right].$$

Esta derivada tiene la virtud de no involucrar el comportamiento de f en el mismo x (esta definición es utilizada en la teoría de las series trigonométricas).

La existencia de la derivada usual garantiza la existencia de la derivada simétrica, pero la afirmación inversa no siempre se cumple.

La existencia de la derivada simétrica en todos los puntos de un conjunto E implica la existencia de la derivada usual en casi todo punto de E, ya que, por ejemplo, en funciones reales con discontinuidad removible existe la derivada simétrica, pero la usual no.

La derivada de orden superior de Riemann dada por

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{h^n} \sum (-1)^k f\left(x + h\left(\frac{n}{2} - k\right)\right)$$

es una extensión de la derivada simétrica. La derivada de orden dos de Riemann es frecuentemente llamada la derivada de Schwarz.

El cociente diferencial puede ser variado en otras direcciones. La simple variación que aparece en [5],

$$f^{[*]}(x_0) = \lim_{x_1, x_2 \to x_0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad \text{con } x_1 \neq x_2,$$

fue considerada por Peano, quien afirma que ella refleja el concepto de derivada usado en las ciencias físicas más cercanamente que la definición usual, dado que $f^{[*]}$ es siempre continua y coincide con f' siempre que f' sea continua.

Otra variación es la derivada congruente de Sindalovski [11]:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x-\phi(th)) - f(x-\phi(th)-th)}{t},$$

donde ϕ es una función arbitraria definida en una vecindad del origen para la cual $\phi(th) \to 0$, cuando $t \to 0$.

Además, si G es cualquier operador continuo, se define la variación de Muraviov de f (con respecto a G) mediante

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \left\{ f(x+thG(x)) - f(x) \right\}.$$

Esta misma definición aparece en [5] como

$$\lim_{h\to \odot} \frac{f\left(x-\phi\left(h\right)\right) - f\left(x-\phi\left(h\right)-h\right)}{h},$$

donde ϕ es una función arbitraria, definida en una vecindad del origen, la cual aproxima a ϕ con h.

Una de las nociones más importantes para nosotros, la variación de Gâteaux, es obtenida como un caso especial de las variaciones de Sindalovski y Muraviov, y fue introducida para funcionales por Gâteaux en 1913. Es una generalización de la noción de la derivada direccional en cálculo y de la noción de primera variación manejada en cálculo variacional.

Definición 2.10. [11] *Sean X e Y espacios normados reales, y U un subconjunto abierto de X. Sean $x_0 \in U$ y $h \in X$ un elemento fijo diferente de cero. Dado que U es abierto, existe un intervalo $I = (-\tau, \tau)$, para algún $\tau > 0$, tal que si $t \in I$ entonces $(x_0 + th) \in U$. Si la aplicación $\Phi(t) = F(x_0 + th)$ tiene una derivada usual en $t = 0$, entonces $\Phi'(0)$ es llamada la variación de Gâteaux de F en x_0 con incremento h, y es denotada por*

$$VF(x_0; h) = \frac{d}{dt} F\left(x_0 + th\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ F(x_0 + th) - F(x_0) \right\}.$$

Es claro que la variación de Gâteaux puede existir para algún h, pero fallará para otros; sin embargo $VF\left(x_0, h\right)$ es homogénea en h y de grado uno, como veremos en la sección siguiente.

Una noción más débil que la variación de Gâteaux es obtenida si, por ejemplo, la derivada de Schwarz $\Phi^{[']}(0)$ es utilizada como sigue:

$$\Phi^{[']}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(-t)}{2t}.$$

Las ciencias físicas, en particular la termodinámica, inspiró a Borel a definir la "derivada media" [5]:

$$f'_B(x) = \lim_{h \to 0} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{h} \int_{\epsilon}^{h} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \,.$$

En 1923 Hadamard publicó un escrito donde se presentaba el germen de una nueva definición de diferencial, la cual más tarde motivó a Fréchet para dar en 1937 otra definición de diferencial para funcionales sobre espacios de funciones.

Definición 2.11. [11] *Si X e Y son espacios lineales normados, se dice que un operador $F : X \to Y$ tiene una diferencial de Hadamard en x_0 si existe una aplicación lineal continua $L : X \to Y$, tal que para cualquier aplicación continua $g : [0,1] \to X$ para la cual $g(0) = x_0$ y $g'(0^+)$ existe, la aplicación $s(t) = F(g(t))$ es diferenciable en $t = 0^+$ y $s'(0^+) = Lg'(0^+)$. La aplicación L, que es obviamente única, es llamada la derivada de Hadamard de F en x_0, y $Lg'(0^+)$ es llamada la diferencial de Hadamard.*

Definición 2.12. [11] *Sean X e Y espacios lineales normados. Se dice que una aplicación $F : U \to Y$, donde U es un subconjunto abierto de X, es diferenciable según Fréchet en $x_0 \in U$, si existe un operador lineal continuo $L(x_0) : X \to Y$ tal que la siguiente representación se da para cada $h \in X$ con $x_0 + h \in U$:*

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + R(x_0, h), \tag{2.1}$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|R(x_0; h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{2.2}$$

Otra noción que fue primero introducida por Dubrovskii [7] en el marco de las ecuaciones integrales, es la que damos a continuación.

Definición 2.13. [11] *Sean X e Y espacios normados. Se dice que un operador $F : X \to Y$ es asintótico a un operador lineal continuo L, si*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|F(x) - L(x)\|}{\|x\|} = 0 \,. \tag{2.3}$$

Note que existe a lo más un operador lineal que satisface (2.3)*; L es llamado derivada asintótica de Fréchet.*

Definición 2.14. [17] *Se dice que un operador $F : X \to Y$ tiene, sobre el conjunto $W \subseteq X$, una diferencial localmente uniforme $dF(x,h)$, si para cada $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in W$, existen números positivos $\eta(\varepsilon, x_0)$ y $\delta(\varepsilon, x_0)$ tales que para cada x en la bola $D_r(x_0, \eta)$ la desigualdad $\|R(x,h)\| < \varepsilon \|h\|$ se da si $\|h\| < \delta$.*

Teorema 2.2. [17] *Para la continuidad de F' en la bola D_r, es necesario y suficiente que F tenga en D_r una diferencial localmente uniforme, y que F' sea localmente acotada en D_r.*

Definición 2.15. [6] *Se dice que una función de una variable compleja $f(z)$ definida en una región G del plano complejo es diferenciable en el punto z_0 de ésta región, si existe una función $\varphi(z; z_0)$ que sea continua en el punto $z = z_0$ y satisfaga la relación*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z; z_0)$$

en todos los z de G.

En el marco de los espacios normados (especifícamente en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$) se da la definición de Diferencial de Fréchet, como aparece en [2].

Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y a un punto en $\mathbb{R}^n$. Para dar una interpretación de la definición según Carathéodory, identificaremos $f(x) - f(a)$ con un vector columna de $\mathbb{R}^m$ y $x - a$ con un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\phi_f(x)$ se puede interpretar como una matriz $n \times m$.

Definición 2.16. [2] *f es diferenciable en a si existe*

$$\phi_f : \mathbb{R}^n \to M_{n\times m} \quad \textit{continua en } a,$$

tal que

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a).$$

Si ϕ_f existe,

$$Df(a) = \phi_f(a) \in M_{n\times m}.$$

Veamos el siguiente ejemplo de cómo derivar según esta definición:

Ejemplo 2.1. *Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por*

$$F(x, y) = \left(x^2, y^2\right)$$

y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, veamos cómo se calcula $F'(a, b)$:

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(a, b) &= \left(x^2, y^2\right) - \left(a^2, b^2\right) \\ &= \left(x^2 - a^2, y^2 - b^2\right) \\ &= \left((x - a)(x + a), (y - b)(y + b)\right) \\ &= \begin{pmatrix} x + a & 0 \\ 0 & y + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\Phi_F(x,y) = \begin{pmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{pmatrix}$ *es continua en* (a,b) *y* $F'(a,b) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$.

3. Tres nociones de derivada

3.1. La derivada de Gâteaux

Para funciones en varias variables la diferencial de Gâteaux comúnmente nombrada G–diferencial, se conoce como derivada direccional.

Definición 3.1. [4] *Sea f definida sobre el subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y, tomando valores en $\mathbb{R}^m$, sea c un punto interior de A y u cualquier punto en $\mathbb{R}^n$. Un vector $L_u \in \mathbb{R}^m$ es llamado la derivada parcial de f en c con respecto a u, si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga $0 < |t| < \delta(\varepsilon)$ tenemos*

$$\left\| \frac{1}{t}\{f(c+tu) - f(c) - L_u\} \right\| < \varepsilon.$$

En forma semejante se puede definir L_u como

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{f(c+tu) - f(c)\},$$

o como la derivada en $t = 0$ de la función F definida mediante $F(t) = f(c+tu)$, para $|t|$ suficientemente pequeño y tomando valores en $\mathbb{R}^m$.

La definición de variación de Gâteaux dada anteriormente por

$$VF(x_0; h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{F(x_0 + th) - F(x_0)\}$$

puede existir para algún h, pero falla para otros; sin embargo $VF(x_0, h)$ es homogénea en h de grado uno. Se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1. [17] *Sean X e Y espacios de Banach y $A \subseteq X$. Si una función $F : A \to Y$ tiene variación de Gâteaux en un punto x_0 con incremento h, es decir, si $VF(x_0, h)$ existe para algún $h \neq 0$, entonces para cada número λ, $VF(x_0; \lambda h)$ existe y es igual a $\lambda VF(x_0; h)$.*

Demostración.

Si $t\lambda = r$, tenemos :

$$\begin{aligned}
VF(x_0;\lambda h) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{F(x_0+t(\lambda h))-F(x_0)\}\\
&= \lim_{\lambda t\to 0}\frac{\lambda}{t\lambda}\{F(x_0+(t\lambda)h)-F(x_0)\}\\
&= \lambda\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\{F(x_0+rh)-F(x_0)\}\\
&= \lambda VF(x_0;h)\,. \quad \square
\end{aligned}$$

La existencia de la variación de Gâteaux en $x_0 \in U$ provee una propiedad de aproximación local en el siguiente sentido:

Teorema 3.1. [11]*Sean X e Y espacios de Banach y una función $F : U \subset X \to Y$. Una condición necesaria y suficiente para que F tenga variación de Gâteaux en $x_0 \in U$ es que la siguiente representación se dé para cada $h \in X$ para el cual $x + h \in U$:*

$$F(x_0+h)-F(x_0) = H(x_0;h)+R(x_0;h)\,, \tag{3.1}$$

donde la aplicación $h \to H(x_0;h)$ es homogénea de grado uno y

$$\lim_{t\to 0}\frac{R(x_0;th)}{t} = 0.$$

Tal representación es única y

$$VF(x_0;h) = H(x_0;h)\,.$$

Demostración.

1. *a*) Unicidad: Supongamos que para F, existen H, R y H', R', que satisfacen la representación, es decir:

$$\begin{aligned}
F(x_0+h)-F(x_0) &= H(x_0;h)+R(x_0;h)\ ,\\
F(x_0+h)-F(x_0) &= H'(x_0;h)+R'(x_0;h)\,;
\end{aligned}$$

luego, para $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
H(x_0;h)-H'(x_0;h) &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{t}\left[H(x_0;h)-H'(x_0;h)\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[H(x_0;th)-H'(x_0;th)\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[R(x_0;th)-R'(x_0;th)\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}R(x_0;th)-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}R'(x_0;th) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene tanto $H(x_0;h) = H'(x_0;h)$ como $R(x_0;h) = R'(x_0;h)$.

b) Si $F(x_0+h) - F(x_0) = H(x_0;h) + R(x_0;h)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dF(x_{0+}\tau h)}{d\tau}\right|_{\tau=0} &= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\{F(x_0+\tau h) - F(x_0)\} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\{H(x_0;\tau h) + R(x_0;\tau h)\} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1} H(x_0;\tau h) + \lim_{\tau\to 0} R(x_0;\tau h) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\tau H(x_0;h) \\
&= \lim_{\tau\to 0} H(x_0;h) = H(x_0;h)\,.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $VF(x_0;h) = H(x_0,h)\,.$

2. Si F tiene variación de Gâteaux, entonces la representación (3.1) se da.
   Si la variación de Gâteaux existe, entonces

$$\tau^{-1}\{F(x_0+\tau k) - F(x_0)\} = VF(x_0,k) + \epsilon(x_0;\tau k)\,,$$

con k un elemento en el espacio y $\varepsilon(x_0;\tau k) \to 0$, cuando $\tau \to 0$. Haciendo $\tau k = h$, entonces,

$$\tau^{-1}\{F(x_0+h) - F(x_0)\} = VF\left(x_0, \frac{h}{\tau}\right) + \varepsilon(x_0;h)\,;$$

como $VF(x_0;h)$ es homogénea, se tiene

$$\begin{aligned}
\tau^{-1}\{F(x_0+h) - F(x_0)\} &= VF\left(x_0; \frac{h}{\tau}\right) + \epsilon(x_0;h)\,; \\
\tau^{-1}\{F(x_0+h) - F(x_0)\} &= \tau^{-1}\{VF(x_0;h) + \tau\epsilon(x_0;h)\}\,; \\
F(x_0+h) - F(x_0) &= VF(x_0;h) + \tau\epsilon(x_0;h)\,.
\end{aligned}$$

Luego $H(x_0;h) = VF(x_0;h)$ y $R(x_0;h) = \tau\epsilon(x_0;h)$, y además $\dfrac{R(x_0;\tau h)}{\tau} \to 0$ cuando $\tau \to 0$. □

La existencia de $VF(x_0;h)$ implica la continuidad direccional de F en x_0, es decir,

$$\|F(x_0+th) - F(x_0)\| \to 0, \quad \text{cuando} \;\; t \to 0$$

para h fijo, pero no implica que F sea continua en x_0.

Se apunta también que el operador $h \to VF(x_0;h)$ no es necesariamente lineal o continuo en h.

Proposición 3.2 (Valor medio de la G–diferencial). [11] *Sean X e Y espacios lineales normados, x_0 y $x_0 + h \in X$. Sea S un segmento de recta, dirigido, que tiene por extremos x_0 y $x_0 + h$. Sea $F : S \to Y$ una función continua tal que para todo $t \in (0,1)$, $VF(x_0 + th, h)$ existe. Entonces*

$$\|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leq \sup_{0<t<1} \|VF(x_0 + th, h)\| .$$

Demostración.
Sea $\lambda \in (0,1)$. La aplicación $\Phi : [\lambda, 1] \to Y$, dada por $\Phi(t) = F(x_0 + th)$, es continua y para todo $t_0 \in [\lambda, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi'\left(t_0^+\right) &= \lim_{t \to t_0^+} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0 + t_0 h)}{t - t_0} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x_0 + t_0 h + \varepsilon h) - F(x_0 + t_0 h)}{\varepsilon} \\
&= VF(x_0 + t_0 h, h) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos mostrar que

$$\|\Phi(1) - \Phi(\lambda)\| \leq M(1 - \lambda), \quad \text{donde } M = \sup_{\lambda \leq t_0 < 1} \left\|\Phi'\left(t_0^+\right)\right\| .$$

Sea

$$X = \{t \in [\lambda, 1] \ : \ \|\Phi(1) - \Phi(\lambda)\| \leq (M + \varepsilon)(s - \lambda), \text{ para todo } s \in [\lambda, t]\} .$$

Es obvio que X es de la forma $[\lambda, \alpha]$ para algún $\alpha \in [\lambda, 1]$. Probemos que $\alpha = 1$. Si $\alpha < 1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$, y para todo k, $0 \leq k < \delta$; entonces

$$\Phi(\alpha + k) = \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha^+)k + \rho(k)\, k ,$$

donde $\|\rho(k)\| < \varepsilon$. Por tanto, como $\alpha \in X$,

$$\begin{aligned}
\forall k,\ 0 \leq k < \delta \Rightarrow \|\Phi(\alpha + k) - \Phi(\lambda)\| &\leq \|\Phi(\alpha + k) - \Phi(\alpha)\| + \|\Phi(\alpha) - \Phi(\lambda)\| \\
&\leq (M + \varepsilon)\, k + (M + \varepsilon)(\alpha - \lambda) \\
&= (M + \varepsilon)((\alpha + k) - \lambda) ;
\end{aligned}$$

luego

$$\forall k,\ 0 \leq k < \delta, \text{ entonces } \alpha + k \in X,$$

lo cual es absurdo. En consecuencia, se tiene que $\alpha = 1$, con lo cual hemos demostrado que para todo $\lambda \in (0,1)$

$$\|F(x_0 + h) - F(x_0 + \lambda h)\| \leq \sup_{\lambda \leq t < 1} \|VF(x_0 + th, h)\|,$$

luego

$$\begin{aligned} \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| &= \lim_{\lambda \to 0^+} \|F(x_0 + h) - F(x_0 + \lambda h)\| \leq \\ &\leq \lim_{\lambda \to 0^+} \sup_{\lambda \leq t < 1} \|VF(x_0 + th, h)\| \leq \\ &\leq \sup_{0 < t < 1} \|VF(x_0 + th, h)\| \quad \square \end{aligned}$$

Definición 3.2. [11] *Si $VF(x_0; \bullet)$ es lineal y acotada en h, se denomina diferencial de Gâteaux de F en x_0 con incremento h, y se denota $DF(x_0, h)$.*

Paul Lévy postuló la linealidad de la variación de Gâteaux en su libro *Leçons d'analyse fonctionelle* (1922), así que tal vez $DF(x_0, h)$ podría llamarse la diferencial de Gâteaux–Lévy.

Se puede apuntar que si $VF(x_0; h)$ es aditiva, entonces $VF(x_0; h)$ es direccionalmente continua en h, es decir,

$$\lim_{\tau \to 0} VF(x_0; h + \tau k) = VF(x_0; h).$$

Si $\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} \|R(x_0; \tau h)\| = 0$ se da uniformemente sobre cada conjunto acotado, entonces, por el teorema 3.1, F posee una diferencial de Gâteaux $VF(x_0, h)$ en x_0. Así, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\left\|\tau^{-1}[F(x_0 + \tau h) - F(x_0)] - VF(x_0, h)\right\| < \varepsilon, \quad \text{si } \|\tau\| < \delta.$$

Esto es,

$$F(x_0 + \tau h) - F(x_0) = VF(x_0; \tau h) + R(x_0, \tau h),$$

donde, para $|\tau| < \delta$,

$$\frac{\|R(x_0; \tau h)\|}{\|\tau h\|} < \varepsilon.$$

Sea $k = \tau h$; entonces se tiene $F(x_0 + k) - F(x_0) = VF(x_0; k) + R(x_0, k)$, donde

$$\lim_{k \to \theta} \frac{\|R(x_0, k)\|}{\|k\|} = 0.$$

Por tanto, $VF(x_0;k) = DF(x_{0;}k)$.

Así, si F es diferenciable según Fréchet en x_0, entonces F es diferenciable según Gâteaux (y en consecuencia tiene variación de Gâteaux) en x_0. Además,

$$dF\left(x_0;h\right) = VF\left(x_0;h\right) = DF\left(x_0;h\right).$$

Note que si F y G son diferenciables según Gâteaux en x_0, entonces si $T = \alpha F + \beta G$, T también es diferenciable según Gâteaux en x_0, para cualesquiera α, β reales, pero la regla de la cadena para funciones G–diferenciables no se cumple. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1. *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $f\left(t\right) = \left(t, t^2\right)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g\left(x,y\right) = \left\{ \begin{array}{ll} x & si\ y = x^2 \\ 0 & si\ y \neq x^2 \end{array} \right\}$; entonces $\left(g \circ f\right)\left(x\right) = x$, f es diferenciable en 0, g tiene una variación de Gâteaux en $(0,0)$ que es igual a cero, pero $\left(g \circ f\right)'\left(0\right) = 1$.*

Teorema 3.2. [12] *Suponga que la G–variación del operador F existe en alguna vecindad del punto x_0 y que $VF\left(x;h\right)$ es continua en x en el punto x_0. Además, se supone que $VF\left(x_0;h\right)$ es continua en $h = \odot$. Entonces*

$$VF\left(x_0,h\right) = DF\left(x_0,h\right).$$

Demostración.

1. De la continuidad de $VF\left(x_0,h\right)$ en el punto $h = \odot$ se sigue la existencia de $m > 0$ y $M > 0$ tales que $\|h\| \leq m$ implica $\|VF\left(x_0,h\right)\| \leq M$. En razón a la homogenidad en h del operador $VF\left(x_0,h\right)$, se sigue que, para un h arbitrario,

$$\|VF\left(x_0,h\right)\| = \left\| \frac{\|h\|}{m} VF\left(x_0, \frac{mh}{\|h\|}\right) \right\| \leq \frac{M}{m}\|h\|;$$

   es decir, $VF\left(x_0,h\right)$ es un operador acotado, y por lo tanto es un operador continuo.

2. Ahora comprobaremos la linealidad en h de $VF\left(x_0,h\right)$. Sean h_1 y h_2 elementos con norma unitaria, arbitrarios en X y ε un número real positivo arbitrario. De la definición de diferencial de Gâteaux se tiene que

$$\begin{aligned} VF(x_0,h_1) =& \frac{1}{t}\left\{F\left(x_0 + th_1\right) - F\left(x_0\right)\right\} + \alpha_1\,, \\ VF(x_0,h_2) =& \frac{1}{t}\left\{F\left(x_0 + th_2\right) - F\left(x_0\right)\right\} + \alpha_2 \end{aligned}$$

y

$$VF(x_0, h_1 + h_2) = \frac{1}{t} \{F(x_0 + th_1 + th_2) - F(x_0)\} + \alpha_3 .$$

Puesto que $\|\alpha_i\| < \frac{1}{4}\varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, se sigue que

$$\begin{aligned} & \|VF(x_0, h_1 + h_2) - VF(x_0, h_1) - VF(x_0, h_2)\| \leq \\ \leq \quad & \frac{1}{|t|} \|F(x_0 + th_1 + th_2) - Fx_0 + th_2 - Fx_0 + th_1 + F(x_0)\| + \\ + \quad & \frac{3}{4}\varepsilon \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aplicando la fórmula de Lagrange [17],

$$F(x + h) - F(x) = VF(x + \tau h, h), \qquad 0 < \tau < 1;$$

pero

$$\begin{aligned} F(x_0 + th_1 + th_2) - F(x_0 + th_2) &= VF(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, h_1), \\ F(x_0 + th_1) - F(x_0) &= VF(x_0 + \tau_2 h_1, h_1) . \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} & \|VF(x_0, h_1 + h_2) - VF(x_0, h_1) - VF(x_0, h_2)\| \leq \\ & \quad \leq \quad |t| \, \|VF(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, h_1) - VF(x_0 + \tau_2 h_1, h_1)\| . \end{aligned}$$

Dado que $VF(x, h)$ es continua en x en el punto x_0, para una posible elección de δ se obtiene

$$\|VF(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, h_1) - VF(x_0 + \tau_2 h_1, h_1)\| < \frac{1}{4}\varepsilon; \tag{3.3}$$

juntando (3.2) y (3.3) obtenemos la desigualdad deseada:

$$\|VF(x_0, h_1 + h_2) - VF(x_0, h_1) - VF(x_0, h_2)\| < \varepsilon;$$

dado que ε es un real positivo arbitrario, se tiene entonces la aditividad:

$$VF(x_0, h_1 + h_2) = VF(x_0, h_1) + VF(x_0, h_2) .$$

Como el operador $VF(x_0, h)$ es homogéneo, acotado y aditivo, es un operador lineal, con lo cual queda demostrado el teorema. $\square$

Teorema 3.3. [12] *Una condición necesaria y suficiente para que* $VF\,(x_0;h)$ *sea lineal y continua en* h *es que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. A cada h corresponde un $\delta\,(h)$ tal que

$$|t| \leq \delta \quad \text{implica} \quad \|F\,(x_0+th)-F\,(x_0)\| \leq M\,\|th\|\,,$$

   donde M no depende de h.

2. $\Delta^2_{th_1,th_2}F(x_0)=o(t)$, donde

$$\Delta^2_{h_1,h_2}F(x_0)=F\,(x_0+h_1+h_2)-F\,(x_0+h_1)-F\,(x_0+h_2)+F\,(x_0)\,.$$

Demostración.

1. $VF\,(x_0;h)$ es lineal. Utilizando la condición 2 se tiene que si $o\,(t)=g\,(t)$, entonces,

$$\lim_{t\to 0}\frac{g\,(t)}{t}=0, \quad \text{luego} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\Delta^2_{th_1,th_2}F(x_0)}{t}=0;$$

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to 0}\tfrac{\Delta^2_{th_1,th_2}F(x_0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+th_1+th_2)-F\,(x_0+th_1)-F\,(x_0+th_2)+F\,(x_0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+t(h_1+h_2))-F\,(x_0)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+th_1)-F\,(x_0)}{t}-\\
&\quad -\lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+th_2)-F\,(x_0)}{t}.
\end{aligned}$$

   De aquí,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+t(h_1+h_2))-F\,(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+th_1)-F\,(x_0)}{t}+\\
&+ \lim_{t\to 0}\frac{F\,(x_0+th_2)-F\,(x_0)}{t}\,,
\end{aligned}$$

$$V\,(x_0;h_1+h_2)=VF(x_0;h_1)+VF\,(x_0;h_2)\,,$$

   y como ya se tiene que $VF\,(x_0;h)$ es homogénea de grado uno, se tiene la linealidad de la variación de Gâteaux.

2. $VF(x_0;\bullet)$ es continua en h. Se tiene que $|t|<\delta$ implica

$$\|F(x_0+th)-F(x_0)\| \leq M\|th\|.$$

Luego

$$\left\|\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t}\right\| \leq M\|h\|,$$

$$\|VF(x_0;h)\| \leq M\|h\| \quad \text{si } h=h_0-\tau k, \quad \text{donde } \tau\to 0;$$

entonces,

$$\begin{aligned}\|VF(x_0;h_0-\tau k)\| &\leq M\|h_0-\tau k\|,\\ \|VF(x_0;h_0)-VF(x_0;\tau k)\| &\leq M\|h_0-\tau k\|.\end{aligned}$$

Si $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ entonces

$$\|VF(x_0;h_0)-VF(x_0;\tau k)\| \leq M\frac{\varepsilon}{M}.$$

Luego,

$$\|VF(x_0;h_0)-VF(x_0;\tau k)\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

3.2. La derivada Fréchet

Inicialmente presentamos la definición de diferencial como la formuló Fréchet. Sin embargo, históricamente varios matemáticos, antes de él, también contribuyeron a su formulación. Antes de finalizar el siglo XIX la noción de diferencial de una función de varias variables no había sido bien formulada, y se consideraban solamente derivadas parciales. Stolz(1893), Pierpont(1905) y Young(1910) definieron la diferencial de una función de varias variables como sigue:

"*f es difenciable en $(x_1,x_2,...,x_n)$ si $A_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe en $(x_1,x_2,...,x_n)$ y*

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}A_ih_i+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_ih_i,$$

donde $\varepsilon_1\to 0$ cuando $\text{máx}(|h_1|,|h_2|,...,|h_n|)\to 0$, $i=1,2,...,n$."

Como un paso para liberar esta definición del conjunto de coordenadas, Fréchet, quien fue alumno de Hadamard, reemplazó $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h_i$ en la anterior representación mediante εD, donde D es la "distancia" entre $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n)$ y $(x_1, ..., x_n)$. Por " distancia" Fréchet utilizó $D = \text{máx}\left(|h_1|, |h_2|, ..., |h_n|\right)$, o,

$$D = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2}.$$

En 1911 Fréchet escribió:

"*El funcional U_A tiene una diferencial en el punto A_0, si existe un funcional $V_{\Delta A}$ que es lineal en ΔA y difiere del incremento del funcional U_A en A_0, en una cantidad que es infinitamente pequeña en comparación con la distancia entre los argumentos A_0 y $A_0 + \Delta A$*".

Fréchet obviamente tenía en mente la distancia inducida por una norma. Posteriormente, en 1925, Fréchet presenta en [8] una definición más precisa de diferencial, la cual coincide con la ya dada.

Definición 3.3. [14] *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable según Fréchet (F–diferenciable) en, a si existe una transformación lineal $\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que,*

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - \lambda(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

La definición de diferencial de Fréchet para una función f de X en Y, con X e Y espacios normados, está dada en términos de la norma de X y Y. Sin embargo, es evidente que la diferenciabilidad es invariante bajo normas equivalentes, así que si f es F–diferenciable en x_0 cuando los espacios lineales están normados por $\|\bullet\|_X$ y $\|\bullet\|_Y$, respectivamente, entonces f es también F–diferenciable en x_0 cuando los espacios X e Y estan normados por $\|\bullet\|_X^{'}$ y $\|\bullet\|_Y^{'}$, las cuales son equivalentes a $\|\bullet\|_X$ y $\|\bullet\|_Y$, y las dos diferenciales son iguales. En el caso de espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes, así que la diferencial de un operador es independiente de la norma utilizada. Normas equivalentes inducen la misma topología, así que la diferenciabilidad depende solamente de la topología de X e Y en espacios finito dimensionales.

Otra noción de diferencial que no es muy tenida en cuenta aparece en el último libro de texto de Constantin Carathéodory (1873–1950) *Theory of functions of a complex Variable* [6], publicado en 1954.

3.3. La derivada de Carathéodory

Definición 3.4. [2] *Sea f una función real definida en un intervalo abierto U, y a un punto en U. f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory, si existe una función $\phi_f(x,a)$, continua en a, que satisface la relación*

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x,a)(x-a), \quad \textit{para todo } x \in U.$$

El número $\phi_f(a,a)$ es la derivada de carathéodory de f en a.

Dos consecuencias inmediatas de esta formulación son:

- Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.
- Si f es diferenciable en a, existe al menos una función ϕ que satisface la definición; además, si $f'(a)$ existe,

$$f'(a) = \phi(a).$$

En [2], aparece la extensión que hacen los autores de la definición de derivada de Carathéodory a funciones vectoriales.

Teorema 3.4. *Si ϕ y ψ son dos funciones que satisfacen las condiciones dadas en la anterior definición para f en a, entonces,*

$$\phi(a) = \psi(a).$$

Demostración .
Suponemos que ϕ y ψ son dos funciones tales que $\phi(a) = f'(a)$ y $\psi(a) = f'(a)$. Sea $\eta(x) = \phi(x) - \psi(x)$. Entonces

$$\eta(x)(x-a) = 0,$$

y además

$$\|\eta(a)(x-a)\| = \|(\eta(a) - \eta(x))(x-a)\| \leq \|\eta(a) - \eta(x)\|\|x-a\|.$$

Por lo tanto, dado que η es continua en a, concluimos que $\eta(a) = 0$ por consiguiente $\Phi(a) = \Psi(a)$. $\square$

Para establecer la generalidad de cada una de estas definiciones, o para establecer en qué condiciones se puede aplicar una u otra definición, se han desarrollado estudios que han generado teoremas donde se estipulan condiciones para la equivalencia de estas definiciones.

La noción dada por Carathédory, como lo muestran Acosta y Delgado, puede facilitar la demostración de algunas proposiciones que, con la noción dada por Fréchet, resultan extensas y engorrosas. A continuación presentamos algunas de las proposiciones demostradas por ellos.

Teorema 3.5. [2] *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$, entonces $\alpha f + \beta g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es también diferenciable en a y*

$$D\left(\alpha f + \beta g\right)(a) = \alpha Df\left(a\right) + \beta Dg\left(a\right).$$

Demostración.

Sean $f; g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces existen ϕ y ψ, respectivamente, que satisfacen para f y g la condición de diferenciabilidad según Carathéodory, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left(\alpha f + \beta g\right)(x) - \left(\alpha f + \beta g\right)(a) &= \alpha\left(f\left(x\right) - f\left(a\right)\right) + \beta\left(g\left(x\right) - g\left(a\right)\right) \\
&= \alpha\phi\left(x\right)\left(x - a\right) + \beta\psi\left(x\right)\left(x - a\right) \\
&= \left[\alpha\phi\left(x\right) + \beta\psi\left(x\right)\right]\left(x - a\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\left(\alpha f + \beta g\right)(a) &= \alpha\phi\left(a\right) + \beta\psi\left(a\right) \\
&= \alpha Df\left(a\right) + \beta Df\left(a\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.6. [2] *Si f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f\left(a\right)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y*

$$D\left(g \circ f\right)(a) = Dg\left(f\left(a\right)\right) Df\left(a\right).$$

Demostración.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, y sea $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $f\left(a\right) \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\begin{aligned}
g\left(f\left(x\right)\right) - g\left(f\left(a\right)\right) &= \psi\left(f\left(x\right)\right)\left(f\left(x\right) - f\left(a\right)\right) \\
&= \psi\left(f\left(x\right)\right)\phi\left(x\right)\left(x - a\right),
\end{aligned}$$

donde ϕ es la función derivada para f en a y ψ es una función derivada para g en $f(a)$. Dado que ψ es continua en $f\left(a\right)$ y ϕ es continua en a, tenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a. Más aún,

$$D\left(g \circ f\right)(a) = \psi\left(f\left(a\right)\right)\phi\left(a\right) = Dg\left(f\left(a\right)\right) Df\left(a\right). \quad \square$$

Teorema 3.7. [2] *Sea f una función de valor real definida sobre un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable en $x_0 \in U$ y $f(x_0)$ es un valor extremo, entonces $Df(x_0) = 0$.*

Demostración.
Supongamos que $x_0 \in U$ y es tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in U$, y que f es diferenciable en x_0; entonces existe una función continua ϕ en x_0 tal que

$$0 \leq f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0), \qquad \text{para todo } x \in U. \tag{3.4}$$

Sea h un punto fijo en $\mathbb{R}^n$, y $\varepsilon > 0$ tan pequeño que cumple que $(x_0 + th) \in U$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x_0 + th) - f(x_0) = \phi(x_0 + th)(x_0 + th - x_0); \\ 0 &\leq \phi(x_0 + th)(th), \text{para todo} t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi(x_0 + th) h, \qquad \text{para } t < 0, \\ 0 &\geq \phi(x_0 + th) h, \qquad \text{para } t < 0; \end{aligned}$$

dado que ϕ es continua en x_0, se tiene que $\phi(x_0) h = 0$, pero h es cualquier valor arbitrario; entonces $\phi(x_0) = 0$, es decir $Df(x_0) = 0$. $\square$

Como nuestro trabajo va orientado hacia establecer bajo qué condiciones se da la equivalencia de las definiciones de diferencial dadas por Carathéodory, Gâteaux y Fréchet, dedicaremos un apartado especial para estudiar algunas de las proposiciones que establecen relaciones entre ellas.

3.4. F–diferenciabilidad *versus* G–diferenciabilidad

Teorema 3.8. [12] *El operador F es F–diferenciable en x_0 si y sólo si la representación 3.1 se da, donde $R(x_0, h)$ es continuo y lineal en h y*

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} \|R(x_0; \tau h)\| = 0 \tag{3.5}$$

uniformemente con respecto a h sobre el conjunto $\|h\| =$constante.

Demostración.

Sin perder la generalidad se puede mostrar que para $\|h\| = 1$, si F es F–diferenciable en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(x_0;h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sea $h = \tau k$, donde $\|k\| = 1$; se tiene que $\lim\limits_{\tau\to 0} \tau^{-1} \|R(x_0;\tau k)\| = 0$ uniformemente sobre $\|k\| = 1$. □

Teorema 3.9. [11] *Sean X e Y espacios normados, U un subconjunto abierto de X, $F : X \to Y$. Si F tiene diferencial de Gâteaux $F'(x)$, la cual es continua en x en x_0, es decir, si la aplicación $F' : U \to \mathfrak{L}(X,Y)$ es continua en x_0, entonces F es diferenciable según Fréchet en x_0.*

Demostración.
Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\begin{aligned} F(x_0+h) - F(x_0) &= \int_0^1 VF(x_0+th;h)\,dt \\ &= VF(x_0;h) + \int_0^1 \{VF(x_0+th;h) - VF(x_0;h)\}dt\,, \end{aligned}$$

para todo $h \in X$ con $x_0 + h \in U$. Pero

$$\frac{1}{\|h\|}\left\|\int_0^1 \{VF(x_0+th;h) - VF(x_0;h)\}dt\right\| \le \int_0^1 \left\|F'(x_0+th) - F'(x_0)\right\| dt\,,$$

y la parte derecha de la anterior desigualdad tiende a cero, cuando h tiende a cero. □

Teorema 3.10. [11] *Sea $F : U \to Y$ que posee una diferencial de Gâteaux en x_0, y suponga que $VF(x;h)$ existe en una vecindad de x_0. Si*

$$\lim_{t\to 0} \|VF(x_0+th;h) - VF(x_0;h)\| = 0,$$

uniformemente con respecto a $h \in X$ sobre $\{h : \|h\| = 1\}$, entonces F es diferenciable según Fréchet en x_0.

3.5. F–diferenciabilidad *versus* C–diferenciabilidad

Teorema 3.11. [2] *Cualquier función diferenciable según Fréchet (F–diferenciable) es diferenciable según Carathéodory (C–diferenciable), y viceversa.*

Demostración.

1. Si f es C–diferenciable entonces f es F–diferenciable. Se supone la existencia de ϕ, luego si $\|x-a\|<\delta$,
$$\begin{aligned}\frac{\|f(x)-f(a)-\phi(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} &= \frac{\|[\phi(x)-\phi(a)](x-a)\|}{\|x-a\|} \\ &\leq \|\phi(x)-\phi(a)\|<\varepsilon\ ,\end{aligned}$$
dado que ϕ es continua en a. Por lo tanto f es F–diferenciable.

2. Si f es F–diferenciable, entonces f es C–diferenciable. Se asume que existe λ y definimos $\phi\colon \mathbb{R}^n \to M_{n\times m}$ como
$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\|x-a\|^2}\{(f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\otimes(x-a)\}+\lambda, & x\neq a,\\[2ex] \lambda, & x=a,\end{cases}$$
donde $(u\ \otimes v)\bullet w=(u\bullet v)\,u$.
Se puede ver inmediatamente de la definición de ϕ que
$$f(x)-f(a)=\phi(x)(x-a).$$
Tenemos que probar la continuidad de ϕ en a. Pero
$$\|\phi(x)-\phi(a)\|\leq \frac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|x-a\|}<\varepsilon,\quad \text{si } \|x-a\|<\delta;$$
dado que f satisface la definición de ser F–diferenciable, se tiene la demostración. □

4. La diferencial en $\mathbb{R}^2$

Como ya se vio en la anterior sección, la condición esencial para que la derivada de Gâteaux y la derivada de Fréchet sean equivalentes es que la derivada de Gâteaux sea continua en el punto sobre el cual se esté hallando la diferencial; y como la continuidad en espacios topológicos se define con base en los abiertos, es importante saber con qué topología se está trabajando. Es claro que bajo cualquier topología equivalente a la usual el resultado que queremos estudiar no se cumple. Una topología que suponíamos que permitiría establecer la equivalencia en $\mathbb{R}^2$ de las diferenciales ya mencionadas es la topología radial o la topología de los conjuntos radialmente abiertos.

4.1. Topología radial

Definición 4.1. *Un subconjunto B de $\mathbb{R}^2$ se denomina radialmente abierto si para cada punto $x \in B$ y para cada dirección σ existe un segmento abierto s en la dirección σ tal que $x \in s \subset B$.*

Las siguientes proposiciones sobre la topología radial están propuestas como ejercios de aplicación sobre algunos temas de espacios topológicos en el libro de Willard [18].

Proposición 4.1. [18] *La colección de conjuntos radialmente abiertos es una topología para $\mathbb{R}^2$.*

Demostración.

- $\emptyset$ y $\mathbb{R}^2$ cumplen en forma obvia la definición de ser radialmente abiertos.
- Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos radialmente abiertos en $\mathbb{R}^2$; luego, si $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ y σ es una dirección, entonces, existe $k \in I$ y un segmento abierto s en la dirección σ tal que $x \in s \subset A_k \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, ya que A_k es radialmente abierto; por lo tanto, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es un conjunto radialmente abierto.
- Sean $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$; luego si $x \in A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ y σ es una dirección, entonces para todo k, con $k = 1, ..., n$, se tiene que existe un segmento abierto s_k en la dirección σ tal que $x \in s_k \subset A_k$; por tanto, $x \in s = s_1 \cap s_2 \cap ... \cap s_n \subset A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, ya que s es un segmento abierto en la dirección σ. Por lo anterior, $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ es un conjunto radialmente abierto. $\square$

Nota 1. *A partir de ahora a $\mathbb{R}^2$ con la topología radial lo llamaremos plano radial.*

Proposición 4.2. [18] *La topología radial es más fina que la topología usual en* $\mathbb{R}^2$.

Demostración.

Sea τ_1 la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y τ_2 la topología de los conjuntos radialmente abiertos; se debe mostrar que $\tau_1 \subset \tau_2$.

Sea U_1 un abierto en $\tau_{1;}$ entonces, para cada $x \in U_1, \exists \delta > 0$ tal que $\beta_\delta(x) \subset U_1$, y por tanto para cada dirección σ existe un segmento abierto s de longitud menor que 2δ que contiene a x, y como $x \in s \subset \bigcup\limits_{x \in U_1} \beta_\delta(x) \subseteq U_1$, entonces $U_1 \in \tau_2$.

Para mostrar la contenencia estricta daremos a continuación un ejemplo de conjunto radialmente abierto que no es abierto en la topología usual.

Ejemplo 4.1. *Sea* $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$. *Si tomamos* $\beta = \{\mathbb{R}^2 - C\} \cup \{(1,0)\}$, *se puede verificar fácilmente que* β *es un conjunto radialmente abierto, pero no es un abierto de la topología usual.* β *no es un abierto de la topología usual, puesto que para el punto* $(1,0)$ *no se puede encontrar una vecindad de él que esté totalmente contenida en* β.

Por lo anterior queda demostrado que $\tau_1 \subset \tau_2$. En general, si C es cualquier curva suave en $\mathbb{R}^2$ y se toman uno o más puntos p_i de la curva en los cuales exista la derivada, se tiene que $\beta = \mathbb{R}^2 - \{C\} \cup \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ generado de esta manera es un conjunto radialmente abierto. $\square$

Proposición 4.3. [18] *La topología relativa inducida sobre una recta como un subespacio del plano radial es su topología usual.*

Demostración.
Sea l una recta en $\mathbb{R}^2$ cuya dirección es σ, y U un abierto del plano radial; en este caso, para todo $x \in U$ se tiene que existe un segmento abierto s_x en la dirección σ, luego $l \cap U = s_x$ para cada $x \in U$; entonces los abiertos de la topología inducida son los s_x, generando la topología usual sobre la recta l. $\square$

Proposición 4.4. [18] *La topología relativa sobre cualquier circunferencia en el plano como subespacio del plano radial es la topología discreta.*

Demostración.
Sea

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, h, k, \in \mathbb{R}^2 \text{ y } r \in \mathbb{R}\right\};$$

si $(a,b) \in C$, como ya vimos, y si $\beta = \left\{\mathbb{R}^2 - C\right\} \cup \{(a,b)\}$, se tiene que β es radialmente abierto, por lo tanto $\beta \cap C = (a,b)$, luego se tiene que los puntos en C son abiertos, o sea que la topología relativa sobre C es la topología discreta. $\square$

Proposición 4.5. [18] *El plano radial no es normal.*

Demostración.

Sean C_1, C_2 dos curvas en el plano tales que $C_1 \cap C_2 = \{(a,b),(c,d)\}$, y de tal forma que en $(a,b),(c,d)$ ambas curvas son diferenciables. Entonces $C_1 - \{(a,b),(c,d)\}$ y $C_2 - \{(a,b),(c,d)\}$ son dos cerrados en la topología radial, y además disyuntos.

Es claro que cualquier abierto que contenga a $C_1 - \{(a,b),(c,d)\}$ debe por lo menos contener un punto de $C_2 - \{(a,b),(c,d)\}$. Luego el plano radial no es normal. $\square$

Graficamente:

C_1

C_2

Figura 3.1

A continuación atacaremos el problema planteado dentro de nuestro trabajo, para encontrar un tipo de abiertos que garanticen la continuidad de la derivada de Gâteaux en el punto.

Como ya se dijo, el hecho de que las definiciones de Fréchet y Carathéodory sean equivalentes garantiza el resultado que damos a continuación; lo presentamos para lograr una caracterización de la derivada de Gâteaux en función de la derivada de Carathéodory.

Proposición 4.6. *Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es C–diferenciable, entonces f es G–diferenciable.*

Demostración.

Si f es C–diferenciable, se tiene la existencia de ϕ continua en a y tal que dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad V de a que satisface

$$|\phi(x) - \phi(a)| < \frac{\varepsilon}{\|h\|}, \quad \text{si } x \in V.$$

Sea σ la dirección de h; entonces existe un segmento abierto s en la dirección σ tal que $a \in s \subset V$; sea además $\lambda > 0$ tal que $(a + th) \in s$, para todo $t \in (-\lambda, \lambda)$. Entonces

$$|\phi(a + th) - \phi(a)| < \frac{\varepsilon}{\|h\|}, \quad \text{si } |t| < \lambda,$$

y por consiguiente,

$$|\{\phi(a + th) - \phi(a)\} h| \leq |\phi(a + th) - \phi(a)| \|h\| < \varepsilon.$$

De aquí se tiene

$$\lim_{t \to 0} \phi(a + th)(h) = \phi(a) h.$$

Por otra parte, hay que garantizar la existencia de

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

y mostrar su linealidad en h :

$$\begin{aligned} f(a + th) - f(a) &= \phi(a + th)(th); \\ \frac{f(a + th) - f(a)}{t} &= \phi(a + th) h; \\ \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} &= \lim_{t \to 0} \phi(a + th) h = \phi(a) h. \end{aligned}$$

Con lo anterior se garantiza la existencia. La linealidad del límite se tiene por la forma de $H(x, h) = \phi(x) h$. □

Para que funcione la recíproca debemos encontrar la topología conveniente.

Si f es G–diferenciable, se tiene que

$$H(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \quad \text{existe y es lineal en } h.$$

Definamos $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x - a\|^2} \{(f(x) - f(a) - H(a, x - a))\langle x - a, \bullet\rangle\} + H(a, \bullet), & \text{si } x \neq a, \\ H(a, \bullet), & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Así se tiene

$$\begin{aligned}\phi(x)(x-a) &= \frac{1}{\|x-a\|^2}\{(f(x)-f(a)-H(a,x-a))\langle x-a,x-a\rangle\}+ \\ &\quad +H(a,x-a) \\ &= f(x)-f(a).\end{aligned}$$

A continuación se debe demostrar que ϕ es continua en a, y es en este punto donde empiezan a intervenir más claramente los aspectos topológicos del espacio.

Aquí hay que ver que

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\|x-a\|^2}\{(f(x)-f(a)-H(a,x-a))\langle x-a,x-a\rangle\}=0.$$

Dado $\varepsilon>0$, debe tenerse

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\|x-a\|^2}\{(f(x)-f(a)-H(a,x-a))\langle x-a,x-a\rangle\}\right\| = \\ &= \left\|\frac{1}{\|x-a\|^2}\left\{(f(x)-f(a)-H(a,x-a))\|x-a\|^2\right\}\right\| \\ &= \|f(x)-f(a)-H(a,x-a)\|<\varepsilon,\end{aligned}$$

para todo x en una vecindad V de a de la topología que estamos buscando, y nuestro propósito es encontrarla.

Según [11], se tiene que dado $\varepsilon>0$ y $h\in\mathbb{R}^2$, $\|h\|=1$, existe $\lambda_h>0$ tal que si $x=a+th$,

$$\frac{|f(a+th)-f(a)-H(a,th)|}{t}<\varepsilon, \qquad \text{si } |t|<\lambda_h.$$

Sea $V=\bigcup_{h\in S^1} I_h$, donde $I_h=(a-\lambda_h h, a+\lambda_h h)$. Por lo tanto, si $x\in V$, $x\in I_h$, para algún $h\in S^1$ y $x=a+th$ con $|t|<\lambda_h$, entonces

$$\frac{|f(x)-f(a)-H(a,x-a)|}{\|x-a\|}=\frac{|f(a+th)-f(a)-H(a,th)|}{|t|}<\varepsilon.$$

Hemos encontrado una vecindad V que permite la continuidad de $\phi(x)$ en $x=a$. Sin embargo, V no es necesariamente radial, como lo ilustra el siguiente ejemplo de la figura adjunta:

a

Figura 3.2

El anterior conjunto es la unión de conjuntos que hemos llamado I_h, pero se puede ver claramente que no es radialmente abierto.

Si llamamos β_i a los abiertos en la topología usual que contienen el punto a y realizamos intersecciones entre estos, llamaremos

$$V_a = \left\{ \begin{array}{c} V_i \cap \beta_i \\ V_i \cap V \end{array} \right\}, \tag{4.1}$$

donde $V_a(i)$ y $V_a(j)$ son abiertos creados como la unión de los I_h. Algunos de estos V_a, son, gráficamente:

a

a

a

Figura 3.3

Ahora bien si $B = \{\beta_i \cup I_h \cup V_a\}$, entonces B es claramente una base para una topología de $\mathbb{R}^2$, y la llamaremos G_a–topología.

El problema de garantizar la F–diferenciabilidad es garantizar la continuidad en el punto; por lo tanto, si una función es discontinua en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, es claro que si se toma $\mathbb{R}^2$ con la topología usual en todos los puntos donde no exista discontinuidad y se toman las vecindades I_h en el punto de discontinuidad, se puede garantizar la existencia de la F–diferencial.

Teorema 4.1. *En $\mathbb{R}^2$ con la G_a–topología la diferencial de Gâteaux es equivalente a la diferencial de Carathéodory.*

5. Ejemplos

Ejemplo 5.1. *Sea*

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x}{\sqrt{y}} & si & y>0, \quad x<0\,, \\ \frac{x}{\sqrt{-y}} & si & y<0, \quad x>0\,, \\ x & \multicolumn{2}{l}{en\ cualquier\ otro\ caso.} \end{array} \right\}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ *está dada por*

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{t^2}x^2 & si\ x<0 \\ -\dfrac{1}{t^2}x^2 & si\ x>0 \end{array} \right\}$$

Gráficamente f^{-1} *se puede ver como*

$y = \frac{1}{t^2}x^2$

$-\varepsilon$ $\qquad$ ε

$y = -\frac{1}{t^2}x^2$

Figura 3.4

que es una vecindad de $(0,0)$ *en la* $G_{(0,0)}$*–topología.* f *es continua en* $(0,0)$ *con la* $G_{(0,0)}$*–topología. Es claro que* f *no es continua en* $(0,0)$ *con la topología usual, ni con la topología radial.*

Si

$$F(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} x\sqrt{y} & si & y>0, \quad x<0\,, \\ x\sqrt{-y} & si & y<0, \quad x>0\,, \\ xy & \multicolumn{2}{l}{en\ otro\ caso.} \end{array} \right\}$$

F es G–diferenciable en $(0,0)$, ya que $F(x,y) = (0, f(x,y))(x,y)$; y si llamamos $\phi(x,y) = (0, f(x,y))$, ϕ es $G_{(0,0)}$–continua en $(0,0)$.
Sin embargo, F también es usualmente diferenciable en $(0,0)$, ya que $F(x,y)$ $= \psi(x,y)(x,y)$, donde

$$\psi(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \left(\sqrt{y}, 0\right) & si \quad y > 0, & x < 0\,, \\ \left(\sqrt{-y}, 0\right) & si \quad y < 0, & x > 0\,, \\ (y,0) & en\ otro\ caso. & \end{array} \right\}$$

$\psi(x,y)$ es continua en $(0,0)$ con la topología usual.

Ejemplo 5.2.

$$F(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^2}{\sqrt{y}} & si \quad y > 0, & x < 0\,, \\ \frac{x^2}{\sqrt{-y}} & si \quad y < 0, & x > 0\,, \\ x^2 & en\ otro\ caso. & \end{array} \right\}$$

F es $G_{(0,0)}$–diferenciable, ya que $F(x,y) = (f(x,y), 0)(x,y)$ y $\phi(x,y)$ es continua en $(0,0)$con la G–topología (f del ejemplo $5{,}1$)

Ejemplo 5.3.

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & y \neq x^2\,, \\ x & si & y = x^2\,, \end{array} \right\}$$

f es $G_{(0,0)}$–diferenciable en $(0,0)$, f es radialmente diferenciable;

$$\phi(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} (0,0) & si & y \neq x^2\,, \\ (1,0) & si & y = x^2\,, \end{array} \right\}$$

entonces $f(x,y) = \phi(x,y)(x,y)$, $\phi(x,y)$es $G_{(0,0)}$–continua en $(0,0)$ y también es radialmente continua en $(0,0)$.

Mientras que calculando obtenemos

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|x|}{\|(x,y)\|} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+x^4}} = \frac{|x|}{|x|\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \to 1,$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.
Por lo tanto f no es Fréchet diferenciable.

Ejemplo 5.4. *Sea*

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si & (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & si & (x,y) = (0,0)\,; \end{array} \right\}$$

Entonces f es continua en $(0,0)$ con la $G_{(0,0)}$–topología en $\mathbb{R}^2$. Veamos: dado $\varepsilon > 0$, sean

$$\begin{aligned} I_m &= \left\{ (x,y)/\ y = mx, |x| < \frac{\epsilon}{m^2} \right\}, \\ I_\infty &= \{ (x,y)/\ x = 0 \}, \\ I_0 &= \{ (x,y)/\ y = 0 \}. \end{aligned}$$

Entonces, si $(x,y) \in \bigcup_{j\in[0,\infty]} I_j$, $y = jx$, $|x| < \dfrac{\varepsilon}{j^2}$, se tiene que

$$|f(x,y)| = \left| \frac{j^2 x^3}{x^2 + j^4 x^4} \right| = \left| \frac{j^2 x}{1 + j^4 x^2} \right| < j^2 |x| < \varepsilon .$$

Luego, $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

Si

$$g(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{x^2y^2 + xy^3}{x^2+y^4} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0)\ , \end{array} \right\}$$

entonces

$$g(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}, \frac{xy^2}{x^2+y^4} \right) (x,y)\ .$$

Por tanto, si

$$\phi(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \right) & \text{si} & (x,y) \neq (0,0)\ , \\ (0,0) & \text{si} & (x,y) = (0,0)\ , \end{array} \right\}$$

ϕ es $G_{(0,0)}$ continua en $(0,0)$, luego g es G–diferenciable en (0,0) y $\phi(0,0) = Df(0,0) = (0,0)$.

Para finalizar, apuntamos que uno de los objetivos, como era el mostrar una definición que facilitara el manejo en el aula de la noción de derivada, se pierde en el momento en que se debe utilizar una topología diferente a la usual, y que para estudiantes que apenas ingresan a la universidad se convertiría en un obstáculo mayor que la noción de derivada en sí. Este tipo de tema lo recomendamos para utilizarlo como un ejemplo en un curso de topología o análisis matemático.

Referencias

[1] Acosta E., *Differentiability in Topological Groups*, Reporte interno No. 39, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

[2] Acosta E. , Delgado C., “Frécht vs Carathéodory”, *American Mathematical Monthly*, Vol. 101, No. 2, 4, April (1994).

[3] Apostol T. M., *Análisis Matemático,* Editorial Reverté, Barcelona (1986).

[4] Bartle R. G., *The Elements of Real Analysis*, second edition, Wiley International Edition, 1964.

[5] Bruckner A. M., Leonard J. L. “Derivatives”, *American Mathematical Monthly*, Vol. 73 No. 4, April (Slaught Memorial Papers, 1966).

[6] Carathéodory C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, Chelsea, New York, 1954.

[7] Dubrovskii, “Sur certaines equations integrales non linéaire”, *Uc. Zap. Moskov, Gos. Univ.* 30 1939, 49–60.

[8] Fréchet M., *La Notion de differentielle dans l’analyse générale,* C. R. Acad. Sci. (Paris), No. 180 (1925).

[9] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis With Aplications*, John Wiley & Sons, New York, (1978).

[10] Kuhn S. , “The Derivative a la Carathéodory”, *American Mathematical Monthly*, Vol. 98, No. 1, January, (1991).

[11] Nashed M. Z., “Differentiability and Related Properties of Nonlinear Operators: Some Aspects of the Role of Differentials in Nonlinear Functional Analysis.”

[12] Nashed M. Z. , “Some Remarks on Variations and differentials”. *American. Mathematical Monthly*, Vol. 73 (1966) (Slaught Memorial Papers).

[13] Nicolescu L. J., “On Some Properties of the direct second order differentials in Gâteaux Sense”, *Review Mathematics Pures Appicated*, No. 8 (1963).

[14] Spivak M., *Calculus On Manifolds,* W. A. Benjamin (1965).

[15] Tadeu Guerreiro G. R. de, *Sobre as Várias Noções de Diferenciabilidade*, Dissertação apresentada para obtenção de Grau de Mestre em Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1982).

[16] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw–Hill Book Company (1987).

[17] Vainberg M. M., *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden–Day, San Francisco (1964).

[18] Willard S., *General Topology*, Addison–Wesley Publishing Company, (1970).