Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 16, No 2, p. 101–107, julio–diciembre de 1998

Formulación geométrica de la dinámica clásica no relativista de una partícula*

Guillermo A. González V.**
Marlio Paredes G.***

Resumen

Se presenta la formulación geométrica de la dinámica clásica no relativista de una partícula en términos de elementos de la geometría diferencial moderna, tales como haces fibrados, variedades simplécticas y formas diferenciales. A partir de esta formulación se muestra cómo, mediante la expresión en coordenadas en un marco de referencia inercial, se obtienen las ecuaciones canónicas estándar de Hamilton para la evolución del sistema.

Abstract

The geometric formulation of non–relativistic classical dynamics of a particle is shown by means of modern differential geometry concepts: fibre bundles, symplectic manifolds and differential forms. Beginning with this formulation it is shown that standard Hamilton canonical equations are obtained by means of a coordinate expresion in an inertial reference frame.

*Trabajo presentado en el XVI Congreso Nacional de Física, Universidad del Valle, Cali, COLOMBIA, 1995.

**Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, COLOMBIA. (*E–mail*: `guillego@uis.edu.co`)
***Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, COLOMBIA. ((*E–mail*: `mparedes@uis.edu.co`)

1. Introducción

En mecánica clásica el empleo de métodos y conceptos de la geometría diferencial y la topología han dado lugar a notables resultados y nuevos desarrollos conceptuales, demostrando así los beneficios que pueden obtenerse al aplicar, a una rama determinada de la física, herramientas matemáticas modernas y sofisticadas [1, 2, 3].

La mecánica clásica es el punto de partida para formular la dinámica cuántica de un sistema físico. A partir de la formulación geométrica de la mecánica clásica puede obtenerse una formulación geométrica de la dinámica cuántica, mediante un procedimiento de cuantización geométrica [4, 5] que proporciona una comprensión más profunda de las ideas de la teoría cuántica.

En este trabajo se presentan los elementos esenciales de la mecánica clásica identificados desde el punto de vista de su naturaleza matemática, en términos de elementos de la geometría diferencial moderna.

2. Estructura matemática del espacio de evolución

Consideremos un sistema físico consistente de una sola partícula y sea X el espacio–tiempo galileano. Debido a la no existencia de un origen de coordenadas natural, X posee la estructura de un espacio afín 4–dimensional; un punto $x \in X$ recibe el nombre de evento. El tiempo absoluto de la mecánica newtoniana se puede representar mediante un espacio afín 1–dimensional T. La especificación de una escala de tiempo corresponde a definir una 1–forma diferencial dt sobre T, la cual es invariante bajo traslaciones [2].

El conjunto de eventos simultáneos con un evento dado constituye un subespacio afín 3–dimensional de $X : X_t \subset X$. La noción de simultaneidad define una aplicación $\tau_0 \colon X \to T$ tal que $\tau_0^{-1}(t) = X_t$, donde X_t es el espacio de eventos simultáneos en el tiempo t y recibe el nombre de ***espacio de configuración en el tiempo*** t. X_t es un espacio euclidiano 3–dimensional. La distancia entre eventos simultáneos viene dada por

$$\rho(x_a, x_b) = \sqrt{\langle x_a - x_b, x_a - x_b \rangle}, \tag{2.1}$$

$x_a, x_b \in X_t$, $\xi = x_a - x_b \in \mathbb{R}^3$ y $\langle \xi, \xi \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Así entonces, X posee la estructura de un haz fibrado [6, 7, 8], con espacio base T, fibra X_t y proyección τ_0. Las traslaciones en X inducen isometrías en sus fibras.

Con cada $t \in T$ asociamos el *espacio de fase* M_t en el tiempo t; el espacio de fase M_t es el haz cotangente del espacio de configuración $X_t : M_t = T^* (X_t)$.

M_t posee la estructura de una variedad simpléctica suave [2, 8]. La colección de todos los espacios de fase para todo tiempo t recibe el nombre de *espacio de evolución del sistema*:

$$Z = \bigcup_{t \in T} M_t. \tag{2.2}$$

Z es el conjunto de todos los posibles estados dinámicos del sistema en todos los tiempos y posee la estructura de un haz fibrado, con espacio base T, fibra M_t y proyección $\tau \colon Z \to T$, definida por

$$\tau^{-1}(t) = M_t. \tag{2.3}$$

La especificación de un marco de referencia inercial define una trivialización de Z; esto es, una colección de difeomorfismos $\psi_j : \tau^{-1}(U_j) \to U_j \times M$, para todo $U_j \subset T$, donde M es el espacio de fase de la mecánica hamiltoniana. Esta trivialización induce isomorfismos de las fibras de Z con la fibra típica M.

3. Dinámica hamiltoniana sobre Z

El espacio de fase M posee una estructura simpléctica natural, definida de la siguiente manera [2]. Sea $M = T^*(X_t)$; un punto $m \in M_t$ es una 1–forma sobre el espacio tangente $T(X_t)_x$ a X_t en algún punto x. La proyección natural $\pi \colon M_t \to X_t$ envía toda 1–forma sobre $T(X_t)_x$ al punto x. Sea $\xi \in T(M_t)_m$ un vector tangente al haz cotangente en el punto $m \in M_t$. La derivada $\pi_* \colon T(M_t) \to T(X_t)$ lleva ξ a un vector $\pi_*\xi \in T(X_t)_x$, donde $x = \pi(m)$. Definimos la 1–forma canónica θ_t sobre M_t como

$$\theta_t(\xi) = p(\pi_*\xi)\,, \tag{3.1}$$

donde $p \in T^*(X_t)_x$. Así entonces, la 2–forma diferencial ω_t definida por

$$\omega_t = d\theta_t \tag{3.2}$$

es cerrada y no degenerada, dotando al haz cotangente de una estructura simpléctica natural.

La dinámica hamiltoniana de una partícula está determinada por una extensión de la colección $\{\omega_t\}$ de 2–formas sobre M_t a una 2–forma Ω sobre Z, tal que $\Omega|_{M_t} = \omega_t$. Puesto que esta descripción de la dinámica puede expresarse en forma hamiltoniana si y solo si Ω es cerrada, asumiremos que $d\Omega = O$.

Un vector $\xi \in T(Z)_z$ para el cual $i_\xi\Omega = 0$ se denomina vector nulo de la forma Ω. Los vectores nulos de Ω forman un subespacio lineal de $T(Z)_z$. Puesto que las 2–formas ω_t son no degeneradas, el subespacio lineal de vectores nulos es 1–dimensional. La unión de los subespacios de vectores nulos en todos los puntos de Z constituye una distribución involutiva 1–dimensional

$$D = \{\xi \in T(Z) : i_\xi \Omega = 0\}\,, \tag{3.3}$$

y se denomina la distribución característica de Ω [9].

La distribución D es generada por un campo vectorial, el cual denotaremos por ζ. Para todo estado clásico $z \in Z$ su evolución en el tiempo está determinada por la variedad integral de D a través de z. El campo vectorial ζ es completo y se encuentra normalizado por la condición

$$(\tau^* dt)(\zeta) = 1\,, \tag{3.4}$$

lo que equivale a decir que la curva integral de ζ está parametrizada por el tiempo T.

Sea ϕ^s el grupo mono–paramétrico de difeomorfismos de Z generados por ζ. Puesto que $i_\zeta \Omega = 0$ y Ω es cerrada, entonces $L_\zeta \Omega = 0$ y $(\phi^s)^* \Omega = \Omega$. La normalización de ζ implica que cada ϕ^s preserva la estructura de haz fibrado de Z e induce una traslación de T denotada por $t \to t + s$. Para cada $t \in T$, denotaremos por $\phi_t^s \colon M_t \to M_{t+s}$ los difeomorfismos obtenidos restringiendo ϕ^s a M_t. Como ϕ^s preserva la 2–forma Ω entonces tenemos

$$(\phi_t^s)^* \omega_{t+s} = \omega_t\,. \tag{3.5}$$

Así, la dinámica clásica no relativista de una partícula se puede interpretar como una familia de transformaciones canónicas entre los espacios de fase M_t y M_{t+s}, las cuales satisfacen la ley de composición

$$\phi_{t+s}^{s'} \circ \phi_t^s = \phi_t^{s+s'}\,. \tag{3.6}$$

Hasta ahora hemos supuesto la existencia de la 2–forma Ω. Para determinar Ω, notemos que las suposiciones de que Ω es cerrada y Z contractible, implican la existencia de una 1–forma Θ tal que $\Omega = d\Theta$. Además, podemos escoger a la 1–forma Θ tal que, para cada $t \in T$, $\Theta|_{M_t} = \theta_t$. Esta restricción define a Θ, excepto por el diferencial de una función sobre T. Así entonces, podemos construir Ω en términos de las ω_t definidas mediante la ecuación (3.1).

4. Expresión en coordenadas en un marco de referencia inercial

La selección de un marco de referencia inercial viene dada por la especificación de una estructura producto del espacio–tiempo: $X \cong E \times T$, donde E es un espacio euclidiano 3–dimensional. Esto induce una estructura producto del espacio de evolución: $Z \cong T^*(E) \times T$, con las proyecciones $\vartheta\colon Z \to T^*(E)$ y $\tau : Z \to T$. La variedad simpléctica $T^*(E)$, con estructura simpléctica $d\theta_E$, es el espacio de fase definido por el marco de referencia inercial.

La imagen recíproca (o *pull–back*) $\vartheta^*\theta_E$ de θ_E es una 1–forma sobre Z tal que, para cada $t \in T$, $\vartheta^*\theta_E|_{M_t} = \theta_E$, de modo que

$$\vartheta^*\theta_E|_{M_t} = \Theta|_{M_t} \; ; \tag{4.1}$$

es decir, $\vartheta^*\theta_E$ y Θ difieren en una 1–forma que se anula sobre la fibras de Z, es decir, una 1–forma proporcional a dt. Por lo tanto, existirá una única función $H\colon Z \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Theta = \vartheta^*\theta_E + H dt \,, \tag{4.2}$$

de modo que la 2–forma $\Omega = d\Theta$ se expresa como

$$\Omega = d(\vartheta^*\theta_E) - d(H dt) \,. \tag{4.3}$$

La función H es el Hamiltoniano dependiente del tiempo, relativo al marco inercial seleccionado, de la dinámica descrita por Θ. Puesto que Θ está determinada excepto por el diferencial de una función suave arbitraria sobre T, se sigue que H está determinada excepto por una función suave arbitraria sobre T.

La selección de un tiempo inicial produce un isomorfismo afín $T \to \mathbb{R}$ tal que, si denotamos por $t : Z \to \mathbb{R}$ su imagen recíproca a Z, la 1–forma dt correspondiente a la selección de una escala de tiempo coincide con el diferencial de la función t.

Sean q^1, q^2, q^3 las imágenes recíprocas a Z de algunas coordenadas cartesianas sobre E, y p_1, p_2, p_3 los momentos canónicos conjugados. En este sistema de coordenadas, tenemos que [2, 4, 8]

$$\vartheta^*\theta_E = \sum_{i=1}^{3} p_i dq^i \,, \tag{4.4}$$

y así entonces

$$\Theta = \sum_{i=1}^{3} p_i dq^i - H dt \,. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, la 2–forma Ω se expresa en las coordenadas $\{p_i, q^i, t\}$ como

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3} dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt \,. \tag{4.6}$$

Así mismo, en este sistema de coordenadas, el campo vectorial ζ que genera la distribución D se escribe

$$\zeta = \sum_{i=1}^{3} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \, . \tag{4.7}$$

Sea $\alpha \colon \mathbb{R} \to Z$ una curva integral de ζ a través de z; esto es, $\alpha(0) = z$ y $\dot{\alpha}(0) = \zeta(z)$. En las coordenadas $\{p_i, q^i, t\}$ tenemos

$$\alpha(t) = \left(p_i(\alpha(t)), q^i(\alpha(t)), t(\alpha(t)) \right) , \tag{4.8}$$

de modo que la condición $\dot{\alpha} = \zeta(\alpha(t))$ implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i(\alpha(t)) &= -\frac{\partial H}{dt}(\alpha(t)), \\ \frac{d}{dt} q^i(\alpha(t)) &= \frac{\partial H}{dt}(\alpha(t)), \\ \frac{d}{dt} t(\alpha(t)) &= 1 \, , \end{aligned} \tag{4.9}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $i = 1{,}2{,}3$.

Por lo tanto, las curvas integrales de ζ satisfacen las ecuaciones canónicas de Hamilton usuales, con el Hamiltoniano H dependiente del tiempo.

5. Conclusiones

La formulación de la dinámica clásica presentada en este trabajo constituye un método poderoso para enfrentar diversos problemas de la física clásica, así como también para resolver algunas ambigüedades existentes en el proceso de cuantización de un sistema físico.

Los resultados obtenidos mediante la formulación geométrica de la dinámica clásica concuerdan con los resultados obtenidos mediante otras formulaciones más tradicionales; sin embargo, el poder de los métodos geométricos está principalmente en los aspectos conceptuales de la teoría, pues permite una visión global de la evolución de un sistema independientemente de cualquier marco de referencia o sistema de coordenadas empleado.

Referencias

[1] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Adisson–Wesley, 1978.

[2] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, 60, Springer–Verlag, 1980.

[3] W. Thirring, *Classical Dynamical Systems, A Course in Mathematical Physics*, 1, Springer–Verlag, 1978.

[4] J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Applied Mathematical Science, 30, Springer–Verlag, 1980.

[5] J. Simms and N.M.J. Woodhouse, *Lectures and Geometric Quantization*, Lecture Notes in Physics, 53, Springer–Verlag, 1976.

[6] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.

[7] T. Eguchi, P. Gilkey and A.J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Rep., 66, p. 213, 1980.

[8] Y. Choquet–Bruhat, C. Dewitt–Morette and M. Díllard–Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, North–Holland, 1978.

[9] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946.