

ANÁLISIS DE UN BIORREACTOR DE MEZCLA PERFECTA CON RECIRCULACION

HUGO SERRANO RIAÑO
Ing. Quím. M.Sc. U.N. UIS.*

CLEMENTE RETAMOSO RODRIGUEZ
Ing. Quím. M.Sc. U.N. Lehigh U.*

RESUMEN

Se analiza el comportamiento de un reactor bioquímico de mezcla perfecta en estado estacionario y en estado dinámico. Como parámetros cinéticos se utilizan los previamente identificados experimentalmente en un reactor por lotes.

ESTADO ESTABLE

La producción de biomasa en un reactor de mezcla perfecta continuo se ve afectada por parámetros tales como la velocidad de dilución (D), la fracción recirculada (r) y los parámetros de crecimiento (Y_{xs} , K_s , etc.) del microorganismo que se pretende cultivar.

La cantidad máxima de producción de biomasa para determinar condiciones de operación, en estado estacionario, puede hallarse a partir de la ecuación de continuidad, que simplificada, para el sistema de la Figura 1., queda en forma adimensional planteada así:

$$\begin{bmatrix} u \\ D \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 1 + r \\ 1 + r \cdot FE/F \end{bmatrix} \quad (1)$$

* Departamento de Ingeniería Química UIS, Apartado Aéreo 678 Bucaramanga, Colombia

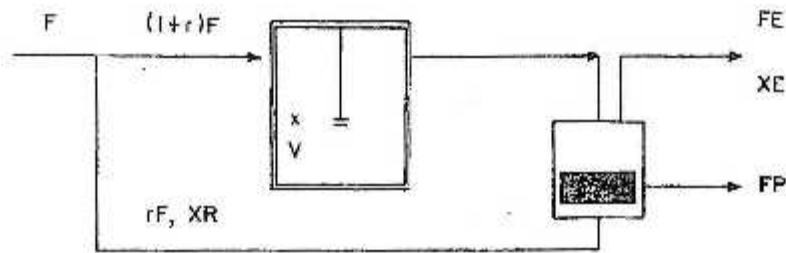


FIGURA 1. Biorreactor para la producción continua de proteína unicelular.

El significado de la variable (u/D) se observa cuando expresamos el balance de materia para un quimiostato sin recirculación:

$$D X_0 = (D - u) X;$$

donde $D = F/V$.

Cuando el alimento, como en este caso, consiste de nutriente estéril ($X_0 = 0$) la población sólo puede mantenerse cuando:

$$D = u$$

o en otra forma, cuando:

$$(u/D) = 1.$$

Tomando como parámetro constante (6) la relación de refluo de efluente agotado a alimento fresco, FE/F , la Figura 2., muestra la variación de (u/D) vs. r . La Figura 3., en la que se ve la variación de β con r , no es más que una variación del rango de recirculaciones de la Figura 2., en donde:

$$\beta = 1 + r \left[1 - \frac{1 + r}{1 + r - FE/F} \right] \quad (2)$$

De la Figura 3., puede concluirse que, para el sistema estudiado, para cualquier valor de FE/F , la variación de la relación u/D , para valores de recirculación mayores de 0,4, no es significativa.

Un balance de sustrato conduce a:

$$\frac{u}{D} = \frac{Y_{xs}(S_0 - S)}{X}$$

Y una sencilla manipulación matemática lleva a:

$$X = \frac{Y_{xs}(S_0 - S)}{1 + r \left[1 - \frac{1 + r}{1 + r - FE/F} \right]}$$

$$X = \frac{Y_{xs}(S_0 - S)}{\beta}$$

Y, puesto que se asume como válida la ecuación cinética de Monod,

$$u = \frac{u_{max} S}{K_s + S}$$

se tiene,

$$S = \frac{\beta D K_s}{u_{max} - \beta D} \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) dan los valores de concentración de biomasa y sustrato en estado estacionario. Reemplazando (4) en (3) y multiplicando por D a ambos lados de la igualdad se obtiene la salida de biomasa [g/cm³ h]:

$$DX = \frac{D \cdot Y_{xs}}{E_0} \left[S_0 - \frac{\beta D K_s}{u_{max} - \beta D} \right] \quad (5)$$

El hallar un máximo a la ecuación (5) por los métodos comunes (Newton, Cuasinewton, etc.) no es posible puesto que la ecuación es multinodal, es decir, no existe en todo el intervalo de aplicación de la ecuación un único valor de D y β (r) que maximice la salida de biomasa: Existen por lo tanto varios estados estacionarios.

Sin embargo, un análisis de la forma como varía β , con la recirculación, en conjunto con la ecuación (5), permite observar que cuanto menor sea el valor de β mayor será el de la velocidad de dilución D, es decir, menor será el tiempo de residencia, para una velocidad de crecimiento específica determinada, y una relación FE/F fija. La Figura 4., muestra la variación de β para diferentes valores de FE/F con r como parámetro.

La salida máxima de biomasa, DX (Figura 5) puede hallarse analíticamente derivando la ecuación (5) con respecto a D. El resultado es:

$$\frac{S_0}{\beta} - \frac{2 D K_s}{(u_{máx} - uD)} - \frac{\beta D^2 K_s}{(u_{máx} - uD)^2} = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es algebraica no lineal implícita en D. El valor de D obtenido corresponde a la salida máxima de biomasa DX.

De acuerdo con el análisis anterior se tomó una recirculación de 0,4 y una relación de efluente a alimento F_E/F de 0,7. Hallado el valor óptimo de la velocidad de dilución se puede obtener, mediante las ecuaciones (3) y (4), las concentraciones de biomasa y de sustrato en estado estacionario y es posible pasar al análisis dinámico del sistema. Los parámetros del sistema (tomados de María J. E.) (5) y los resultados obtenidos son:

Salida máxima de biomasa:	5,84 g/l h
Concentración de sustrato:	3,06 g/l
Concentración de biomasa:	7,86 g/l
Velocidad de dilución:	0,76 h ⁻¹
$u_{máx}$:	0,728 h
K_s :	1,939 g/l
Y_x/s :	0,527 g/g
S_0 :	12,0 g/l

ANÁLISIS EN ESTADO DINAMICO

Los balances de biomasa y sustrato del biorreactor en estado no estacionario se resumen en las siguientes expresiones:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{rXR - (1-r)X}{Y_{x/s}} + \frac{u_{máx} S X}{K_s + S} \quad (7)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S_0 - S}{\tau} - \frac{1}{Y_{x/s}} - \frac{u_{máx} S X}{K_s + S} \quad (8)$$

donde $\tau = 1/D$.

La linealización de las ecuaciones [7] y (8) y su colocación en términos de variables de perturbación (desviación del estado estacionario) es conveniente para el análisis que compete a la estabilidad de un reactor que sufre una alteración en una o varias de sus variables de entrada. Tal modificación las presenta así:

$$\frac{dX^P}{dt} = B_1 S^P + B_2 X^P + B_3 r^P + B_4 XR^P + B_5 r^P \quad (9)$$

$$\frac{dS^P}{dt} = A_1 S^P + A_2 X^P + A_3 S_0^P + A_4 r^P \quad (10)$$

En las cuales:

$$A_1 = - \left[\frac{1}{\tau} + \frac{u_{\max} X}{Y (K_s - S)^2} \right]$$

$$A_2 = - \left[\frac{1}{Y} \frac{u_{\max} S}{K_s - S} \right]$$

$$A_3 = \frac{1}{\tau}$$

$$A_4 = - \frac{S_0 - S}{\tau}$$

$$B_1 = \frac{u_{\max} X K_s}{(K_s - S)^2}$$

$$B_2 = - \left[\frac{1+r}{\tau} - \frac{u_{\max} K_s}{K_s - S} \right]$$

$$B_4 = - \left[\frac{r XR - (1-r) S}{\tau^2} \right]$$

$$B_s = \frac{r}{r}$$

$$B_s = \frac{XR - X}{r}$$

Los valores en negrilla se refieren al valor en estado estacionario.

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Aunque no existe una definición única ni limitada de lo que es la estabilidad de un sistema, es posible considerar algunas apreciaciones sobre ella. De un proceso, puede decirse que es estable si es autorregulatorio, es decir, si sus variables convergen a algún estado estable después de introducir alguna perturbación. En otro sentido, se ha desarrollado toda una teoría matemática sobre estabilidad, refiriéndose a las propiedades de las soluciones a las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema en cuestión, cuando se trata de ecuaciones lineales. Dentro de las definiciones de estabilidad cualitativa se destacan dos:

- Estabilidad cuando cada entrada limitada en un sistema lineal produce una salida limitada.
- Estabilidad exponencial, asintóticamente estable.

El sistema en cuestión en el presente estudio es descrito por ecuaciones no lineales para lo cual es necesario ampararse en el siguiente teorema de Liapunov:

"Sean linealizadas las ecuaciones no-lineales de un movimiento por expansión en variables de desviación, alrededor de un punto crítico particular. Si la solución linealizada para las variables de desviación es estable, el movimiento real será estable, en alguna vecindad del punto crítico. Si la solución linealizada es neutralmente estable (es decir, si su ecuación característica tiene raíces sobre el eje imaginario), nada puede decirse sobre el movimiento real. Si la solución linealizada es inestable, entonces, el movimiento real será inestable."

Las ecuaciones linealizadas (9) y (10) que describen el sistema son de la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \quad (11)$$

donde las variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son un conjunto de variables de estado y las variables $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ representan los efectos de fuentes de funciones forzantes y perturbaciones externas al sistema. Si se considera que S_p , XR y r permanecen imperturbables se tiene el sistema descrito en términos de variables de estado, en donde el

comportamiento del sistema dinámico puede ser investigado así¹:

$$\frac{dX}{dt} = B_1 S + B_2 X \quad (12)$$

$$\frac{dS}{dt} = A_1 S + A_2 X$$

Con condiciones iniciales $S(0) = 0$, $X(0) = 0$.

El sistema puede representarse de la forma

$$\frac{dX}{dt} = A X \quad (12)$$

donde,

$$X = [S, X]$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

Para este caso especial, $LX = AX = \lambda X$, el sistema tendrá soluciones no triviales sólo si

$$\det(A - \lambda I) = 0;$$

$$\begin{bmatrix} A_1 - \lambda & A_2 \\ B_1 & B_2 - \lambda \end{bmatrix} = (A_1 - \lambda)(B_2 - \lambda) - A_2 B_1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A_1 + B_2) \pm \sqrt{(A_1 - B_2)^2 - 4A_2 B_1}}{2}$$

¹ En adelante se suprimirá el superíndice p para las variables de perturbación puesto que sólo se hablará de ellas; por tanto debe suponerse su existencia a menos que se diga lo contrario.

La solución del sistema será:

$$X = C_3 \exp[\lambda_1 t] + C_4 \exp[\lambda_2 t]$$

$$S = C_3 \exp[\lambda_1 t] + C_4 \exp[\lambda_2 t]$$

Si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas negativas, tanto X como S convergen a cero con el tiempo y por lo tanto el sistema será estable.

Si la parte real de λ_1 y/o λ_2 es positiva, el punto estacionario es inestable porque X o S o ambos divergen con una perturbación. Para el biorreactor considerado los eigenvalores hallados fueron:

$$\lambda_1 = -1,1104 + 1,2346 i$$

$$\lambda_2 = -1,1104 - 1,2246 i$$

lo cual indica que el sistema es estable. Es de anotar que estos eigenvalores coinciden con los que se obtienen al convertir el sistema de ecuaciones [12] en una ecuación de segundo orden y resolver la ecuación característica o al usar transformadas de Laplace.

TECNICA DEL PLANO DE FASE

La técnica del plano de fase es otra manera de analizar la estabilidad del sistema; en él podemos analizar la manera como varía la variable S con respecto a la variable X. En ella, el tiempo desaparece al ser eliminado de las ecuaciones (12).

Dividiendo dX/dt entre dS/dt obtenemos:

$$\frac{dX}{dS} = \frac{B_1 S + B_2 X}{A_1 S + A_2 X} \quad (13)$$

Puesto que el interés es mantener el sistema cerca o en el estado estable ($dX/dt = dS/dt = 0$), es claro, de la ecuación [13], que los estados estacionarios son puntos críticos. En los puntos críticos la pendiente de la trayectoria es indefinida; por lo tanto, muchas trayectorias pueden intersectar en estos puntos. En la ecuación [13] puede verse que el punto $X = 0, S = 0$ es un punto crítico. Por lo tanto, para el sistema particular, independientemente del estado inicial (para cualquier perturbación aplicada), el sistema regresa al estado estable en el punto crítico (al menos desde el punto de vista matemático).

La visualización de la(s) trayectoria(s) seguida(s) por el sistema puede lograrse gráficamente, bien por el método de las isoclinas (que no será descrito aquí) o de la integración directa de la ecuación 13.

Sin embargo, la ecuación (13) y sus condiciones iniciales no tienen una solución numérica determinada por lo que debe hallarse una solución analítica. Después de un procedimiento engorroso se llega a la siguiente

solución:

$$A_1 S + B_2 X =$$

$$\left[\frac{1 - A_2 + A_2 B_1 - A_1 B_2 - A_2 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_2 B_2} \frac{(B_1 S + B_2 X)}{(A_1 S + A_2 X)} + \frac{1}{A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_2 B_2} \right] \Phi \quad (14)$$

Donde,

$$\Phi = \frac{1 - A_2 + A_2 B_1 - A_1 B_2 - A_2 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_2 B_2}$$

Una gráfica de S vs. X puede obtenerse resolviendo la ecuación implícita (14), para observar la estabilidad del sistema. Sin embargo, su resolución resultaría tan engorrosa y extremadamente demorada como la su integración analítica.

La estabilidad para un sistema como el de interés puede también determinarse, en el plano de fase, a partir de los coeficientes de la ecuaciones así:

Si, para $d = (A_1 - B_2)^2 + 4 A_2 B_1,$

$$d > 0:$$

Nodo: si $A_2 B_1 - A_1 B_2 < 0;$

Estable si $A_1 + B_2 < 0$

Inestable si $A_1 + B_2 > 0$

Silla: si $A_2 B_1 - A_1 B_2 > 0$

$$d < 0:$$

Centro: si $A_1 + B_2 = 0$

Foco: si $A_1 + B_2 = 0$

Estable si $A_1 + B_2 < 0$

Inestable si $A_1 + B_2 > 0$

Para el presente caso $D = -0,5333 (<0)$, y $A_1 + B_2 = -2,2208 (<0)$, luego se trata de un nodo estable como el mostrado en la Figura 6.

Volviendo a la ecuación [11], si tenemos perturbaciones externas al sistema, es decir, si S_0 , XR o r son diferentes de cero (constantes o funciones del tiempo), podemos analizar el comportamiento del sistema para diferentes variaciones de cada una de ellas. Dichas variaciones se convierten en las entradas del sistema y la respuesta a ellas en las salidas. Tales variaciones se consideran en la sección siguiente.

RESPUESTA DEL SISTEMA A ENTRADAS TÍPICAS

Si consideramos el sistema descrito por la ecuación (11):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \quad (11)$$

entonces el vector de funciones forzantes $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ corresponderá a variaciones en S_0 , XR y r con el tiempo.

Para el análisis es conveniente tener en cuenta variaciones típicas tales como la función escalón, impulso, rampa, seno, etc. Aquí se señalan sólo las respuestas del sistema a algunas de estas entradas.

En las Figuras 7 a 12 se muestran las respuestas a distintas perturbaciones en los valores de estado estacionario de las variables de entrada. En todas ellas se notó el retorno al estable estable original o a un nuevo estado estacionario. Sólo se han considerado los casos más representativos.

NOMENCLATURA

L =	longitud, M = masa, t = tiempo.
D	Velocidad de dilución [t ⁻¹].
F	Alimento fresco que ingresa al sistema reactor separador [L ³ /t].
FA	Flujo effluente del tanque de mezcla perfecta [L ³ /t].
FE	Flujo de nutriente agotado effluente del separador [L ³ /t].
FP	Flujo de biomasa effluente del separador [L ³ /t].
K _s	Constante de saturación de Monod [M/L ³].
r	Fracción recirculada [adimensional].
S	Concentración de sustrato en el tanque de mezcla perfecta [M/L ³].

t	tiempo [t].
V	Volúmen del biorreactor [L^3].
X	Concentración de biomasa en el efluente y en el tanque de mezcla perfecta [M/L^3].
X_E	Concentración de biomasa nutriente agotado efluente del separador [M/L^3].
X_R	Concentración de biomasa en la fracción recirculada [M/L^3].
Y_s	
Y_{xs}	Coefficiente de rendimiento de biomasa con respecto a sustrato [M/M].

Letras griegas.

β	Parámetro definido por la ecuación (2) [adimensional]
μ	Velocidad específica de crecimiento microbiano [t^{-1}].
$\mu_{máx}$	Velocidad específica máxima de crecimiento microbiano [t^{-1}].
τ	Tiempo de residencia [t].
λ_i	Eigenvalor i .

Subíndices

0	Valor inicial.
1..n	Coefficiente n de las ecuaciones linealizadas [9] y [10]

Superíndices

p	Variable de perturbación.
-----	---------------------------

ABSTRACT

The CSTR Bioreactor performance is analyzed in stationary and transient state. Kinetic parameters were taken from experimental data obtained in a batch reactor.

BIBLIOGRAFIA

1. BAILEY, J.E. y OLLIS, D. Biochemical engineering fundamentals. McGraw Hill, Nueva York. 1977. 753 p.
2. FRAUENTHAL, James y SWICK, Kenneth. Stability of biochemical reaction tanks. Comput. Math. Appl. Vol. 9, No. 3. 1983. pp 499 - 506.
3. HIMMELBLAU, D.M. y BISCHOFF, K.B. Process analysis and simulation: Deterministic systems. Wiley, Nueva York. 1968.
4. MACFARLANE, A.G.J. Dynamical system models. Harrap, London. 1970. 504 p.
5. MARIN, J.E. Producción de proteínas unicelular a partir de Candida utilis var. Santander. Tesis Magister. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander; 1987. 217 p.
6. QUINTERO, Rodolfo. Ingeniería bioquímica. Reverté, México.
7. WANG, D. y otros. Fermentation and enzyme technology. Wiley, Nueva York. 1979.

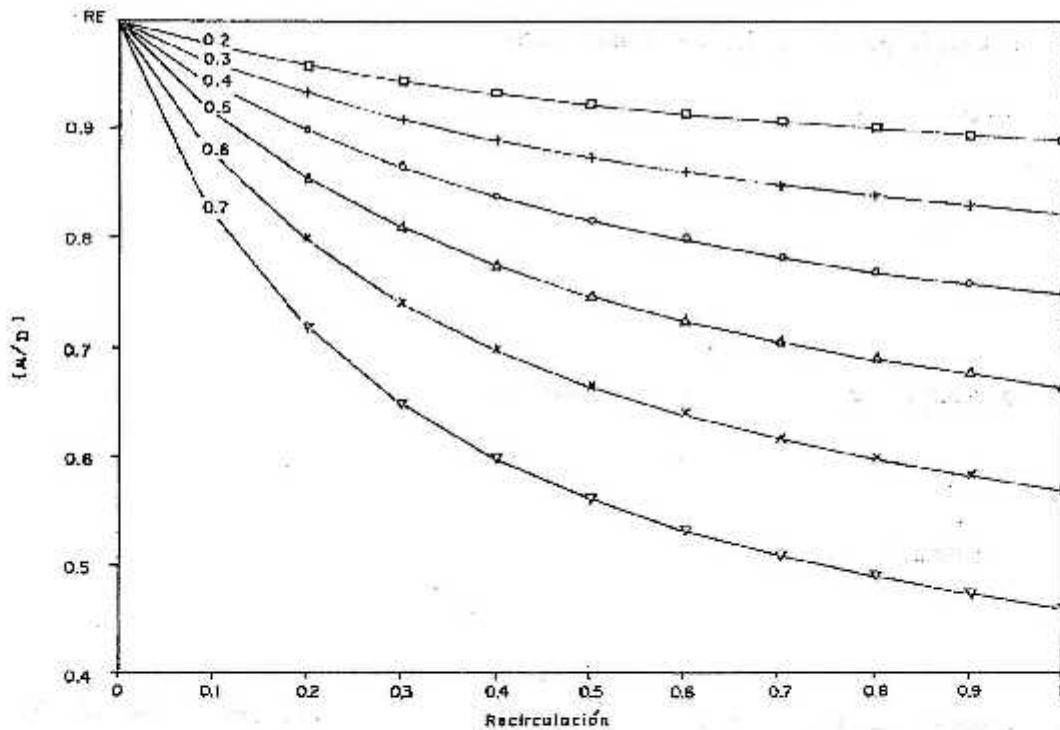


FIGURA 2. Efecto de la recirculación. (FE/F como parámetro)

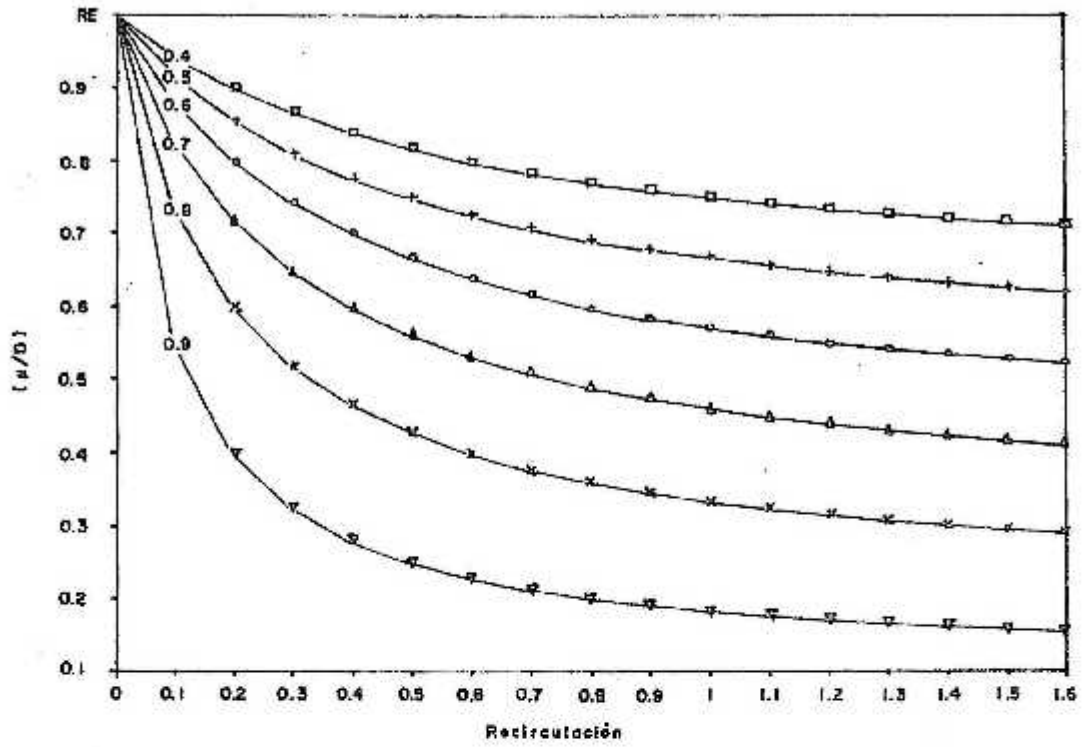


FIGURA 3. Variación de β con r .

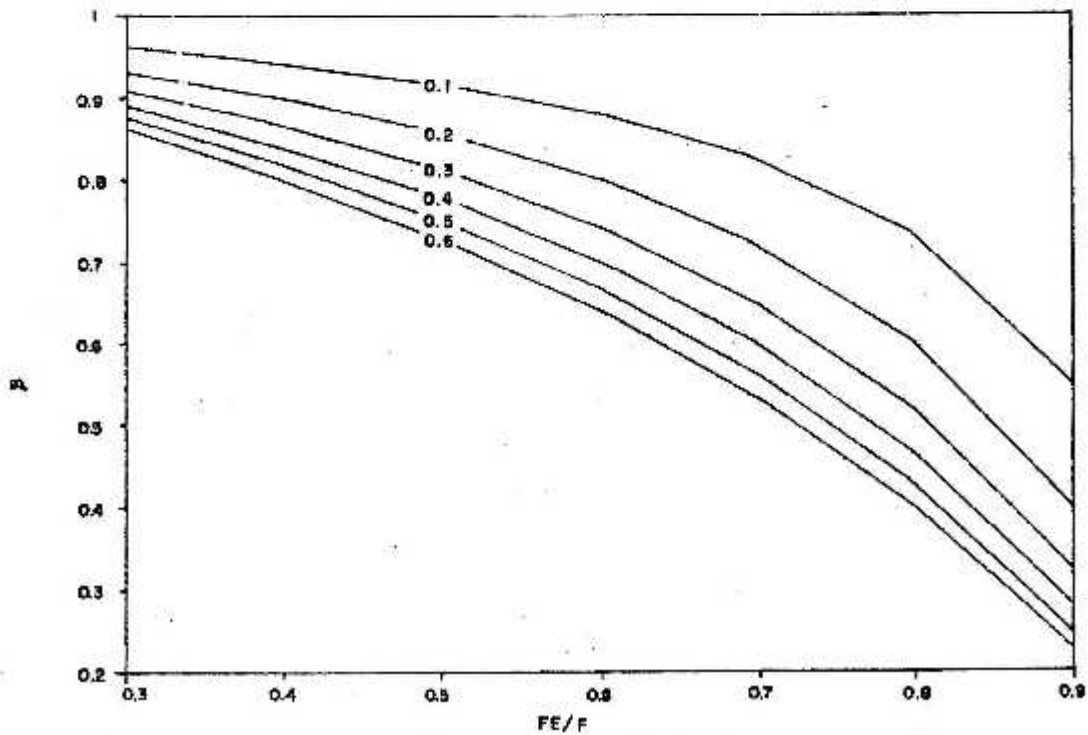


FIGURA 4. Variación de β con FE/F . (r como parámetro)

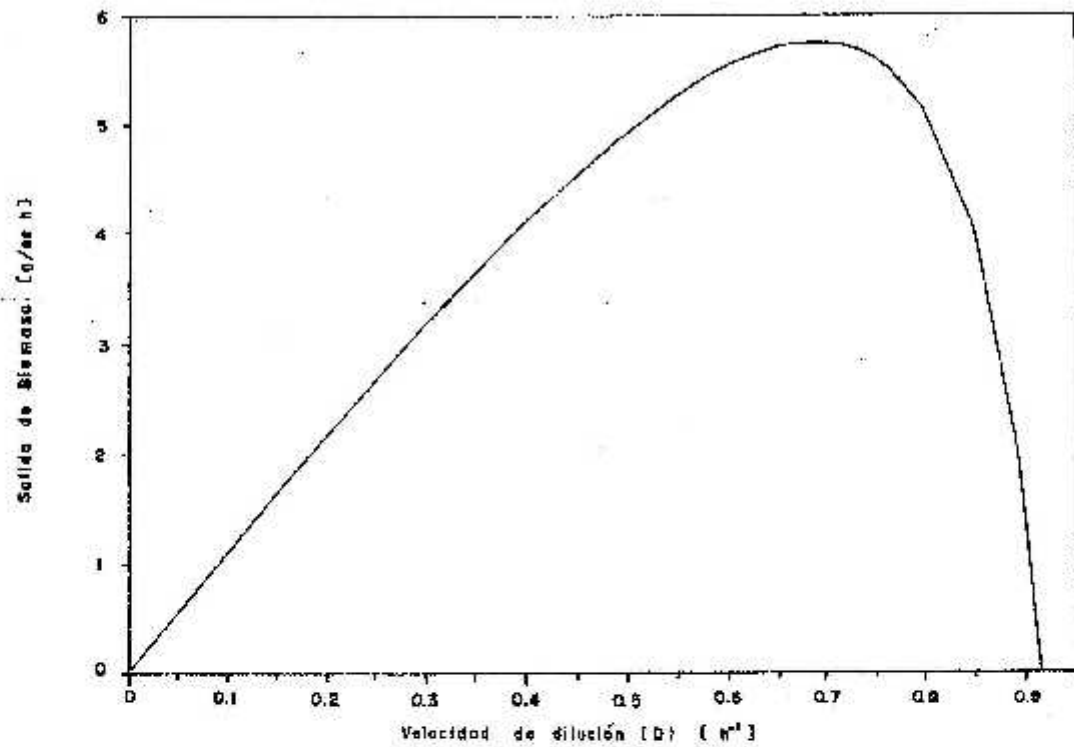


FIGURA 5. Salida de biomasa vs. D.

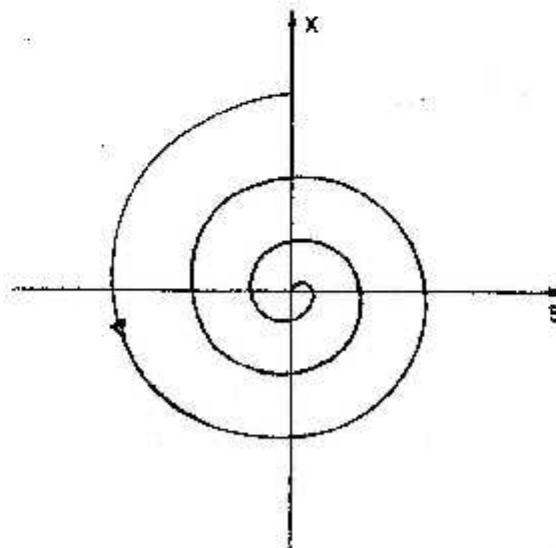


FIGURA 6

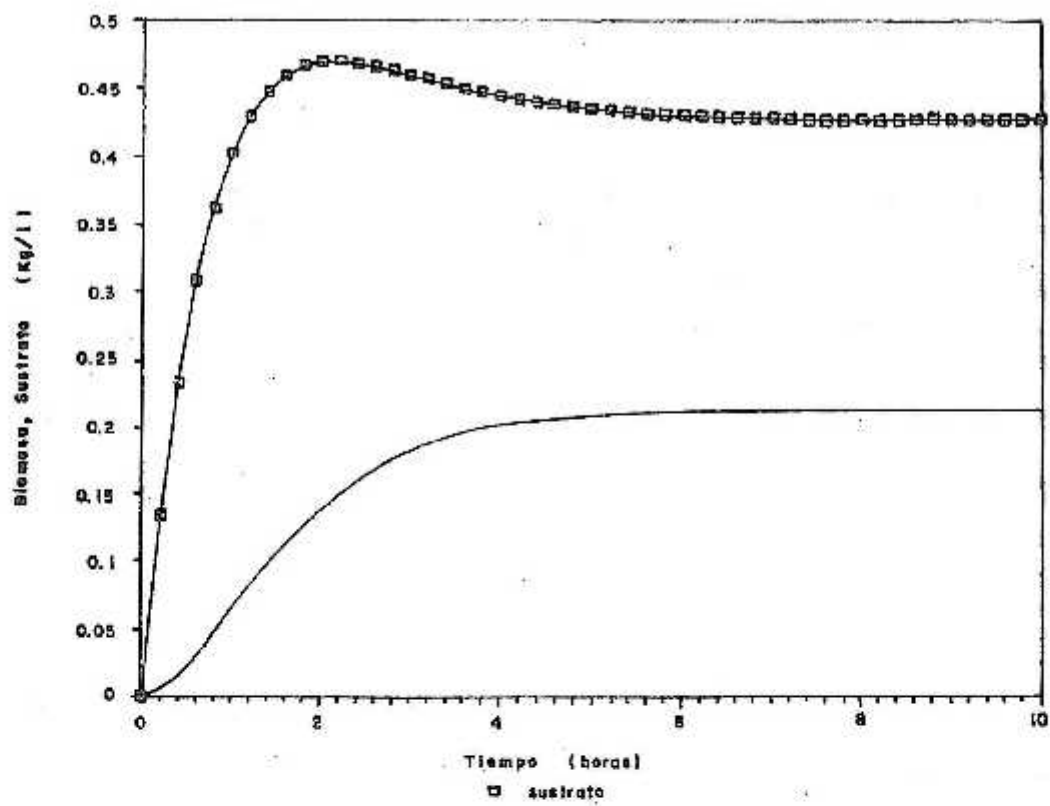


FIGURA 7. Escalón en concentración inicial de S. (en el tiempo $T=0$)

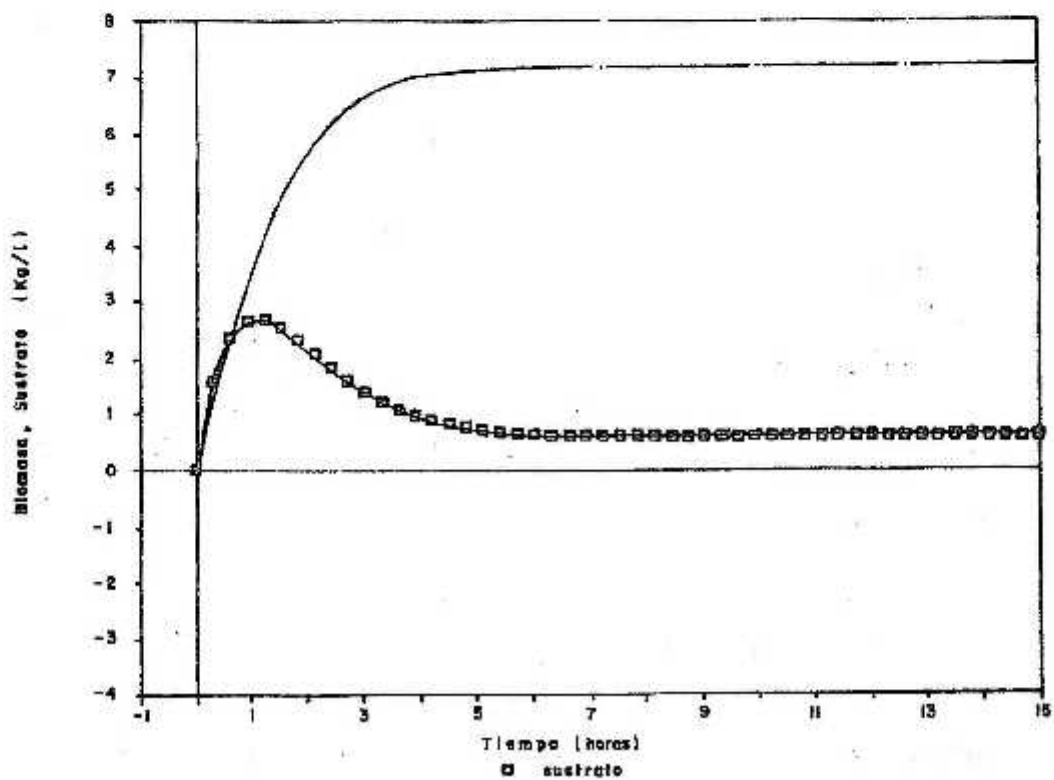


FIGURA 8. Escalón (-) en tiempo de residencia. (en el tiempo $T=0$)

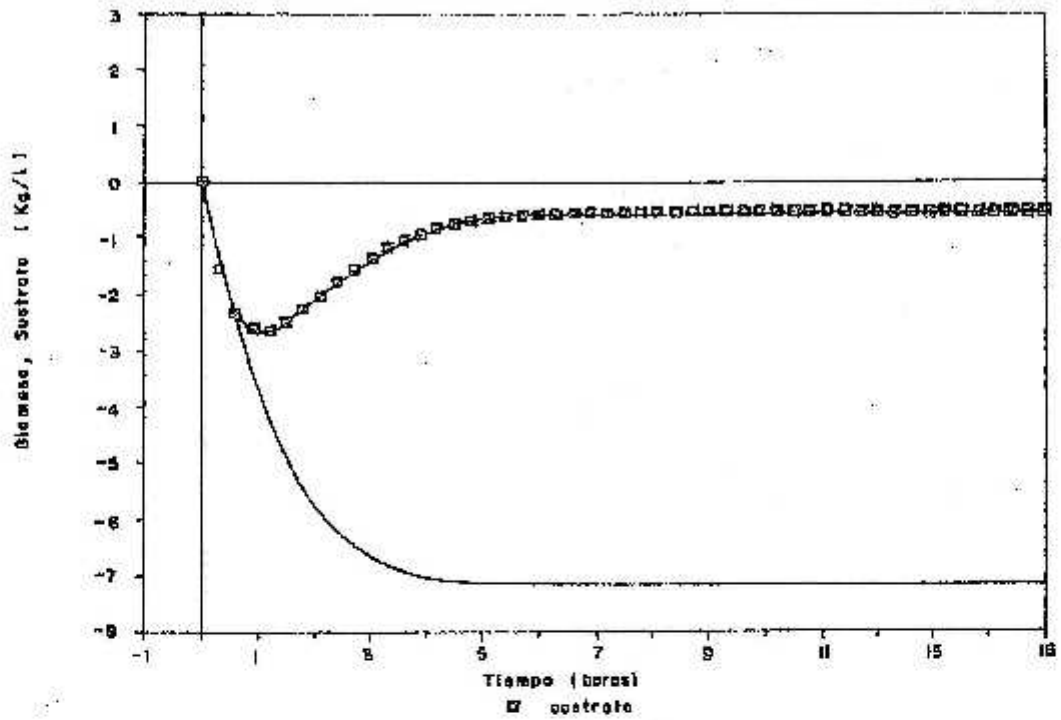


FIGURA 9. Escalón (+) en tiempo de residencia. (en el tiempo $T=0$)

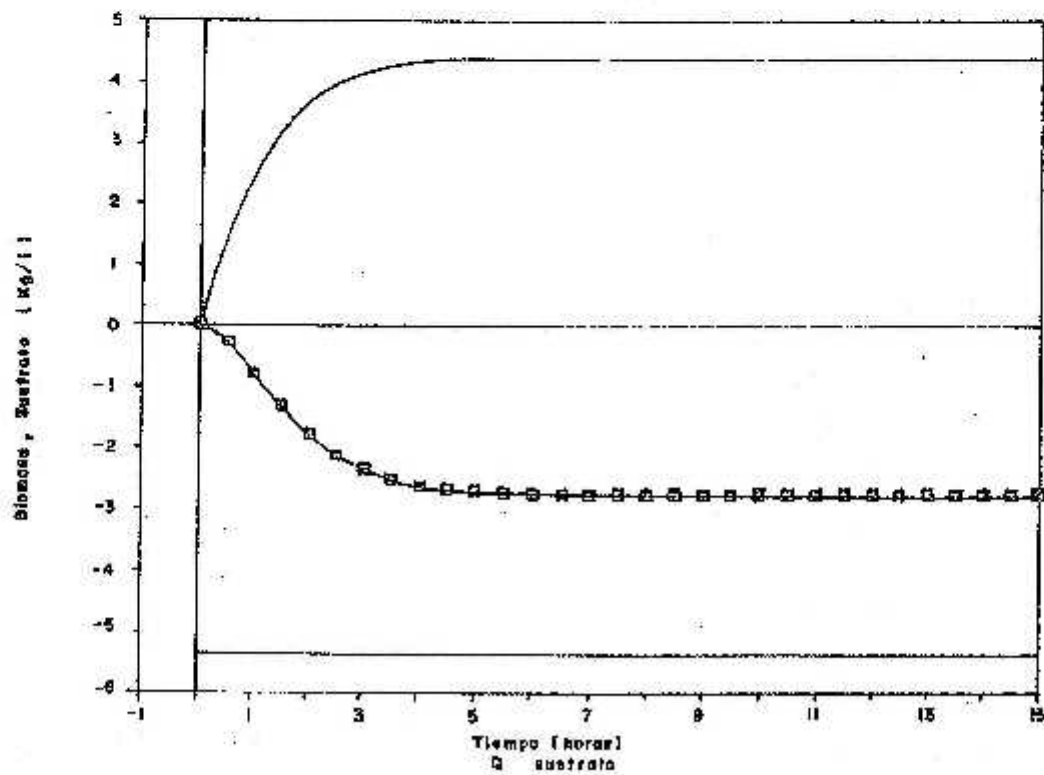


FIGURA 10. Entrada escalón en la recirculación. (en el tiempo $T=0$)

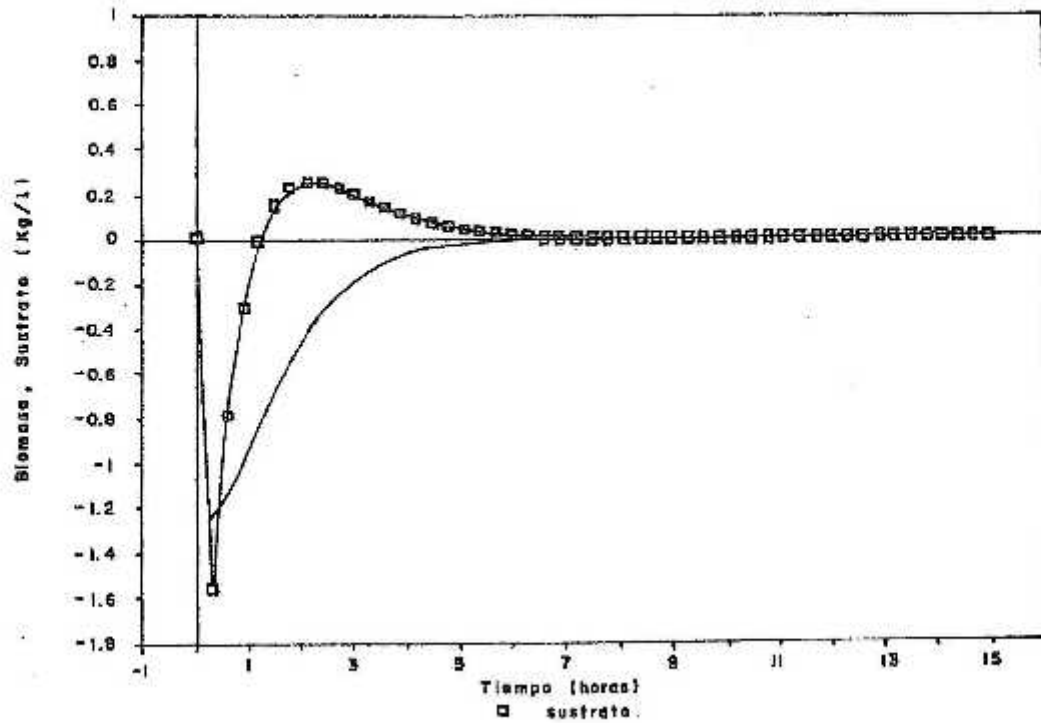


FIGURA 11. Entrada impulso en tiempo de residencia. (en el tiempo $T=0$)

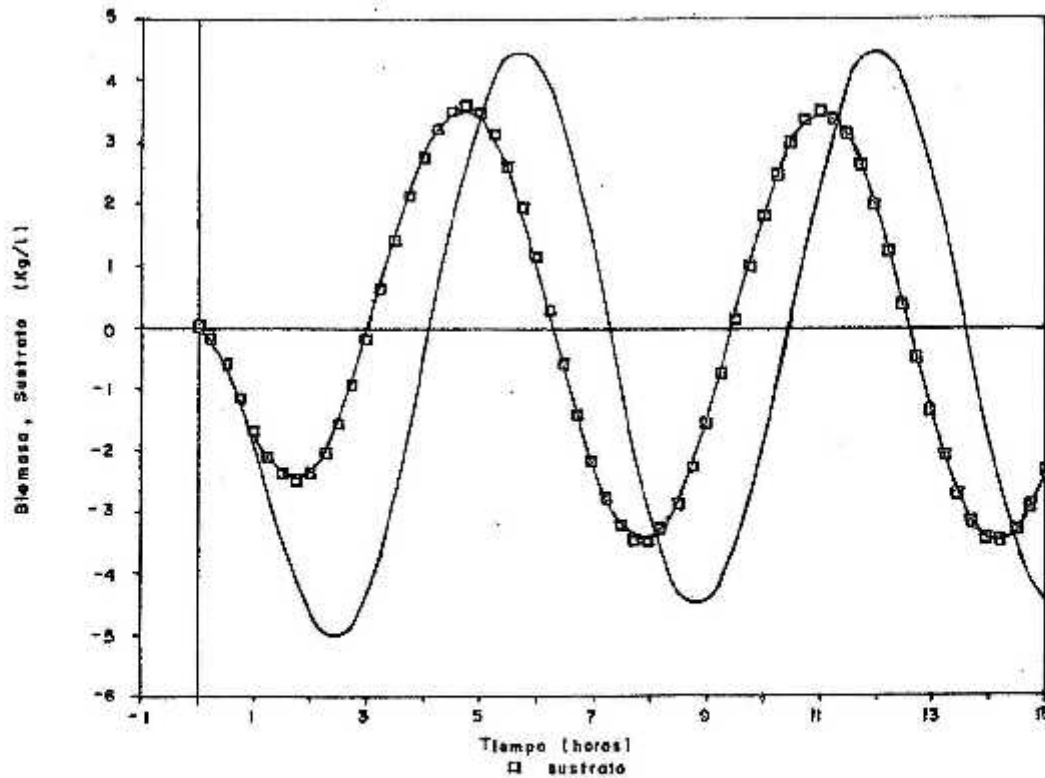


FIGURA 12. Respuesta de frecuencia del sistema. (Variación con el tiempo de residencia).