Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 14, No 2, p. 57–68, julio–diciembre de 1996

Nociones débiles de complemento

ARNOLD OOSTRA V.*

Resumen

Se presenta la noción de precomplemento y se obtiene un resultado paralelo a un teorema de teoría de retículos atribuido a Glivenko; además, resulta una prueba simplificada de este último.

En el texto de álgebra de Lambek [6, página 49] aparece esta afirmación escueta: "los regular–abiertos [de un espacio topológico] constituyen un álgebra booleana". Al elaborar una prueba tomando como herramienta la función de exterior, se encontró un mecanismo que permite obtener retículos complementados a partir de semiretículos; una consulta bibliográfica posterior manifestó que se conocía un mecanismo similar para obtener álgebras booleanas, lo cual es el contenido del teorema de Glivenko.

En esta nota se describe el camino recorrido; el ejemplo único y recurrente es, por supuesto, la función de exterior. No se pretende ni se logra más que una invitación al estudio de los retículos seudocomplementados y de las álgebras de Heyting.

En todo este artículo, S es un semiretículo inferior con mínimo, denotado 0. Las demás convenciones se indican en el primer inciso, que sólo se incluye para que el escrito sea autocontenido: la lectura bien podría saltar al siguiente. La nomenclatura y la idea de algunas pruebas (además de ciertas afirmaciones escuetas) han sido tomadas de los textos mencionados en la bibliografía, sin indicar en cada ocasión la fuente precisa.

*Universidad del Tolima, A.A. 1201, Ibagué, COLOMBIA

Convenciones

Las estructuras bajo consideración son conjuntos ordenados.

Si Y denota un conjunto ordenado, Y^{op} denota el mismo conjunto pero ordenado por la relación inversa. Al mencionar un subconjunto de Y, se sobreentiende que está dotado del orden restringido; para los intervalos se emplea la notación usual, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
[a) &= \{y \in Y : y \geq a\}, \\
[a,b] &= \{y \in Y : y \geq a \quad \& \quad y \leq b\}.
\end{aligned}
$$

Un subconjunto $H \subseteq Y$ es *hereditario* si para cada elemento $h \in H$: $y \leq h$ implica $y \in H$, es decir, $(h] \subseteq H$. Los subconjuntos hereditarios que poseen máximo son los intervalos de la forma $(b]$.

Un conjunto ordenado es un *semiretículo inferior* (o inf–semiretículo) si cada par de elementos x, y posee extremo inferior (o máxima cota inferior), denotado $x \wedge y$; es un *semiretículo superior* si cada par x, y posee extremo superior, denotado $x \vee y$; y es un *retículo* si es semiretículo inferior y superior. Un semiretículo se puede describir de manera alternativa como un semigrupo conmutativo en el cual cada elemento es idempotente.

En un retículo con mínimo 0 y máximo 1, un *complemento* de un elemento x es un elemento y tal que

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &= 0, \\
x \vee y &= 1.
\end{aligned}
$$

Un retículo es *complementado* si posee mínimo y máximo y cada elemento tiene algún complemento.

Un retículo es *distributivo* si las operaciones binarias $\wedge, \vee$ son mutuamente distributivas; esto equivale a que

$$
x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z
$$

para cada x, y, z. Un retículo es *modular* si esta desigualdad se cumple para elementos x, y, z tales que $x \geq z$.

Un *álgebra booleana* es un retículo distributivo complementado; como se observa más adelante, en ese caso los complementos son únicos. Un álgebra booleana se puede describir de manera alternativa como un anillo conmutativo con unidad en el cual cada elemento es idempotente.

Una función f entre conjuntos ordenados *preserva el orden* si $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$ para cada par de elementos x, y del dominio, e *invierte el orden* si $x \leq y$ implica $f(x) \geq f(y)$. Un *isomorfismo de orden* es una función biyectiva tal que ella y su inversa preservan el orden; es evidente que el carácter de semiretículo, retículo o álgebra booleana se preserva por isomorfismos de orden.

Si el dominio y el codominio de la función f coinciden, entonces para un número natural n, f^n denota la función f compuesta n veces; por ejemplo $f^2(x)$ significa $f(f(x))$. Se conviene que f^0 es la función idéntica, $f^0(x) = x$ para cada x. La función f es *idempotente* si $f^2 = f$.

Si Y es un conjunto ordenado, una *función de clausura en* Y es una función $h : Y \longrightarrow Y$ que satisface:

i) h preserva el orden;

ii) h es idempotente;

iii) $h(y) \geq y$ (para cada $y \in Y$).

Estas condiciones equivalen a que

$$h(y) \leq x \text{ si y sólo si } y \leq x$$

para cada $y \in Y$ y cada $x \in h(Y)$.

El recorrido $h(Y)$ de una función de clausura h en Y es cerrado para extremos inferiores, esto es: si un subconjunto $A \subseteq h(Y)$ posee extremo inferior en Y, entonces $\inf A \in h(Y)$; se observa que $\inf A$ es el extremo inferior de A en $h(Y)$. Si A posee extremo superior en Y entonces $h(\sup A)$ es el extremo superior de A en $h(Y)$, si bien es distinto de $\sup A$ si este elemento no pertenece a $h(Y)$.

En consecuencia, el recorrido de una función de clausura en Y hereda, según la estructura que posea Y, las propiedades de semiretículo inferior, semiretículo superior o retículo.

1. Función de complemento

Definición 1. *Una función de complemento en S es una función $c : S \longrightarrow S$ que satisface:*

i) *c invierte el orden;*

ii) $c^2(x) = x$ *(para cada $x \in S$);*

iii) $x \wedge c(x) = 0$ *(para cada $x \in S$).*

La condición (i) significa que las dos funciones $c : S \longrightarrow S^{op}$ y $c : S^{op} \longrightarrow S$ preservan el orden; la condición (ii), que son inversas la una de la otra. Así que una función de complemento es además un isomorfismo de orden entre S y S^{op}.

Pero entonces S^{op} es un semiretículo inferior con mínimo, y en consecuencia S es también semiretículo superior con máximo; es decir, S es un retículo con mínimo y máximo. El extremo superior de x, $y \in S$ es

$$c\,(c(x) \wedge c(y))$$

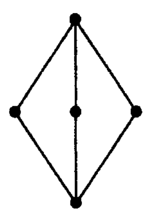
y el máximo de S es $c(0)$.

De hecho S es un retículo complementado, como se podría sospechar por el nombre de la función. Sin embargo hay una diferencia sutil entre la existencia de una función de complemento y la existencia de un complemento para cada elemento.

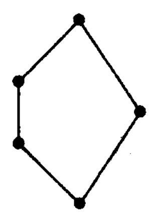
Proposición 1. *Si S posee una función de complemento entonces es un retículo complementado.*

Demostración. $c(x)$ es un complemento de x. Pues por la condición (iii), $x \wedge c(x) = 0$; y además

$$x \vee c(x) = c\,(c(x) \wedge c\,(c(x))) = c(0) = 1. \quad \blacksquare$$



M_3



N_5

Es fácil observar que los retículos M_3 y N_5 (véase la figura) carecen de funciones de complemento, aunque se trata de retículos complementados. Esto no sucede cuando el retículo complementado es distributivo.

Proposición 2. *En un álgebra booleana existe una única función de complemento.*

Demostración. x' denota el complemento de x en el álgebra booleana en cuestión.

A. $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y' = 0$.

Si $x \leq y$ entonces $x \wedge y' \leq y \wedge y' = 0$. Y si $x \wedge y' = 0$ entonces

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 \\ &= x \wedge (y' \vee y) \\ &\leq (x \wedge y') \vee y \\ &= 0 \vee y \\ &= y. \end{aligned}$$

B. La función $x \mapsto x'$ es una función de complemento.

La condición (iii) se satisface por hipótesis.

$x'' \wedge x' = x' \wedge (x')' = 0$, luego por (**A**), $x'' \leq x$. Esta desigualdad es válida para cada elemento, luego también $x''' = (x')'' \leq x'$; en consecuencia, $x \wedge (x'')' = x \wedge x''' \leq x \wedge x' = 0$ y de nuevo por (**A**), $x \leq x''$. Así $x'' = x$.

Finalmente supóngase que $x \leq y$, es decir, que $x \wedge y' = 0$; entonces $y' \wedge (x')' = y' \wedge x'' = y' \wedge x = 0$, y por (**A**), $y' \leq x'$.

C. Si c es una función de complemento entonces $c(x) = x'$ para cada x.

Por un lado,

$$\begin{aligned} c(x) &= c(x) \wedge 1 \\ &= c(x) \wedge (x \vee x') \\ &\leq (c(x) \wedge x) \vee x' \\ &= 0 \vee x' \\ &= x', \end{aligned}$$

y de manera simétrica $x' \leq c(x)$. ∎

2. Función de precomplemento

Se busca ahora una noción un poco más general que la de función de complemento, debilitando adecuadamente los axiomas. Las proposiciones 3 hasta 5 están encaminadas a justificar la elección de las condiciones alteradas, y en ellas $f : S \longrightarrow S$ es cualquier función.

Proposición 3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *f invierte el orden y $f^2(x) \geq x$ (para cada $x \in S$),*

b) *$x \leq f(y)$ si y sólo si $f(x) \geq y$ (para cada x, $y \in S$).*

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Es evidente que basta probar una implicación. Si $x \leq f(y)$ entonces $f(x) \geq f^2(y)$, pero además $f^2(y) \geq y$, luego $f(x) \geq y$.

(b) $\Rightarrow$ (a) De $f(x) \leq f(x)$ se sigue $f^2(x) \geq x$. Y si $x \leq y$, como $y \leq f^2(y)$ se tiene $x \leq f(f(y))$; de donde $f(x) \geq f(y)$. ∎

Si f invierte el orden y existen números naturales m, n tales que $f^m \leq f^n$, entonces $f^{m+1} = f^{n+1}$. Pues para cada x, por un lado

$$f^{m+1}(x) = f^m(f(x)) \leq f^n(f(x)) = f^{n+1}(x),$$

pero por otra parte $f^m(x) \leq f^n(x)$, y como f invierte el orden,

$$f^{m+1}(x) = f(f^m(x)) \geq f(f^n(x)) = f^{n+1}(x).$$

Así que si f satisface las condiciones equivalentes de la proposición 3 entonces $f^3 = f$. De aquí se sigue que $f^4 = f^2$, es decir, que f^2 es idempotente. Estas observaciones permiten reducir de manera considerable las condiciones para que f^2 sea función de clausura.

Corolario 1. *Supóngase que f invierte el orden. f^2 es función de clausura si y sólo si $f^2(x) \geq x$ (para cada $x \in S$).*

Una función de un conjunto en sí mismo es idempotente si y sólo si su recorrido coincide con el conjunto de puntos fijos. El recíproco de la siguiente afirmación también es cierto, y queda un ejercicio interesante: ¿la igualdad de cuáles conjuntos equivale a la igualdad $f^n = f$? Se observa que aquí no interviene la estructura de orden de S.

Proposición 4. *Si $f^3 = f$ entonces los siguientes conjuntos coinciden:*

a) *el recorrido de f,*

b) *el recorrido de f^2,*

c) *el conjunto de puntos fijos bajo f^2.*

Demostración. Es evidente que el recorrido de f contiene el de f^2 y que el recorrido de una función contiene el conjunto de puntos fijos bajo la misma. Sea, pues, x un elemento del recorrido de f, esto es, $x = f(w)$ para algún $w \in S$. Entonces

$$f^2(x) = f^2(f(w)) = f^3(w) = f(w) = x;$$

es decir, x es punto fijo bajo f^2. ∎

Definición 2. *Una función de precomplemento en S es una función $p : S \longrightarrow S$ que satisface:*

i) *p invierte el orden;*

ii) *$p^2(x) \geq x$ (para cada $x \in S$);*

iii) *$x \wedge p(x) = 0$ (para cada $x \in S$).*

Si p es una función de precomplemento entonces p^2 es una función de clausura, cuyo recorrido o conjunto de puntos fijos coincide con el recorrido de p. Las condiciones (i) y (ii) de la definición equivalen a que

$$x \leq p(y) \text{ si y sólo si } p(x) \geq y$$

para cada x, $y \in S$.
En particular $0 \leq p(x)$ equivale a $p(0) \geq x$, así que $p(0)$ es el máximo de S.

Corolario 2. *Si S posee una función de recomplemento entonces tiene máximo.*

Toda función de complemento (en particular, la función de complemento en un álgebra booleana) es una función de precomplemento. El siguiente ejemplo pone de presente que no toda función de precomplemento es de complemento.

(X, τ) es un *espacio topológico*: X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X, llamados *abiertos*, que es cerrada para intersecciones finitas y uniones arbitrarias. La *función de exterior* $E_\tau : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ está definida para cada $A \subseteq X$ como sigue:

$$E_\tau(A) = \cup \{ V \in T : V \subseteq A^c \}.$$

La restricción de E_τ es una función de precomplemento en τ ; los subconjuntos que pertenecen al recorrido de esta restricción (es decir, los puntos fijos bajo la función doble exterior ${E_\tau}^2$) se denominan *regular–abiertos*. Cuando no todos los abiertos son regular–abiertos, entonces E_τ no es función de complemento en τ; tal es el caso del espacio usual de los números reales, en el cual el abierto $(0,1) \cup (1,2)$ no es regular–abierto.

El retículo N_5 posee una (única) función de precomplemento, pues es isomorfo al retículo de abiertos de cierto espacio topológico con tres puntos. El retículo M_3 carece de funciones de precomplemento.

La discusión de este inciso está encaminada hacia el siguiente resultado.

Teorema 1. *El recorrido de una función de precomplemento es un retículo complementado.*

Demostración. Sea R el recorrido de una función de precomplemento p en S.

A. R es subestructura de S.

Como R es el recorrido de la función de clausura p^2, es cerrado para extremos inferiores, y en particular es subsemiretículo inferior de S.

Puesto que $p(0)$ es el máximo de S, $p^2(0) = p(0) \wedge p^2(0)$; pero $p(0) \wedge p^2(0) = p(0) \wedge p\,(p(0)) = 0$ por la condición (iii) de la definición 1, luego $p^2(0) = 0$. De manera que $0 \in R$.

B. La restricción de p a R es una función de clausura.

Es claro que $p(x) \in R$ para cada $x \in R$, y que la restricción de p invierte el orden. Y por (A), la identidad $x \wedge p(x) = 0$ es también válida en R.

Además R es el conjunto de puntos fijos bajo p^2, es decir, $p^2(x) = x$ para cada $x \in R$.

Por la proposición 1, R es un retículo complementado. ∎

Si S es un retículo completo, es decir, si todo subconjunto de S tiene extremo inferior y superior, entonces R también es completo: porque como se indica en la prueba de (A), es cerrado para extremos inferiores. Tal es el caso del conjunto de regular–abiertos de un espacio topológico, que es cerrado para intersecciones. Sin embargo los extremos superiores en R en general no coinciden con los extremos superiores que existan en S. Por ejemplo, la unión de dos conjuntos regular–abiertos del espacio de los números reales no siempre es regular–abierto.

3. Función de seudocomplemento

La siguiente noción ha sido estudiada a fondo por varios de los autores indicados en la bibliografía [1, 2, 5].

Definición 3. *Una función de seudocomplemento en S es una función $s : S \longrightarrow S$ que satisface:*

i) $x \wedge y = 0$ *implica* $y \leq s(x)$ *(para cada x, $y \in S$);*

ii) $x \wedge s(x) = 0$ *(para cada $x \in S$).*

En otras palabras,

$$s(x) = \max \ \{ \ y \in S : \ x \wedge y = 0 \ \} .$$

Se observa que el subconjunto $\{ \ y \in S : \ x \wedge y = 0 \ \}$ es hereditario, luego esta igualdad se puede expresar como sigue:

$$\{ \ y \in S : \ x \wedge y = 0 \ \} = (\, s(x)\,) .$$

Corolario 3. *Para una función $s : S \longrightarrow S$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *s es función de seudocomplemento en S,*

b) $y \leq s(x)$ *si y sólo si* $x \wedge y = 0$ *(para cada x, $y \in S$).*

Es bien posible que para algunos elementos $x \in S$ el conjunto $\{ \ y \in S : \ x \wedge y = 0\}$ posea máximo y para otros no; en caso de existir, ese máximo se podría denominar seudocomplemento de x. Es claro que un elemento puede tener a lo más un seudocomplemento, luego la existencia de una (única) función de seudocomplemento es equivalente a la existencia de un seudocomplemento para cada elemento.

Proposición 5. *Toda función de seudocomplemento es de precomplemento.*

Demostración. Por hipótesis se cumple $x \wedge s(x) = 0$. Por la condición (i), de $s(x) \wedge x = 0$ se sigue $x \leq s^2(x)$. Finalmente si $x \leq y$ entonces $x \wedge s(y) \leq y \wedge s(y) = 0$, y de nuevo por la condición (i) se obtiene $s(y) \leq s(x)$. ∎

En un álgebra booleana, la función de complemento es una función de seudocomplemento. Esto se deduce fácilmente utilizando la equivalencia **(A)** de la prueba de la proposición 2.

En un espacio topológico (X, τ), la función de exterior $E_\tau : \tau \longrightarrow \tau$ restringida a los abiertos es una función de seudocomplemento. En efecto, el exterior $E_\tau(A)$ de un abierto $A \in \tau$ es el máximo abierto disyunto con A.

Salvo un par de condiciones sobre $s(0)$, la primera de las siguientes propiedades caracteriza la función de seudocomplemento.

Proposición 6. *Sea s una función de seudocomplemento en S.*

1. $x \wedge a \leq b$ *implica* $x \wedge s(b) \leq s(a)$ *(para cada a, b, $x \in S$).*
2. $s^2(x \wedge y) = s^2(x) \wedge s^2(y)$ *(para cada x, $y \in S$).*

Demostración.

1. Si $x \wedge a \leq b$ entonces $x \wedge a \wedge s(b) \leq b \wedge s(b) = 0$, es decir, $a \wedge (x \wedge s(b)) = 0$; por la condición (i) de la definición se obtiene $x \wedge s(b) \leq s(a)$.
2. Como s es función de precomplemento, invierte el orden y s^2 lo preserva; en consecuencia $s^2(x \wedge y) \leq s^2(x) \wedge s^2(y)$.

Ahora se observa que $a \wedge b = 0$ implica $s^2(a) \wedge b = 0$. En efecto, si $a \wedge b = 0$, entonces por la condición (i), $b \leq s(a)$; como s invierte el orden, esto implica $s^2(a) \leq s(b)$, y por el corolario 3 se concluye $s^2(a) \wedge b = 0$.

Aplicando dos veces esta implicación a la igualdad $(x \wedge y) \wedge s(x \wedge y) = 0$ se obtiene $s^2(x) \wedge s^2(y) \wedge s(x \wedge y) = 0$, y una vez más por la condición (i) se concluye que $s^2(x) \wedge s^2(y) \leq s^2(x \wedge y)$. ∎

El siguiente resultado es la versión del Teorema 1 correspondiente a seudocomplementos. Fue probado inicialmente por V. Glivenko en un artículo publicado en 1929, para el caso en que S es un retículo completo; en [2] se prueba cuando S es un álgebra de Heyting, en [1] cuando es un retículo distributivo y en [5] cuando es un semiretículo con mínimo, como en esta nota.

La prueba que se presenta a continuación es bastante sencilla, pues se basa en el Teorema 1. Se observa que si bien aquí la conclusión es más fuerte que allí, la hipótesis también es más restrictiva.

Teorema 2 (Glivenko). *El recorrido de una función de seudocomplemento es un álgebra booleana.*

Demostración. Sea R el recorrido de una función de seudocomplemento s en S. Por la Proposición 5 y el Teorema 1, R es un retículo complementado; sean pues x, y, $z \in R$; se mostrará que $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z$.
Inicialmente se observa que

$$x \wedge s(x \wedge y) \wedge s(z) \leq s(y) \wedge s(z), \tag{1}$$

pues por una parte, es evidente que $x \wedge s(x \wedge y) \wedge s(z) \leq s(z)$; y por otro lado $(x \wedge y) \wedge s(x \wedge y) = 0$, luego $(x \wedge s(x \wedge y)) \wedge y \leq z$, y por la afirmación 1 de la Proposición 6, también $x \wedge s(x \wedge y) \wedge s(z) \leq s(y)$.
Ahora de nuevo por por la afirmación 1 de la Proposición 6, la desigualdad (1) implica

$$x \wedge s\left(s(y) \wedge s(z)\right) \leq s\left(s(x \wedge y) \wedge s(z)\right),$$

es decir, $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z$. ∎
En particular, el conjunto de regular–abiertos de un espacio topológico constituye un álgebra booleana. En este caso, y en general si S es un retículo distributivo, el carácter distributivo del retículo R se puede probar de manera alternativa a partir de la afirmación 2 de la Proposición 6, como sigue:

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= s^2(x) \wedge s^2(y \vee_S z) \\ &= s^2\left(x \wedge (y \vee_S z)\right) \\ &= s^2\left((x \wedge y) \vee_S (x \wedge z)\right) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

La noción de seudocomplemento aparece de manera natural en las álgebras de Heyting. De hecho, un álgebra de Heyting se puede definir como un retículo distributivo con mínimo y máximo en el cual cada intervalo $[x, y]$ posee función de seudocomplemento. El conjunto de abiertos de un espacio topológico constituye un álgebra de Heyting.

Referencias

[1] R. BALBES Y PH. DWINGER, *Distributive Lattices University of Missouri Press*, Columbia (Missouri), 1974

[2] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, (Tercera Edición), Colloquium Publications Volume XXV, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 1967

[3] S. BURRIS Y H. P. SANKAPPANAVAR, *A Course in Universal Algebra*, Springer Verlag, New York 1981

[4] P. J. FREYD Y A. SCEDROV, *Categories, Allegories*, North Holland, Amsterdam, 1990

[5] G. GRÄTZER, *Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices*, W. H. Freeman, San Francisco, 1971

[6] J. LAMBEK, *Lectures on Rings and Modules*, (Tercera Edición), Chelsea, New York, 1986

[7] A. OOSTRA, *Temas de Conjuntos Ordenados*, Décimo Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, 1993