

Análisis numérico para el flujo de un ferrofluido en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos

Numerical analysis for the ferrofluid flow in the annular gap between two concentric cylinders

VÍCTOR PEÑA C.

*Ing. Químico Escuela de Ing. Química
Universidad Industrial de Santander
Victorpc72@gmail.com
Bucaramanga, Colombia*

ARLEX CHAVES GUERRERO

*Ph.D Ingeniería Química Profesor Escuela de Ing. Química
Universidad Industrial de Santander.
achavesg@uis.edu.co.
Bucaramanga, Colombia*

DAVID FUENTES DIAZ

*Ph.D Ingeniería Mecánica Profesor Asistente Escuela de Ing. Mecánica
Universidad Industrial de Santander.
dfuentes@uis.edu.co
Bucaramanga, Colombia*

*Fecha de recibido: 14/02/2012
Fecha de aceptado: 15/12/2012*

RESUMEN

En este trabajo se presenta la solución numérica-analítica para el flujo de un ferrofluido en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos e inducido por un campo magnético rotativo. A diferencia de soluciones analíticas presentadas en la literatura, este análisis tiene en cuenta el efecto de los términos $\omega \times \mathbf{M}$ y $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación de magnetización los cuales son comúnmente despreciados con el fin de desacoplar el problema magnético del hidrodinámico y entonces poder obtener una solución analítica. No obstante, se encontró que su efecto es despreciable bajo la suposición de que el vector de magnetización del ferrofluido es proporcional al vector del campo magnético. Los resultados numéricos muestran un buen ajuste con la solución asintótica reportadas por Chaves *et al.* 2010. También se revisa el rango de aplicación de este análisis y otros reportados en la literatura bajo la suposición de proporcionalidad de los vectores de magnetización y campo magnético.

PALABRAS CLAVE: Ferrofluido, Fluido Estructurado, Ferrohidrodinámica.

ABSTRACT

This paper presents a numerical-analytic solution for the flow of a ferrofluid in the annular gap between two concentric cylinders induced by a rotating magnetic field. Unlike analytical solutions presented in the literature, this analysis takes into account the effect of the terms $\omega \times \mathbf{M}$ and $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{M}$ in the magnetization equation which are commonly disregarded in order to decouple the magnetic hydrodynamic problem obtaining in this way an analytical solution. However, it was found that its effect is negligible under the assumption that the magnetization vector of the ferrofluid is proportional to magnetic field vector. The numerical results show a good agreement with the asymptotic solution reported by Chaves *et al.* 2010. We also review the range of application of this analysis and others reported in the literature made under assumption of proportionality of the vectors of magnetization and magnetic field.

KEYWORDS: Ferrofluid, Structured Fluid, Ferrohydrodynamics.

1. INTRODUCCIÓN

Los ferrofluidos son suspensiones coloidales de nanopartículas magnéticas de diámetro entre 10 a 15 nm dispersas en agua o en un hidrocarburo. Típicamente, estas nanopartículas (magnetita) están recubiertas de una capa de surfactante que previene que las partículas se adhieran unas a otras lo que puede llegar a desestabilizar el coloide [1]. En la actualidad estos ferrofluidos son usados en aplicaciones mecánicas, de transferencia de calor, microfluidica y en diferentes aplicaciones biomédicas [2, 3]. Estos fluidos se diferencian de fluidos tradicionales en que responden reológicamente a la presencia de un Campo Magnético (CM) externo ya sea estacionario, rotando o alternando. Como ejemplo de estos comportamientos la literatura menciona el incremento de la viscosidad del ferrofluido en presencia de un CM estacionario [4], el decrecimiento de la viscosidad en CM rotando [5, 6] o alternando, e incluso la generación de flujo como respuesta a un CM rotativo siendo este último el foco de atención de este trabajo [7, 8].

El primer reporte del flujo de un ferrofluido en un contenedor cilíndrico y generado por un campo magnético rotativo (*Spin Up Flow*) fue reportado por Moskowitz y Rosensweig en 1967 [7]. Posteriormente en 1969, Zaitsev y Shliomis [9] propusieron una teoría para explicar el mecanismo generador de flujo que asume que este es producido por la Difusión del Momento Angular Interno (DMAI) de las partículas hacia la matriz del fluido con posterior conversión hacia movimiento macroscópico. El fundamento de esta teoría, se basa en el carácter superparamagnético de las nanopartículas que conforman el ferrofluido. Este hace que las partículas tiendan a alinear su momento magnético en la dirección del campo. El grado de alineación depende de la relación entre fuerzas magnéticas a térmicas o Brownianas de forma tal que a altas intensidades del CM donde las fuerzas magnéticas superan las térmicas, el ferrofluido alcanza su valor de magnetización de saturación. Por lo tanto, cuando el vector del campo magnético (\mathbf{H}) es desplazado de su posición original, se genera inmediatamente un torque ($\mu_o \mathbf{M} \times \mathbf{H}$) que tiende a alinear el momento magnético de la partícula en la dirección del CM. Esta alineación puede llevarse a cabo por dos mecanismos diferentes: *i*) un mecanismo de relajación de Néel en el cual el vector de momento magnético rota dentro de la partícula, y *ii*) por medio de un mecanismo de relajación browniano, mediante el cual el vector de momento magnético se reacomoda por rotación de la partícula en el líquido [10, 11] siendo este mecanismo de relajación importante en

la generación del flujo. Expresiones para los tiempos de relajación browniano y de Néel de las partículas son las siguientes:

$$\tau_B = \left(\frac{3V_h \eta_o}{k_B T} \right), \quad \tau_N = \frac{1}{f_o} \exp \left(\frac{\bar{K} V_c}{k_B T} \right). \quad (1)$$

En la Ec. (1) V_h y V_c representan los volúmenes hidrodinámico y magnético de la partícula, η_o es la viscosidad del líquido en el cual están suspendidas, k_B es la constante de Boltzmann, \bar{K} es la constante de anisotropía magnetocristalina de la partícula y f_o es una frecuencia que tiene un valor de aproximadamente 10^9 Hz [1]. Como se puede corroborar de la Ec. (1), se espera que para partículas magnéticas con diámetros mayores de 10 nm el mecanismo de relajación sea dominado por el mecanismo browniano. Esta situación se ilustra en la Figura 1, donde se muestran las curvas típicas para los tiempos de relajación de Néel y browniano, así como el tiempo efectivo de relajación (τ) (Ec. (2)) para un ferrofluido que tiene como fluido base agua.

$$\tau = \left(\frac{\tau_B \tau_N}{\tau_B + \tau_N} \right). \quad (2)$$

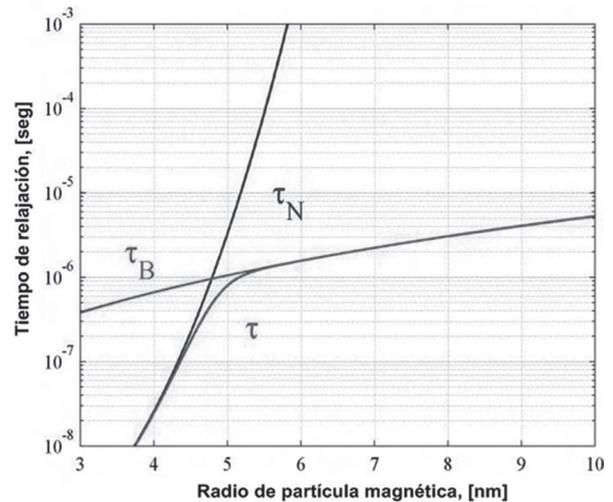


Figura 1. *Tiempos de relajación browniano, de Néel y efectivo en función del radio de las nanopartículas. Figura adaptada del documento Rinaldi C. [12].*

Teniendo en cuenta este comportamiento superparamagnético, y asumiendo que el mecanismo de relajación es browniano, se espera que un CM rotativo genere rotación de las partículas suspendidas en el líquido. Esto tiene otra gran implicación: cuando el ferrofluido no está sometido a un CM, las partículas giran a una velocidad angular promedio (ω) igual a

la mitad de la vorticidad local del fluido ($\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}$). En este caso, el ferrofluido se comportará como un fluido newtoniano caracterizado por un tensor de esfuerzos viscosos simétrico. No obstante, en presencia de un CM rotando o alternando, las partículas tienen una velocidad angular diferente a la vorticidad del fluido generando esfuerzos asimétricos dentro del líquido ($\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}$). La teoría DMAI está basada en la presunción de que el momento angular interno de las partículas es difundido hacia la matriz del líquido generando pequeños micro vórtices y movimiento macroscópico del fluido [9]. Sin embargo, esta teoría se ha enfrentado con varios dilemas, como por ejemplo, el hecho de que el parámetro fenomenológico que caracteriza la difusión del momento angular interno conocido como “spin viscosity” (η') no ha podido ser determinado ni experimental ni analíticamente de una manera rigurosa. Más aún, muchos investigadores se han inclinado por tomar $\eta'=0$ en sus análisis basados en argumentos dimensionales los cuales predicen su valor como despreciable [9, 13]. No obstante, estos análisis (con $\eta'=0$), no predicen flujo, contradiciendo la evidencia experimental actual que ha probado la existencia de este al interior del fluido [8, 14]. La verificación de la validez de esta y otras teorías ha sido realizada por medio de la comparación de perfiles de velocidad experimentales en geometría cilíndrica y más recientemente el flujo en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos [14, 15] en CM rotativos generados en estatores de dos polos como también en estatores multipolos [15].

La primera solución analítica para el flujo de un ferrofluido contenido en el ánulo entre dos cilindros concéntricos fue abordada por Rosensweig *et al.* [16], sin embargo su análisis no tuvo en cuenta el hecho que el CM en la región ocupada por el ferrofluido no es uniforme. Posteriormente, Chaves *et al.* [14] obtuvieron una solución que corrige este error; no obstante su solución asume que el vector de magnetización es proporcional al vector de CM ($\mathbf{M} \approx \chi\mathbf{H}$) lo que limita su análisis a situaciones donde la amplitud del CM tiende a cero.

Adicionalmente, todas las soluciones analíticas presentadas en la literatura han sido obtenidas bajo la suposición que los efectos de los términos $\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización son despreciables, con el fin de poder resolver de forma independiente el problema magnético del hidrodinámico, un ejemplo de esta situación son los análisis presentados por Chaves *et al.* [14, 17] donde se usó el método de perturbación regular para resolver el problema de flujo en geometría cilíndrica y anular, no obstante, para el caso anular solo se pudo resolver el problema de orden cero que equivale

a asumir que los términos mencionados anteriormente son despreciables.

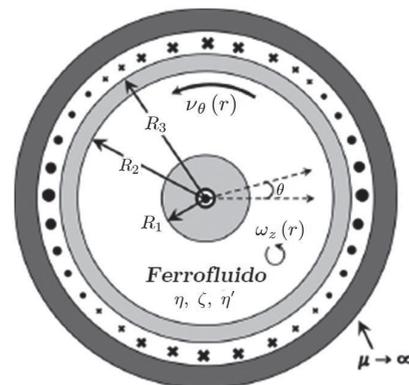
En vista de la dificultad de conseguir una solución analítica que incluya todos los términos de la ecuación de magnetización, este trabajo tiene como objetivo obtener una solución numérica para el flujo del ferrofluido en un ánulo que tenga en cuenta los términos de la ecuación de magnetización comúnmente despreciados pero manteniendo la suposición de CM bajos. Estos resultados son comparados con la solución presentada por Chaves *et al.*, [14].

Por otro lado, otros autores como Finlayson [18], Elborai [19], y Khushrushahi *et al.* [20] han obtenido soluciones numéricas para el caso del flujo de un ferrofluido un contenedor cilíndrico usando el software de elementos finitos COMSOL Multiphysics®, no obstante, para flujo anular no han sido reportadas aún soluciones numéricas.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de flujo estudiado en este trabajo se ilustra en la Figura 2. Este análisis supone que los cilindros son infinitamente largos y que son construidos de un material no magnético. El recipiente con el ferrofluido está ubicado en el centro de un estator de un motor eléctrico que genera un CM rotando en forma perpendicular al eje de los cilindros y que se modela “idealmente” usando una distribución de corriente superficial ubicada en $r=R_3$ y dada por la expresión:

$$\mathbf{K}_z = \text{Re}\{K \exp[j(\Omega t - \theta)]\} \mathbf{i}_z. \quad (3)$$



Distribución de Corriente Superficial

$$K_z(r, \theta, t) = \text{Re}\{K e^{j(\Omega t - \theta)}\}$$

Figura 2. Cilindros coaxiales y el ferrofluido llenando el espacio entre $R_1 < r < R_2$. El análisis asume que $R_2 \rightarrow R_3$.

En esta ecuación, Ω es la frecuencia de rotación del campo magnético, K es la amplitud del campo, j es el número imaginario ($j = \sqrt{-1}$) y Re indica que la función K_z está dada por la parte real de la función compleja encerrada entre los corchetes. También, el modelo supone que el estator está envuelto en un material de permeabilidad magnética infinita ($\mu \rightarrow \infty$).

Analíticamente, el caso de estudio tratado aquí es más complicado de resolver que el problema del flujo en un recipiente cilíndrico, ya que el CM del espacio ubicado entre $R_1 < r < R_2$ es no uniforme y por lo tanto se debe tener en cuenta la densidad de fuerza magnética ($\rho \mathbf{F} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$) que experimenta el ferrofluido debido a dicha heterogeneidad. Adicionalmente la densidad de torque magnético ($\rho \mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$) que experimentan las partículas para el caso del flujo en un cilindro es constante en contraste al caso que se estudia en este trabajo, donde es función del radio.

3. DESCRIPCIÓN DE ECUACIONES FERROHIDRODINÁMICAS

El conjunto de ecuaciones que describen el flujo de un ferrofluido está determinado en primera instancia por la ecuación de continuidad y las ecuaciones generales que describen el transporte de momento en un medio continuo polarizable o no polarizable: la ecuación de momento de Cauchy y la ecuación de momento angular interno. El término polarizable en éste caso, es aplicado a fluidos que son caracterizados por tener una distribución heterogénea de una propiedad material particular a nivel microscópico, la cual tiene consecuencias en su respuesta macroscópica. Este tipo de fluidos son caracterizados por experimentar esfuerzos viscosos asimétricos y por transmitir momento angular "Couple Stresses" por contacto directo como ha sido discutido por Dahler y Scriben [21]. Con el fin de aplicar estas ecuaciones al caso particular de ferrofluidos, se ha tomado las ecuaciones constitutivas usadas para estudiar la respuesta de un fluido polar a un campo eléctrico uniforme y rotando usadas por Condiff y Dhaler [22] produciendo un conjunto de ecuaciones conocidas como ferrodinámicas y que son la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles (Ec. 4), la ecuación de cambio de momento lineal (Ec. 5) y la ecuación de cambio de momento angular interno (Ec. 6)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{F} - \nabla p - 2\zeta \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (5)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \rho \mathbf{l} + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + (\lambda' + \eta') \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + 4\zeta \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right). \quad (6)$$

En la Ec. (5) el segundo término del lado derecho $\rho \mathbf{F}$ representa la densidad de fuerza magnética a la que es sometido el fluido por efectos de la heterogeneidad espacial del CM; el cuarto término tiene en cuenta el hecho que el momento angular externo puede transformarse en momento angular interno y viceversa por el efecto del estado asimétrico del tensor de esfuerzos [23]. En la Ec. (6), η' y λ' son los coeficientes de corte y coeficiente volumétrico de "spin viscosity" llamados así por analogía con los respectivos coeficientes del tensor de esfuerzos viscosos para fluidos newtonianos; $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de velocidad angular local promedio de las partículas y $\zeta = 1.5\phi h$ es el coeficiente de "vortex viscosity" con f representando la fracción volumétrica de partículas en el ferrofluido [24]. En esta misma ecuación, el término $\rho \mathbf{l}$ tiene en cuenta sólo el torque magnético sobre las partículas (dipolos) del ferrofluido y puede ser interpretado como la forma como el CM externo introduce momento angular interno al fluido.

Adicionalmente, se necesita de una ecuación que tenga en cuenta la desviación de la magnetización de las partículas desde su valor de equilibrio debido a la reorientación de las partículas y al efecto del movimiento rotacional browniano. Esta ecuación fue propuesta por Shliomis [25, 26], y es conocida como la ecuación de relajación de la magnetización:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq}), \quad (7)$$

donde \mathbf{M}_{eq} es la magnetización de equilibrio dada por la ecuación de Langevin

$$\frac{\mathbf{M}_{eq}}{\phi M_d} = \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \alpha = \frac{\pi \mu_0 M_d K d^3}{k_B T} \quad (8)$$

En la Ec. (8), α es un parámetro que determina la relación entre fuerzas magnéticas y térmicas que compiten por la alineación de los dipolos magnéticos con el CM. En esta

misma ecuación M_d es la constante de magnetización de dominio del material y que para el caso de magnetita tiene un valor de 446 kA/m y $\mu_o (4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A})$ es la permeabilidad magnética en el vacío.

El campo magnético y la inducción magnética son descritos por las ecuaciones de Maxwell en el límite magneto cuasiestático:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0. \quad (10)$$

Las condiciones de frontera en la interfase para la inducción magnética y el CM son:

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{M} + \mathbf{H})_a - (\mathbf{M} + \mathbf{H})_b] = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b] = \mathbf{0} \quad (12)$$

Usando las siguientes escalas

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \frac{\mathbf{M}}{\chi K}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{K}, \quad \tilde{\nabla} = R_0 \nabla, \\ \tilde{r} &= \frac{r}{R_0}, \quad \tilde{t} = \Omega t, \quad \tilde{p} = \frac{\zeta p}{\mu_0 \eta \chi K^2 \tilde{\Omega}}, \quad (13) \\ \tilde{\omega} &= \frac{\zeta \omega}{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_0 \chi K^2 R_0 \tilde{\Omega}}; \end{aligned}$$

determinadas por Chaves *et al.* [17], y asumiendo que los términos inerciales de las Ecs. (5) y (6) son muy pequeños respecto a los respectivos términos difusivos; el conjunto de ecuaciones de (4) a (10) puede ser rescrito como:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\eta \tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + 2 \frac{\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\omega} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (15)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + 2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4 \tilde{\omega} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\omega}, \quad (16)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi K}, \quad (17)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\nabla} \cdot (\chi \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = 0. \quad (18)$$

En estas ecuaciones, $\tilde{\Omega} \equiv \Omega \tau$ es la frecuencia adimensional de rotación del campo y $\varepsilon \equiv \mu_o \chi K^2 \tau / \zeta$ es un parámetro de perturbación determinado a través de un análisis de escala y usado en Chaves *et al.* [17] para obtener la solución asintótica del flujo del ferrofluido en un cilindro usando el método de perturbación regular.

Adicionalmente los parámetros η_e y κ fueron definidos como:

$$\eta_e \equiv \eta + \zeta, \quad \kappa^2 \equiv \frac{4\eta R_0^2 \zeta}{\eta_e \eta}. \quad (19)$$

4. MODELO MATEMÁTICO

4.1 Modelo hidrodinámico

Debido a la simetría axial que caracteriza esta geometría y la suposición de cilindros infinitamente largos la única componente relevante del vector de velocidad lineal es la componente acimutal (\tilde{v}_θ). Así mismo, debido a que el CM rota en forma perpendicular al eje del cilindro se ha asumido que la única componente relevante del vector de velocidad angular es la axial ($\tilde{\omega}_z$). Por lo tanto, el modelo hidrodinámico queda descrito por las dos siguientes ecuaciones:

$$0 = \frac{\zeta}{\eta \tilde{\Omega}} \langle f_\theta \rangle_t - 2 \frac{\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} + \frac{\eta_e}{\eta} \left[\frac{d^2 \tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}} - \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}^2} \right], \quad (20)$$

$$0 = \frac{1}{\tilde{\Omega}} \langle l_z \rangle_t + 2 \left(\frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} + \frac{d\tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}} \right) - 4 \tilde{\omega}_z + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left(\frac{d^2 \tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} \right). \quad (21)$$

Las Ecs. (20) y (21) están sujetas a las condiciones de frontera de no deslizamiento tanto para (\tilde{v}_θ) como para ($\tilde{\omega}_z$).

4.2 Problema Electro-Magnético

El planteamiento del modelo matemático fue realizado de acuerdo a la metodología empleada por Elborai [19] que aprovecha el hecho que el CM es conservativo (Ec. 9) para introducir el concepto del potencial magnético escalar. Adicionalmente, y como se mencionó en la sección 2, se usó una distribución de corriente superficial para modelar el CM rotativo. Esto permite suponer que la solución para los vectores adimensionales del CM, la magnetización y el potencial magnético escalar tienen una forma similar y por tanto puede ser representadas como:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \left[\tilde{h}_r(\tilde{r}) \mathbf{i}_r + \tilde{h}_\theta(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t} - \theta)} \right\}, \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \left[\tilde{m}_r(\tilde{r}) \mathbf{i}_r + \tilde{m}_\theta(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t} - \theta)} \right\}, \quad (23)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \tilde{\psi}(\tilde{r}) e^{j(\tilde{t} - \theta)} \right\}. \quad (24)$$

Donde, \tilde{h}_r , \tilde{h}_θ , \tilde{m}_r , \tilde{m}_θ , y $\tilde{\psi}$ son las componentes complejas adimensionales de los vectores del campo magnético, la magnetización y el potencial magnético escalar, respectivamente. Usando las Ecs. (22) y (23)

en la Ec. (17) y asumiendo que $M_{eq} \approx \chi H$, se obtienen las siguientes expresiones para \tilde{m}_r y \tilde{m}_θ :

$$\tilde{m}_r(\tilde{r}) = \frac{\tilde{h}_r + j\tilde{\Omega}\tilde{h}_r\alpha - \varepsilon\tilde{\Omega}\tilde{h}_\theta\beta}{-[-j + \tilde{\Omega}\alpha]^2 + \varepsilon^2\tilde{\Omega}^2\beta^2}, \quad (25)$$

$$\tilde{m}_\theta(\tilde{r}) = \frac{\tilde{h}_\theta + j\tilde{\Omega}\tilde{h}_\theta\alpha - \varepsilon\tilde{\Omega}\tilde{h}_r\beta}{-[-j + \tilde{\Omega}\alpha]^2 + \varepsilon^2\tilde{\Omega}^2\beta^2}. \quad (26)$$

Donde, las funciones $\alpha(\tilde{r})$ y $\beta(\tilde{r})$ se definen como sigue:

$$\alpha(\tilde{r}) \equiv 1 - \frac{\varepsilon\tilde{v}_\theta(\tilde{r})}{\tilde{r}}, \quad \beta(\tilde{r}) \equiv \tilde{\omega}_z(\tilde{r}) - \frac{\tilde{v}_\theta(\tilde{r})}{\tilde{r}}. \quad (27)$$

Las ecuaciones de Maxwell (Ec. 18) pueden ser reescritas como la ecuación de Poisson para el potencial magnético definiendo $\tilde{\mathbf{H}} = \nabla\tilde{\psi}$ y usando la Ec. (24):

$$\tilde{\psi}''(\tilde{r}) + \frac{\tilde{\psi}'(\tilde{r})}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{\psi}(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} = \frac{\chi\tilde{m}_r}{\tilde{r}} - \frac{j\chi\tilde{m}_\theta}{\tilde{r}} + \chi\tilde{m}_r'. \quad (28)$$

En la Ec. (28), el último término del lado derecho está dado por la expresión:

$$\chi\tilde{m}_r'(\tilde{r}) = \frac{-j\chi\{\varepsilon^3\tilde{\Omega}^3\beta^3[-\tilde{\psi} + \tilde{r}\tilde{\psi}'] + \varepsilon\tilde{\Omega}[-j + \tilde{\Omega}\alpha]\}}{[\tilde{r}(-j + \tilde{\Omega}\alpha)^2 - \tilde{r}\varepsilon^2\tilde{\Omega}^2\beta^2]^2} \\ \beta[\tilde{\psi}[-j + \tilde{\Omega}\alpha + 2\tilde{r}\tilde{\Omega}\alpha'] - \tilde{r}(-j + \tilde{\Omega}\alpha + 2\tilde{r}\varepsilon\tilde{\Omega}\beta')\tilde{\psi}'] - \\ \tilde{r}[-j + \tilde{\Omega}\alpha]^2[\varepsilon\tilde{\Omega}\tilde{\psi}\beta' - \tilde{r}\tilde{\Omega}\alpha'\tilde{\psi}' + \tilde{r}(-j + \tilde{\Omega}\alpha)\tilde{\psi}''] \\ + \tilde{r}\varepsilon^2\tilde{\Omega}^2\beta^2[-\varepsilon\tilde{\Omega}\tilde{\psi}\beta' + \tilde{r}\tilde{\Omega}\alpha'\tilde{\psi}' + \tilde{r}(-j + \tilde{\Omega}\alpha)\tilde{\psi}'']. \quad (29)$$

Para obtener las ecuaciones anteriores se usaron las siguientes relaciones:

$$\tilde{h}_r(\tilde{r}) = -\frac{d\tilde{\psi}}{d\tilde{r}}, \quad \tilde{h}_\theta(\tilde{r}) = \frac{j\tilde{\psi}}{\tilde{r}}. \quad (30)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación diferencial (28) se obtienen a partir de las Ecs. (11) y (12):

$$\tilde{r} = 1, \quad \tilde{\psi} = j, \quad (31)$$

$$\tilde{r} = R_1/R_0 \equiv \gamma, \quad \tilde{\psi}(\gamma) = \gamma\{-\tilde{\psi}'(\gamma) + \chi\tilde{m}_r(\gamma)\}. \quad (32)$$

4.2.1 Densidad de fuerza y torque magnético

Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones formado por las Ecs. (20) y (21), se obtuvieron las expresiones promediadas en el tiempo de las densidades de fuerza y torque magnético usando la expresión reportada por Melcher [27]. Debe tenerse en cuenta que para este caso, la densidad de fuerza magnética tiene componentes en la dirección radial y acimutal, no obstante sólo la última de estas contribuye a la generación del flujo. Las expresiones obtenidas son:

$$\langle I_z \rangle_t = \frac{1}{2\{\tilde{\Omega}^4\alpha^4 + (1 + \varepsilon^2\tilde{\Omega}^2\beta^2)^2 + 2\tilde{\Omega}^2\alpha^2(1 - \varepsilon^2\tilde{\Omega}^2\beta^2)\}}$$

$$\tilde{\Omega}\left\{\varepsilon\beta\left(|\tilde{h}_r|^2 + |\tilde{h}_\theta|^2\right)\left[\tilde{\Omega}^2(\alpha^2 - \varepsilon^2\beta^2) - 1\right] - j\tilde{h}_\theta\tilde{h}_r\alpha \times \right. \\ \left. [1 + \tilde{\Omega}^2(\alpha^2 - \varepsilon^2\beta^2)] + j\tilde{h}_r\tilde{h}_\theta\alpha[1 + \tilde{\Omega}^2(\alpha^2 - \varepsilon^2\beta^2)]\right\}, \quad (33)$$

$$\langle f_\theta \rangle_t = \frac{\tilde{\Omega}_r(\alpha + \varepsilon\beta)\left[|\tilde{\psi}|^2 + \tilde{r}(\tilde{r}|\tilde{\psi}'|^2 - \tilde{\psi}''\tilde{\psi} - \tilde{\psi}'\tilde{\psi}'^*)\right]}{2\tilde{r}^2\left[\tilde{\Omega}_r(\alpha + \varepsilon\beta)^2 + 1\right]}. \quad (34)$$

En estas ecuaciones el superíndice (*) indica el conjugado de la respectiva función compleja.

5. ESTRATEGIA NUMÉRICA

La solución numérica se desarrolló a través de un código escrito en el lenguaje de programación C++. El código contempla un procedimiento iterativo que permite romper el acoplamiento entre los problemas hidrodinámico y magnético. Las ecuaciones fueron discretizadas usando diferencias finitas de primer orden para los puntos interiores y de segundo orden para las condiciones de frontera. Las iteraciones se inician suponiendo valores para la densidad de fuerza magnética $\langle f_\theta \rangle_t$ y el torque magnético $\langle I_z \rangle_t$, promediados en el tiempo lo que permite resolver las Ecs. (20) y (21) obteniéndose un primer estimado para \tilde{v}_θ y $\tilde{\omega}_z$. Seguidamente, estos resultados fueron usados para resolver la ecuación de Poisson de la función potencial escalar $\tilde{\psi}$ (Ec. 28) lo que permite obtener nuevos estimados de $\langle f_\theta \rangle_t$ y $\langle I_z \rangle_t$ e iniciar una nueva iteración. Se usó el método de Gauss-Seidel para solucionar simultáneamente los sistemas de ecuaciones involucrados en el algoritmo. También se implementó el criterio de convergencia absoluta para las funciones de densidad de fuerza y torque magnético con un valor de tolerancia que fue especificado en 1×10^{-8} . Para disminuir el tiempo del cálculo computacional fue necesario usar el concepto de sobre relajación sucesiva. Las propiedades físicas y magnéticas del ferrofluido usadas en la simulación fueron tomadas de Chaves *et al.* [17].

6. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La solución numérica obtenida es comparada en la Figura 3 respecto a las solución asintótica reportada por Chaves *et al.* [14]. Como se puede observar, existe un buen ajuste de la solución numérica con la asintótica, aun cuando existe una ligera diferencia en la magnitud de los perfiles de velocidad, atribuida a que las ecuaciones fueron discretizadas usando diferencias finitas de primer orden.

La Figura 4 a) y b), muestran los perfiles de velocidad lineal y angular para diferentes valores de κ calculados a un mismo valor de intensidad y de frecuencia de rotación del CM. Estos perfiles de velocidad muestran una clara dependencia del flujo con respecto al parámetro adimensional κ , lo que está de acuerdo a las predicciones del análisis asintótico y de la teoría de DMAI.

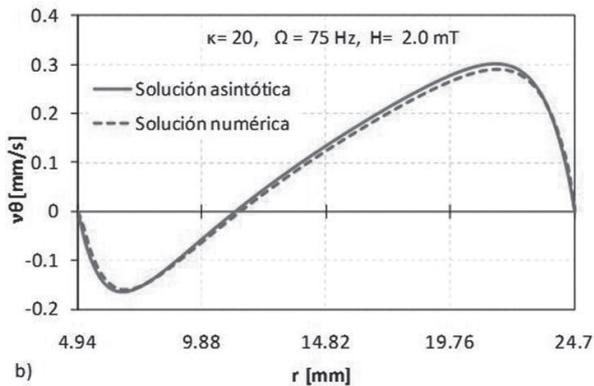
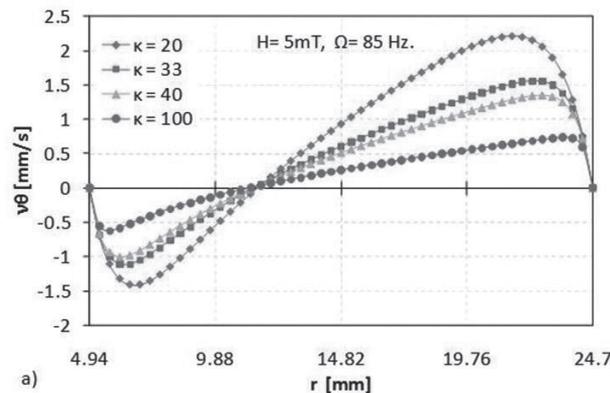


Figura 3. Comparación de resultados numéricos con respecto a la solución asintótica: perfiles de velocidad lineal para el caso del contenedor anular, obtenido con $\kappa=20$, $\Omega = 75$ Hz y $H= 2.0$ mT.

En otras palabras, la magnitud del flujo tiende a cero conforme el parámetro $\kappa \rightarrow \infty$ ($\eta' \rightarrow 0$). Este resultado indica que el efecto del «couple stresses» ($\nabla^2 \omega$) es responsable de la generación del flujo. Por otro lado, los perfiles para $\tilde{\omega}_z$, muestran que la velocidad angular de las partículas tiene un valor máximo constante para todos los valores de κ y que su magnitud tiene un efecto significativo sobre la magnitud de $\tilde{\omega}_z$ únicamente cerca de las superficies de ambos cilindros donde empieza a caer rápidamente a cero forzada por la condición de frontera impuesta.



Se debe resaltar además, que la solución numérica permitió obtener perfiles de velocidad para valores de $\kappa > 40$ a diferencia de los resultados presentados por Chaves *et al.* [14] los cuales fueron limitados a valores de $\kappa < 40$ por problemas de convergencia en el cálculo numérico de una integral, que resulta al solucionar la parte no homogénea de la ecuación modificada de Bessel (ecuación de balance de momento angular interno). No obstante, a estos valores de κ altos no se observó ninguna variante diferente a las ya esperadas.

Se debe hacer énfasis, que esta es la primera solución numérica que se obtiene para el flujo de ferrofluido en una geometría anular. A diferencia de la solución asintótica presentada por Chaves *et al.* [14], el modelo matemático usado en este trabajo tuvo en cuenta los términos $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización (Ec. (7)) acoplando el problema hidrodinámico y magnético. No obstante, cuando se obtuvieron los perfiles numéricos de velocidad lineal con y sin los dos términos ya mencionados, no se observó ningún efecto sobre la forma y la magnitud de los perfiles de velocidad. Esto puede ser explicado con ayuda de las escalas dadas en las Ecs. (13) y la ecuación de magnetización, Ec. (7). En la Ec. (7), se puede verificar que el orden de magnitud del término \mathbf{M}/τ es de $\sim 10^8$ mientras que el término convectivo y el término de acoplamiento entre la velocidad angular de las partículas y la magnetización son 10^3 , lo cual permite despreciarlos. Esta aproximación es válida siempre que la magnetización de equilibrio sea aproximada por $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$ ($\alpha \rightarrow 0$). Este análisis también es consecuente con el análisis de escalas presentado por Chaves *et al.* [17] ya que el problema de orden cero no tiene en cuenta los términos que involucran a \mathbf{v} y $\boldsymbol{\omega}$.

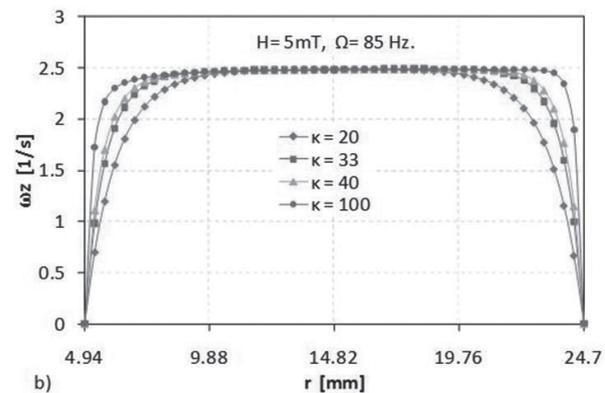


Figura 4. Perfiles de velocidad a) lineal y b) angular para ferrofluido en el espacio anular de cilindros concéntricos. En ambos casos la amplitud del campo magnético permanece constante a 5mT y frecuencia de rotación del campo de 85 Hz.

Adicionalmente, resulta necesario conocer el rango actual de aplicación de este análisis y de otros previamente reportados en la literatura. La más fuerte suposición tiene que ver con el hecho de reemplazar la expresión de la ecuación de Langevin (Ec. 8) por $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$ lo cual equivale a tomar solo el primer término de la expansión en serie de potencias de la ecuación de Langevin:

$$L(\alpha) \equiv \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \approx \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2\alpha^5}{945} + \mathcal{O}(\alpha^6) \quad (35)$$

Para entender las consecuencias de esta suposición, la figura 5 muestra una curva de la función de Langevin y otras aproximaciones de ésta, obtenidas a través de la expansión de series de potencias dada por la Ec. 35, a las cuales se les ha retenido solo hasta su primer, segundo y tercer término respectivamente. Como puede ser observado de la Figura 5, ésta aproximación deja de ser válida para $\alpha > 0.3$, desde donde empieza a ver una gran discrepancia entre la curva real y la respuesta lineal de la magnetización de equilibrio que se usa como aproximación. Teniendo en cuenta que α y ε tienen una dependencia proporcional de la amplitud del campo magnético (K), resulta claro que este análisis y todos los presentados en la literatura que usan esta aproximación son limitados a situaciones donde α y ε son mucho menores que uno. No obstante esta limitación, análisis numéricos como los presentados por Filayson [18] y Khushrushahi *et al.* [20] y asintóticos como lo realizados por Chaves *et al.* [14, 17] han sido usados para validar la teoría de DMAI con perfiles de velocidad experimentales realizados a valores moderados de la intensidad del campo magnético donde probablemente la magnetización de equilibrio ha llegado a su valor de saturación. Por tanto, estas comparaciones deben ser realizadas solo desde un punto de vista cualitativo.

Por último, las aproximaciones hechas en este análisis están basadas en el hecho que las densidades de torque y fuerza magnética han sido tomadas como promedios en el tiempo; esto con el fin de poder resolver el problema hidrodinámico en forma estable, situación que será analizada en una posterior comunicación.

7. CONCLUSIONES

La solución numérica para la geometría anular fue obtenida usando un esquema numérico-analítico que empleó diferencias finitas. Los resultados fueron encontrados en buen acuerdo con la solución asintótica ya citada, convirtiéndose así, en la primera solución numérica que se reporta de este sistema

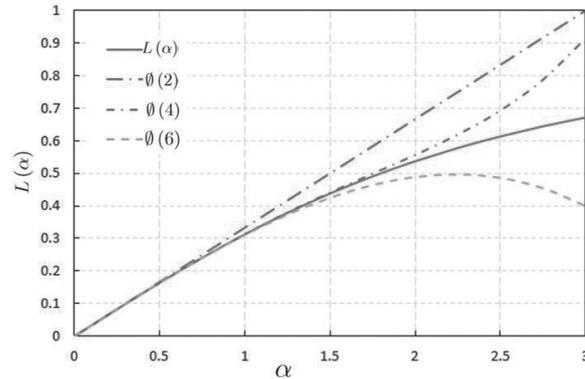


Figura 5. $L(\alpha) = \coth(\alpha) - \alpha^{-1}$ y sus aproximaciones obtenidas de una expansión de series de potencias truncadas en $\mathcal{O}(\alpha^2)$, $\mathcal{O}(\alpha^4)$, $\mathcal{O}(\alpha^6)$ versus α .

y también en la primera solución de flujo que tiene en cuenta los términos que involucran los vectores de velocidad lineal del fluido y velocidad angular de las partículas. Se corroboró que estos tienen un efecto despreciable sobre los perfiles de velocidad bajo la suposición que la magnetización es proporcional a la magnitud del CM lo cual se cumple para valores $\alpha < 0.3$ o $\varepsilon \approx 0.06$. Se debe determinar el comportamiento del flujo a valores más altos de α (CM altos) con el fin de poder realizar comparaciones directas entre análisis teóricos y datos experimentales. Adicionalmente se debe estudiar la dependencia del tiempo del campo magnético y la magnetización sobre el problema hidrodinámico a diferencia del caso tratado aquí donde se usan promedios en el tiempo de la densidad de torque y fuerza magnética.

8. REFERENCIAS

- [1] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*. Mineola, NY: Dover Publications, 1997.
- [2] K. Raj, B. Moskowitz, and R. Casciari, "Advances in ferrofluid technology," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 149, pp. 174-180, 1995.
- [3] C. Barrera, A. P. Herrera, N. Bezares, E. Fachini, R. Olayo-Valles, J.P. Hinestroza and C. Rinaldi, "Effect of poly(ethylene oxide)-silane graft molecular weight on the colloidal properties of iron oxide nanoparticles for biomedical applications". *Journal of Colloid and Interface Science*. vol. 377, pp. 40-50, 2012.
- [4] J. P. Mctague, "Magnetoviscosity of Magnetic Colloids," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 51, pp. 133, 1969.
- [5] C. Rinaldi, F. Gutman, X. He, A. D. Rosenthal, and M. Zahn, "Torque measurements on ferrofluid

- cylinders in rotating magnetic fields,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 289, pp. 307-310, 2005.
- [6] M. I. Shliomis and K. I. Morozov, “Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field,” *Physics of Fluids*, vol. 6, pp. 2855-2861, 1994.
- [7] R. Moskowitz and R. E. Rosensweig, “Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” *Applied Physics Letters*, vol. 11, pp. 301-303, 1967.
- [8] A. Chaves, C. Rinaldi, S. Elborai, X. He, and M. Zahn, “Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic field,” *Physical Review Letters*, vol. 96, pp. 194501(1-4), 2006.
- [9] V. M. Zaitsev and M. I. Shliomis, “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 10, pp. 696-700, 1969.
- [10] A. F. Leblooh, S. H. Mahmood, and J. M. Williams, “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” *Physica B*, vol. 321, pp. 159-162, 2002.
- [11] A. Chaves, F. Gutman and C. Rinaldi, “Torque and bulk flow of ferrofluid in an annular gap subjected to a rotating magnetic field,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 129 pp. 412-422, 2007.
- [12] C. Rinaldi, “Continuum modeling of polarizable systems,” vol. Ph.D. Boston, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [13] S. Feng, A. L. Graham, J. R. Abbott, and H. Brenner, “Antisymmetric stresses in suspensions: vortex viscosity and energy dissipation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 563, pp. 97-122, 2006.
- [14] A. Chaves, I. Torres, and C. Rinaldi, “Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field,” *Physics of Fluids*, vol. 22, pp. 092002, 2010.
- [15] I. Torres and C. Rinaldi, “Ferrofluid flow in the annular gap of a multipole rotating magnetic field,” *Physics of Fluids*, vol. 23, pp. 082001-1, 2011.
- [16] R. E. Rosensweig, J. Popplewell, and R. J. Johnston, “Magnetic fluid motion in rotating field,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 85, pp. 171-180, 1990.
- [17] A. Chaves, M. Zahn, and C. Rinaldi, “Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements,” *Physics of Fluids*, vol. 20, pp. 053102, 2008.
- [18] B. A. Finlayson, “Modeling a Ferrofluid in a Rotating Magnetic Field,” presented at Comsol Conference, Boston, Massachusetts, 2007.
- [19] S. M. Elborai, “Ferrofluid surface and volume flows in uniform rotating magnetic field,” in *Department of electrical engineering and computer science*, vol. Doctor of Philosophy. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2006, pp. 260.
- [20] S. Khushrushahi, A. Chaves Guerrero, C. Rinaldi, and M. Zahn, “An analysis of spin diffusion dominated ferrofluid spin-up flows in uniform rotating magnetic field,” presented at COMSOL CONFERENCE, Boston, USA, 2011.
- [21] J. S. Dahler and L. E. Scriven, “Theory of structured continua. I. General considerations of angular momentum and polarization,” *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, vol. 275, pp. 504-527, 1963.
- [22] D. W. Condiff and J. S. Dahler, “Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress,” *The Physics of Fluids*, vol. 7, pp. 842-854, 1964.
- [23] J. S. Dahler and L. E. Scriven, “Angular momentum of continua,” *Nature*, vol. 192, pp. 36-37, 1961.
- [24] H. Brenner, “Rheology of a dilute suspension of dipolar spherical particles in an external field,” *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 32, pp. 141-158, 1970.
- [25] M. I. Shliomis, “Effective viscosity of magnetic suspensions,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 34, pp. 1291-1294, 1972.
- [26] M. I. Shliomis, “Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 39, pp. 701-704, 1974.
- [27] J. R. Melcher, *Continuum Electromechanics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1981.