

# MODELO ANALÍTICO PARA EL ESTUDIO DE LA TORSIÓN EN ROTORES FLEXIBLES

---

**HELLER G. SÁNCHEZ A.**

*Dr. en Ingeniería Mecánica, Aplicada y Computacional  
Universidad Industrial de Santander  
hgsanche@uis.edu.co*

*Fecha de Recibido: 31/03/2010  
Fecha de Aprobación: 26/05/2010*

## RESUMEN

Este trabajo de investigación presenta un planteamiento matemático para el análisis dinámico de rotores flexibles. Parte de las expresiones de la energía cinética, potencial y función de disipación de Rayleigh generadas para un disco mediante el Método de los Elementos Finitos. Luego, integrando a lo largo de la longitud del elemento, se obtienen las expresiones para un elemento de rotor. Aplicando las ecuaciones de Lagrange se deducen las ecuaciones de movimiento del sistema.

La modelización matemática se realiza para las componentes principales: los apoyos, elementos no necesariamente rígidos que se denominan “estáticos” aún cuando están sujetos a vibraciones, y la parte rotativa. Las dos partes requieren de técnicas distintas de simulación dinámica, lo cual hace necesario aplicar, en este caso, las conocidas “Técnicas de Síntesis de Componentes” para aprovechar los resultados obtenidos de la simulación independiente de cada parte. La interacción entre la parte “estática” y la parte rotativa, a través de los apoyos, genera unos esfuerzos de acción reacción, mediante los cuales es posible acoplar los sistemas de ecuaciones de las dos partes.

El modelo matemático desarrollado, calcula los parámetros modales y la respuesta en el estado estacionario y transitorio, teniendo en cuenta, o no, el propio peso, la no linealidad en los apoyos y principalmente la flexibilidad a torsión del rotor. El sistema de ecuaciones se linealiza a través del método iterativo de Newton Raphson y las ecuaciones se integran utilizando el método de Newmark.

**PALABRAS CLAVE:** Dinámica de rotores flexibles, síntesis de componentes, no-linealidad, flexibilidad a torsión.

## ABSTRACT

This job shows a mathematical formulation in order to study the torsional behavior in a flexible rotor. The model starts calculating kinetic energy, potential energy and the Rayleigh dissipation function. From both, energy expressions and by means of the Finite Element Method, get the finite element of a single disk. Integrating it, we can get the expression to the rotor element. Using the Lagrange Equations is possible deduce the equations system of movement in order to study the rotors dynamic including torsional behavior.

The mathematical model has into account the main components of the system: First, the support structure whit its bearings, and secondly the rotative part. Both of them are modeled using different analytical technics, so it uses the component synthesis in order to introduce the behavior of the support structure where the rotor is grounded. The developed mathematical model calculates both, the model parameters stationary response and resolves the transitory state.

**KEYWORDS:** Flexible rotors, dynamic of rotor, component synthesis, torsional flexibility.

## 1. INTRODUCCIÓN

Para estudiar el comportamiento dinámico de las máquinas rotativas en general se hace necesario abordar el análisis de los rotores flexibles. Así lo corroboran múltiples trabajos de investigación, la mayor parte dedicados al estudio de los rotores que giran a grandes velocidades, aportando al desarrollo de la capacidad de descripción de la respuesta dinámica de sistemas rotativos a los que se les han estudiado las ecuaciones fundamentales del movimiento, así como sus condiciones de contorno.

Diferentes métodos matemáticos han sido utilizados para abordar el análisis dinámico de rotores flexibles, entre estos se encuentran el Método de la Matriz de Transferencia [1] y el Método de los Elementos Finitos (MEF) [2] [3], este último es el empleado en el presente trabajo.

El MEF nació como un método de cálculo de estructuras y no tardó en ser aplicado a problemas de naturaleza distinta, suponiendo un gran adelanto en el análisis de fenómenos físicos, entre ellos la dinámica de rotores flexibles. Ésta fue estudiada, inicialmente, a través de elementos compuestos por vigas a flexión y discos rígidos y posteriormente empleando elementos más complejos.

Los rotores flexibles tienen diferentes fenómenos dinámicos propios de su funcionamiento y configuración; muchos de ellos han sido introducidos en el presente modelo, entre los cuales se encuentra el efecto giroscópico estudiado por Green [4] y Ditemberg [5], y el esfuerzo cortante que fue introducido en estos modelos por Timoshenko; la inercia rotatoria y diametral de igual manera fueron ampliamente estudiadas. Otros parámetros importantes tenidos en cuenta por algunos investigadores y considerados aquí son las cargas

axiales, el peso, el amortiguamiento interno y los errores de montaje como excentricidades o desalineamientos, que dan lugar a la aparición de fuerzas variables en el tiempo a consecuencia de la rotación.

La torsión en rotores ha sido ampliamente estudiada por muchos investigadores, dedicados a plantear modelos analíticos y procesos experimentales con el objetivo de predecir el comportamiento dinámico de un rotor expuesto a este tipo de cargas. Así lo demuestran, con sus trabajos, investigadores como Dimarogonas y G. Massouros [6], y S. A. Paipetis [7], entre otros.

## 2. TÉCNICAS DE SÍNTESIS DE COMPONENTES

Para la mejor comprensión del presente trabajo, se hace necesario iniciar haciendo especial mención a las denominadas “Técnicas de Síntesis de Componentes”, habida cuenta de la complejidad que conlleva desarrollar un modelo analítico de estas características.

La modelización matemática en el presente trabajo, se realiza para los componentes principales: apoyos, elementos no necesariamente rígidos, que se denominan “estáticos” aún cuando están sujetos a vibraciones, y elementos “rotativos” [8], ver Figura 1. Estos últimos presentan una problemática diferente que conduce a la utilización de técnicas distintas para la simulación dinámica. Un análisis conjunto resultaría complejo [9].

Las técnicas de “Síntesis de Componentes” [10] permiten aprovechar los resultados obtenidos de la modelización independiente de ambos problemas, caracterizando la parte “estática”, que puede considerarse lineal, a través de sus parámetros modales obtenidos en el análisis modal experimental, para incluirla después en el modelo de la parte rotativa. Con esto se reduce la complejidad y el tamaño del problema dinámico.

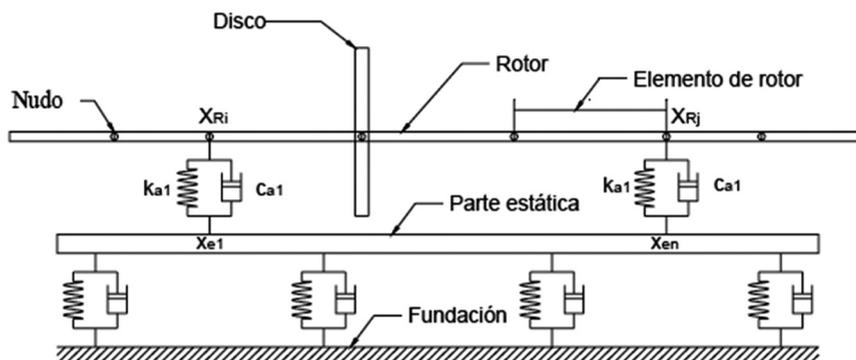


Figura 1. Representación simbólica del rotor y su acoplamiento a la estructura.

### 3. PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO

El sistema se ha modelizado dividiendo el rotor en dos tipos de elementos. El primero, denominado “elemento rotor”, define la geometría del mismo a través de su longitud, su diámetro inicial y su diámetro final, aporta rigidez, masa, inercia y amortiguamiento al sistema. Estos elementos vienen definidos por un par de nudos, cada uno de ellos cuenta con cinco grados de libertad (gdl), dos desplazamientos y dos giros, un quinto grado de libertad es introducido para el análisis del sistema a torsión variable. En cada uno de los nudos, anteriormente nombrados, se puede ubicar un disco, que aporta masa e inercia al sistema, o un apoyo que introduce unos esfuerzos como resultado de la interacción entre el rotor y la parte “estática”.

Se han deducido en primer lugar, las ecuaciones del equilibrio dinámico correspondientes al modelo completo, iniciando con las ecuaciones de movimiento asociadas al rotor mediante la aplicación del MEF [11]. Posteriormente, se han planteado las propias de la parte “estática” expresada en función de los parámetros modales. Por último, la modelización matemática desarrollada con los apoyos facilitó la expresión de los esfuerzos que se introducen en el sistema completo “rotor-apoyo-parte estática” [10]. De esta forma, el acoplamiento del sistema de ecuaciones, -parte “estática” y rotor- se ha llevado a cabo a través de los esfuerzos de acción reacción presentes en los apoyos del rotor.

Dos sistemas de coordenadas han sido empleados para el planteamiento de las ecuaciones de movimiento del sistema, uno fijo y otro solidario a la sección. Se han obtenido las expresiones de la energía cinética, energía potencial y de la función de disipación del sistema en base a las coordenadas generalizadas para aplicar posteriormente las Ecuaciones de Lagrange.

Se han considerado cinco grados de libertad por cada nudo: dos desplazamientos (V, W) y dos giros (B, C), que determinan el centro geométrico de la sección y su orientación, y por último el grado de libertad ( $\theta$ ), que hace referencia a la flexibilidad a torsión del rotor, ver Figura 2. Las expresiones de la energía cinética y potencial del elemento rotor se han deducido interpolando los desplazamientos y velocidades para cualquier sección, en función de los valores de los nudos extremos. Estas funciones de interpolación han sido obtenidas a través de la Teoría de la Viga de Timoshenko.

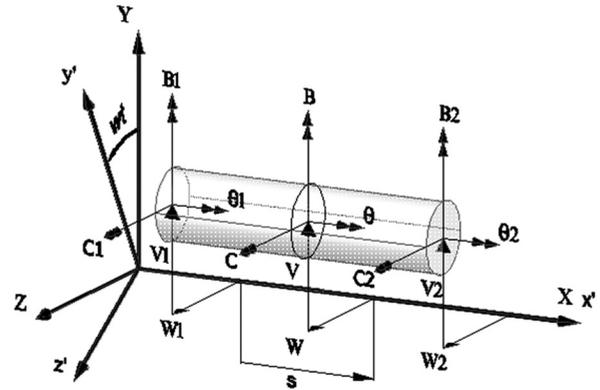


Figura 2. Grados de libertad del “elemento rotor”.

La expresión de la energía cinética se ha obtenido planteando, inicialmente, la energía de un disco. Posteriormente, integrando en la longitud del elemento mediante la aplicación de las funciones de interpolación, [11], para obtener la expresión de la energía cinética del elemento, mostradas en el ecuación 1 y 2 respectivamente.

$$T_{disco} = \frac{1}{2} \{q\}^T [M]^d \{q\} + \frac{1}{2} I_p \theta^2 - \theta \{q\}^T [H]^d \{q\} + \theta \{q\}^T \{V\}^d \quad (1)$$

$$T_{elemento} = \frac{1}{2} \{q\}^T [M] \{q\} + \frac{1}{2} I_p \theta^2 - \theta \{q\}^T [H] \{q\} + \theta \{q\}^T \{V\} \quad (2)$$

Donde  $\{q\}$  son las coordenadas generalizadas,  $[M]$  la matriz de inercia,  $\{V\}$  el vector de descentramientos y  $[H]$  es una matriz que posteriormente dará lugar a la “matriz giroscópica”; también están presentes los momentos de inercia polar y diametral del disco. Los súper índices d y e corresponden a las expresiones referidas a un disco y un “elemento rotor” respectivamente.

En este proceso se puede resaltar la aparición de la expresión para las fuerzas generalizadas al considerar que el centro de gravedad de una sección cualquiera no tienen porqué coincidir con el centro de giro del rotor.

La energía potencial del rotor se ha obtenido como la suma de la debida al momento flector ( $U_R$ ), al esfuerzo cortante ( $U_p$ ) y la carga axial ( $U_A$ ) como se expresa en la

ecuación 3; donde queda representada la rigidez debida al momento flector, más el esfuerzo cortante, como  $[K]$  y la asociada a la carga axial  $[A]$ .

$$U_R + U_T + U_A = \frac{1}{2} \{q\}^T [[K] + [A]] \{q\} \quad (3)$$

Otra consideración importante son las fuerzas gravitatorias, las cuales afectan la expresión de la energía potencial, agregando al sistema la ecuación 4.

$$U = \{q\}^T \{P\} + \int_0^L m_e g (J \sin \theta + k \sin \theta) ds \quad (4)$$

Las expresiones del amortiguamiento tanto interno, producido en los elementos del rotor, como externo, que son introducidos por los apoyos y elementos del rotor, han sido obtenidas a través de la función de disipación de Rayleigh, donde se tienen en cuenta las coordenadas móviles y las matrices de amortiguamiento externo e interno, suponiendo esta última proporcional.

Para introducir en el sistema la flexibilidad a torsión del rotor, que corresponde a introducir un valor de la coordenada  $\theta$  diferente en cada nudo, se ha iniciado con la introducción de una fila y una columna en la matriz de funciones de interpolación a partir del caso con 4 gdl en cada nudo, que corresponden a las funciones de interpolación lineal de esta coordenada. Se han aplicado las ecuaciones de Lagrange, lo cual conllevó a derivar las expresiones de la energía cinética, energía potencial y la función de disipación de Rayleigh con respecto a cada uno de los  $\theta_i$  presentes, y añadir estas ecuaciones al sistema como vectores fila y vectores columna en la matriz de masas y en la matriz giroscópica solo vectores fila. Desde la ecuación 5 hasta la ecuación 7, se muestra un ejemplo de las expresiones que resultan al aplicar las ecuaciones de Lagrange respecto de las coordenadas  $\theta_i$  para un rotor de dos elementos y tres nodos.

Para  $\theta_1$ :

$$-\{q\}^T [H1] \{q\} - \{q\}^T [H1] \{q\} + \{q\}^T \{V1\} + \theta_1 \{q\}^T \{V1\} \quad (5)$$

Para  $\theta_2$ :

$$-\{q\}^T [H2] \{q\} - \{q\}^T [H2] \{q\} + \{q\}^T \{V1\} + \theta_1 \{q\}^T \{V2\} - \{q\}^T [H3] \{q\} - \{q\}^T [H3] \{q\} + \{q\}^T \{V3\} + \theta_1 \{q\}^T \{V3\}$$

Para  $\theta_3$ :

$$-\{q\}^T [H4] \{q\} - \{q\}^T [H4] \{q\} + \{q\}^T \{V4\} + \theta_1 \{q\}^T \{V4\} \quad (7)$$

Las expresiones anteriores se ensamblan en el sistema global de ecuaciones.

Añadiendo por último el propio peso, resulta un sistema de ecuaciones donde  $[G]$  y  $[R]$  se pueden encontrar en [8] y, para un rotor de sección circular, la expresión matricial se resume en la ecuación 8.

$$\begin{bmatrix} [M] & \{-[H]q\} + \{V\} \\ \{-[H]\{q\} + \{V\}\}^T & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta[G] + [C_e] + [R][C_i][R]^T & 0 \\ \{-[H]\{q\}\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] + [R][C_i][R]^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta^2 \{V\} \\ PAR \end{Bmatrix} - \{P\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ PAR \end{Bmatrix} - \{P\} \quad (8)$$

De forma resumida se puede escribir el sistema matricial de la parte rotativa como sigue:

$$[M_R] \{\dot{x}_R\} + [C_R] \{\dot{x}_R\} + [G_R] \{\dot{x}_R\} + [K_R] \{x_R\} = \{F_{Ri}\} + \{F_{Re}\} \quad (9)$$

Siendo  $[M_R]$  la matriz de inercia,  $[C_R]$  la matriz de amortiguamiento,  $[G_R]$  la matriz giroscópica,  $[K_R]$  la matriz de rigidez,  $\{X_R\}$  el vector de coordenadas de los nudos del rotor y  $\{F_R\}$  las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Para la parte “estática” se plantean las ecuaciones en función de los parámetros modales obtenidos a través del análisis modal experimental, ecuación 10, que tiene en cuenta la masa, el amortiguamiento, la rigidez, el vector de coordenadas modales  $\{\eta_e\}$ , la matriz de modos de la parte “estática”  $[\Phi]$  y las fuerzas que actúan sobre la misma, tanto internas como externas.

$$[m_e] \{\ddot{\eta}_e\} + [c_e] \{\dot{\eta}_e\} + [k_e] \{\eta_e\} = [\Phi]^T \{f_{ei}\} + [\Phi]^T \{f_{ee}\} \quad (10)$$

Finalmente, los apoyos introducen unos esfuerzos no lineales, producto de la interacción “rotor - apoyos - parte estática” y su valor será función del movimiento relativo entre las partes “rotativa y estática” [10].

Una vez caracterizada la parte estática, a través de sus parámetros modales, y la parte rotativa, mediante al MEF, ecuación 9 y 10, respectivamente, donde los vectores de fuerza corresponden a la suma de fuerzas interiores y exteriores tanto para la ecuación de la parte “estática” como para la del rotor, se aplica la técnica de síntesis de componentes a través de las fuerzas de acción - reacción en los apoyos, cuyo valor es igual pero de sentido contrario, ecuación 11. Donde “Fa” es una función dependiente de las incógnitas.

$$\{f_{Ri}\} = -\{f_{ei}\} = \{F_a(x_R, \eta_e, \dot{x}_R, \dot{\eta}_e)\} \quad (11)$$

El sistema de ecuaciones global, queda resumido como se presenta en la ecuación 12. Los subíndices AA, AB, BA y BB, mostrados en el sistema, para algunas matrices, están relacionados con los grados de libertad que no son directamente influenciados por un apoyo (para el caso “AA”); por otra parte, los grados de libertad que son afectados directamente por un apoyo, y las matrices con las que interactúan, emplean el subíndice (BB), esto quiere decir que en el nodo se encuentra ubicado un apoyo.

$$\begin{bmatrix} [M_R] & [0] & \{-[H]\{q\} + \{V\}^T\} & \{0\} \\ [0] & [m_e] & \{0\} & \{\dot{\eta}\} \\ \{-[H]\{q\} + \{V\}^T\} & \{0\}^T & I_p & \{\theta\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}R_{BB} + CR_{BB} & \bar{G}R_{BA} + CR_{BA} & [0] & \{0\} \\ \bar{G}R_{AB} + CR_{AB} & \bar{G}R_{AA} + CR_{AA} + [C_a] & -[C_a][\Phi] & \{0\} \\ [0] & -[\Phi]^T [C_a] & [C_a] + [\Phi]^T [C_a][\Phi] & \{0\} \\ -\{[H]\{q\}\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_A\} \\ \{q_B\} \\ \{\eta_e\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}R_{BB} & \bar{K}R_{BA} & [0] & \{0\} \\ \bar{K}R_{AB} & \bar{K}R_{AA} + [k_a] & -[k_a][\Phi] & \{0\} \\ [0] & -[\Phi]^T [k_a] & [k_a] + [\Phi]^T [k_a][\Phi] & \{0\} \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_A\} \\ \{q_B\} \\ \{\eta_e\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}R_{Be} \\ \mathcal{F}R_{Ae} \\ [\Phi]^T \{f_{ee}\} \\ PAR \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\theta^2 \{V\} \\ [\Phi]^T \{f_{ee}\} \\ PAR \end{Bmatrix} - \{P\} \quad (12)$$

De este sistema matricial es de gran interés resaltar que, “[Ca] y [Ka]” son matrices banda correspondientes al amortiguamiento y rigidez de los apoyos.

#### 4. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

El sistema se resuelve bajo tres hipótesis. En primer lugar planteando un problema de vibraciones libres, en el que se suponen nulas las fuerzas que actúan sobre el sistema y que constituye un problema de valores y vectores propios: considerando apoyos lineales se plantea la solución del sistema de ecuaciones del sistema del que se obtiene como resultado valores complejos. Segundo, se plantea el problema de vibraciones forzadas con fuerzas armónicas, consecuencia de descentramientos y desalineamientos del rotor: constituye el análisis en régimen estacionario y se resuelve para dos supuestos -apoyos lineales y no lineales- [10]. Por último, y como complemento a lo expuesto en el presente artículo, se ha planteado la presencia de fuerzas variables en el tiempo actuando sobre el sistema: esto conlleva a obtener la respuesta en régimen transitorio, integrando las ecuaciones de movimiento en el tiempo. Existen diferentes métodos de integración numérica, donde el método de Newmark ecuación 13, es el utilizado en el presente trabajo; así mismo, debido a la naturaleza no lineal del sistema, se hace necesario aplicar un método de linealización, para lo cual, se ha empleado el método iterativo de Newton Raphson para linealizarlo.

$$\begin{aligned} \{\dot{x}_{t+\Delta t}\} &= \{\dot{x}_t\} + \{\Delta x\} a_0 \\ \{x_{t+\Delta t}\} &= \{x_t\} + \Delta t \{\dot{x}_t\} + \{\Delta x\} a_1 \\ \{x_{t+\Delta t}\} &= \{x_t\} + \Delta t \{\dot{x}_t\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{x}_t\} + \{\Delta x\} \end{aligned}$$

#### 5. RESULTADOS

El modelo ha sido aplicado bajo el supuesto de apoyos lineales para la solución del problema de valores y vectores propios. Se ha adoptado el supuesto de apoyos no lineales para resolver el problema en el tiempo.

Las aplicaciones realizadas, tienen como base la topología de una bomba vertical, helicocentrífuga, extraíble, monofásica, estudiada ampliamente de forma teórica y experimental por J. M. Pintor [10] y H. G. Sánchez [8]. El modelo analítico desarrollado ha sido validado empleando los resultados experimentales obtenidos por Pintor en [10]. Como conclusión del proceso de validación se afirma que, el modelo desarrollado reproduce de forma fehaciente el sistema real estudiado y que por tanto se ha procedido a realizar los estudios de simulación necesarios de cara al entendimiento y comprensión de la dinámica del sistema rotativo, y particularmente al estudio de la torsión.

En las figuras, de la Figura 3 hasta la Figura 7, se muestra la variación de las frecuencias naturales de vibración, y de los correspondientes amortiguamientos modales, en función de la velocidad de giro variando la rigidez a torsión del rotor. En estos resultados se puede apreciar como, para valores de rigidez a torsión relativamente bajos, los modos de torsión y los primeros de flexión se encuentran entre mezclados. Aumentando la rigidez a torsión, los modos de vibración correspondientes a la torsión se van separando de los modos de flexión. Se puede apreciar en claridad en la Figura 7, como los modos de torsión están claramente diferenciados, y alejados, de los primeros modos de flexión. Lo mismo ocurre para el caso del amortiguamiento, a mayor valor de rigidez a torsión, el amortiguamiento asociado a la torsión se va separando, claramente, de los valores de amortiguamiento asociados a los primeros modos de flexión, situación que es la más común en los sistemas reales.

La variación de la rigidez a torsión se puede justificar mediante el aumento o reducción de la sección del rotor, bajo un proceso de refinación del diseño.

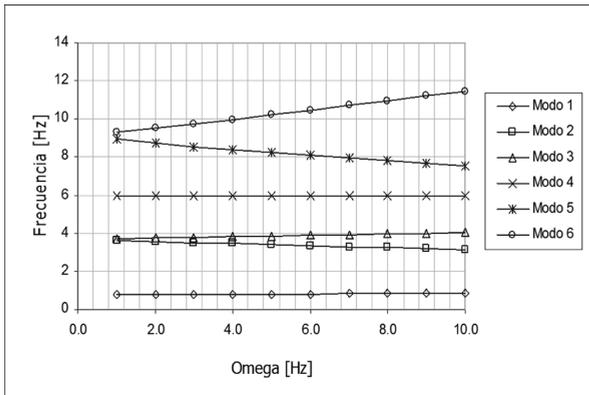


Figura 3. Velocidad de giro vs. Frecuencias naturales; rigidez a torsión de  $1e4$  N/m

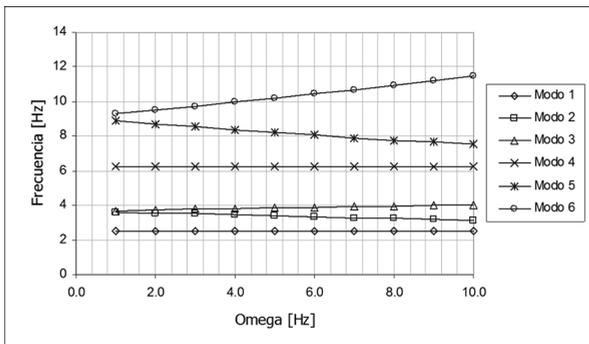


Figura 4. Velocidad de giro vs. Frecuencias naturales; rigidez a torsión de  $1e5$  N/m

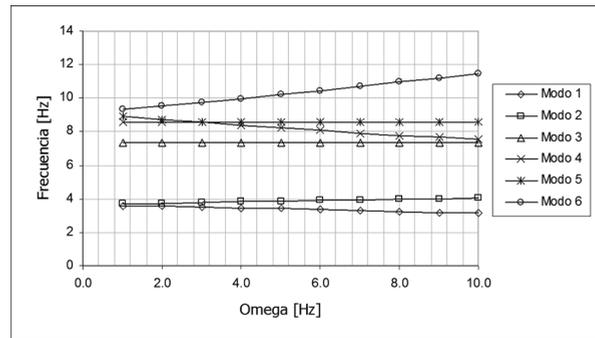


Figura 5. Velocidad de giro vs. Frecuencias naturales; rigidez a torsión de  $1e6$  N/m

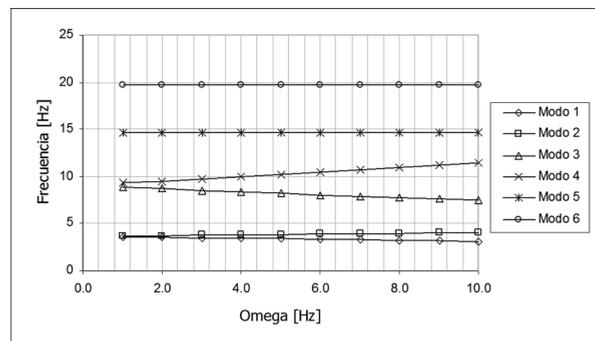


Figura 6. Velocidad de giro vs. Frecuencias naturales; rigidez a torsión de  $1e7$  N/m

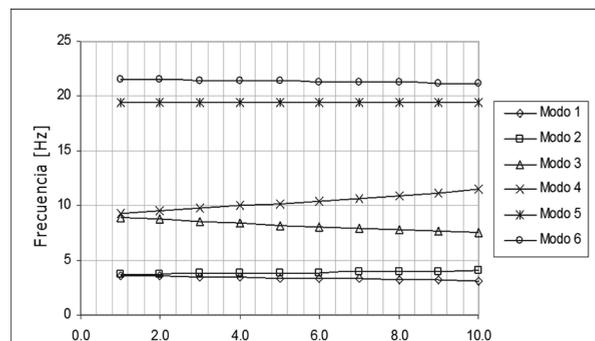


Figura 7. Velocidad de giro vs. Frecuencias naturales; rigidez a torsión de  $1e7$  N/m

Para el caso de los amortiguamientos, tal como se comentó anteriormente, tienen la misma tendencia que las frecuencias naturales. No obstante, es interesante resaltar la dificultad que entraña, en la lectura de los resultados, la presencia de modos de torsión en el rango de frecuencias de los primeros modos de flexión. Tal y como se puede apreciar en la Figura 8, el amortiguamiento modal asociado a los primeros modos de flexión se confunde con los primeros modos

de torsión generando dificultades en la lectura de la gráfica. No obstante, la Figura 9 muestra la situación más común de los sistemas rotodinámicos.

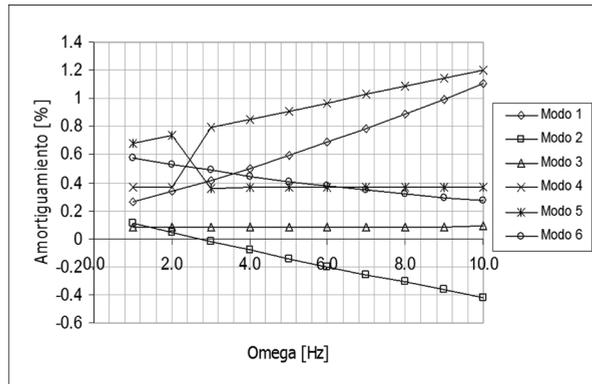


Figura 8. Velocidad de giro vs. Amortiguamiento modal; rigidez a torsión de  $1e6$  N/m

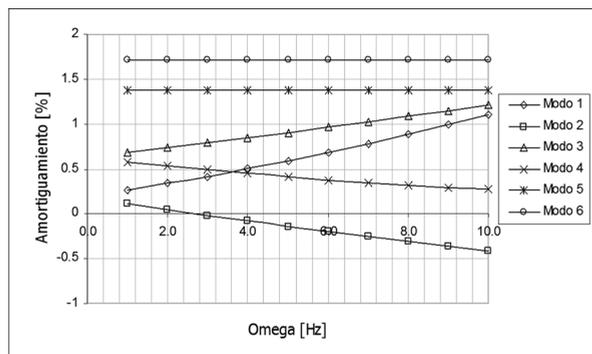


Figura 9. Velocidad de giro vs. Amortiguamiento modal; rigidez a torsión de  $1e8$  N/m

## 6. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo analítico para el análisis dinámico de rotores flexibles, que parte del planteamiento de las ecuaciones de la energía cinética, energía potencial y de la función de disipación.

A partir de un modelo que considera los apoyos de comportamiento no lineal y la estructura soporte no tiene porque ser completamente rígida, desarrollado por el autor, se ha introducido la posibilidad de tener en cuenta la flexibilidad a torsión. Esto se ha logrado agregando un grado de libertad más a cada nudo y desarrollando las expresiones adecuadas de energías, para posteriormente aplicar las Ecuaciones de Lagrange. Finalmente, las ecuaciones, referidas a este grado de libertad, han sido acopladas al sistema global.

Con el modelo se puede obtener los parámetros modales, simular la respuesta en estado estacionario, e inclusive resolver el caso del estado transitorio. El modelo tiene en cuenta el propio peso, la carga axial, la flexibilidad a torsión y la flexibilidad de la parte estática.

La validación del modelo ha sido realizada en este trabajo y en trabajos anteriores, durante el desarrollo del mismo, arrojando resultados adecuados para proceder a la realización de estudios de simulación.

Diferentes pruebas relacionadas con el comportamiento a torsión del sistema rotodinámico han sido desarrolladas y sus resultados han sido mostrados.

## 7. REFERENCIAS

- [1] N. Stephen, On the Vibrations of One Dimensional Periodic Structures. Journal of Sound and Vibrations, Vol. 227, No. 5, 1999, pp. 1133-1142.
- [2] J. Vinyolas, E. Vera, Análisis Dinámico de Rotores Flexibles Mediante el Método de los Elementos Finitos, II Congreso de Ingeniería Mecánica, Sevilla, 1993, pp. 122-128.
- [3] K. Cavalca, An Investigation on the Influence of the supporting structure dynamics of the Rotor System, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 19, No. 1, 2006, pp. 157-174.
- [4] R. Green, Gyroscopic Effects on the Critical Speeds on Flexible Rotors, Trans ASME, Vol.70, 1984, pp. 396-376.
- [5] F. Ditemberg, "Vibrations of Rotating Shafts whit Randomly Varying Internal Damping", Journal of Sound and Vibrations, 2005, pp. 759-765.
- [6] A. D. Dimarogonas and G. Massouros, Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack, "Engineering Fracture Mechanics", 15/3-4, 1980, pp. 439-444.
- [7] A. D. Dimarogonas and S. A. Paipetis, "Analytical methods in rotor dynamics, Applied Science Publishers", first edition, London, 1983.
- [8] H. Sánchez and J. Pintor, "Modelo para la Simulación del Comportamiento Dinámico de Rotores Flexibles con Apoyos no Lineales Situados Sobre una Estructura No Rígida", Anales de la Ingeniería Mecánica, XVI Congreso

Nacional de Ingeniería Mecánica, León, Vol. 4, Diciembre de 2004, pp. 2547 – 2553.

- [9] M. M. Segura and J. T. Celigüeta, Cálculo de Frecuencias Propias Mediante Síntesis Modal con Subestructuras Multinivel. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño de Ingeniería. Vol. 7, No. 2, 1991, pp. 107–121.
- [10] J. M. Pintor Borobia, “Análisis de Comportamiento Dinámico de Bombas Hidráulicas Verticales utilizadas en Plantas de Energía”, [Tesis Doctoral]. Escuela Superior de Ingenieros, San Sebastián, 1993.
- [11] E. Vera, “Estudio Dinámico de Rotores Flexibles”, [Tesis Doctoral]. Universidad de Navarra, S.S. 1998.