

TEORÍA, MÉTODO, ANÁLISIS DE FOURIER Y ERROR DEL MUESTREO POR DESFASE

DAVID ALEJANDRO MIRANDA MERCADO

Físico e Ingeniero con Maestría en Ingeniería, Área, Ingeniería Electrónica
Profesor Tiempo Completo
Grupo de Investigación: CIMBIOS
Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
dalemir@uis.edu.co, davidmiranda@tux.uis.edu.co

JAIME GUILLERMO BARRERO PÉREZ

Ingeniero con Maestría en Potencia Eléctrica
Profesor Tiempo Completo
Grupo de Investigación: CEMOS.
Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones
Universidad Industrial de Santander
jbarrero@uis.edu.co

Fecha Recepción: 03/10/2006
Fecha Aceptación: 21/05/2007

RESUMEN

Se presenta una nueva teoría de muestreo para señales periódicas y aperiódicas de duración finita, y se postula y demuestra el teorema de muestreo por desfase y el teorema de muestreo por desfase generalizado. Además, se presenta la técnica de muestreo por desfase, su análisis de Fourier, un análisis de error debido a inestabilidad en la frecuencia de la señal periódica, los resultados obtenidos de su simulación y una aplicación práctica de la técnica para desfase generalizado.

PALABRAS CLAVE: Muestreo, Submuestreo, Desfase, Nyquist, teoría de muestreo por desfase, TMD.

ABSTRACT

A new sampling theory is presented for periodic and non-periodic signals of finite duration, and it is postulated and demonstrated the sampling off-set theorem and the generalized sampling off-set theorem. Also, the off-set sampling technique is presented, its Fourier's analysis, an error analysis due to an uncertainty in the frequency of the periodic signal, the simulation results and a practical application of this technique.

KEYWORDS: Sampling, Sub-sampling, out of phase, Nyquist, out of phase sampling theory, TMD.

1. INTRODUCCIÓN

La digitalización de señales de alta frecuencia generalmente exige el uso de convertidores A/D muy rápidos, sin embargo es posible con convertidores A/D relativamente lentos incluso hasta "sobre muestrear" estas señales tomando una o pocas muestras por ciclo pero utilizando en cambio un tiempo de muestreo relativamente alto y periodo de muestreo definido de una forma particular. A continuación se presenta la teoría que sustenta esta técnica para el "muestreo por desfase"* de señales periódicas y aperiódicas de duración finita, el cual

está basado en la definición de un periodo de muestreo τ . Con este método se obtiene una señal con un periodo de muestreo aparente de la forma $\frac{T}{\mu}$

donde μ es un entero y T es el periodo de la señal periódica o la duración de la señal periódica de duración finita, pero tomando muestras a un periodo de muestreo τ mayor que $\frac{T}{\mu}$

Inicialmente se describe el método de muestreo por desfase, se plantean dos teoremas que soportan la teoría,

* El desarrollo teórico de este método fue desarrollado por David Miranda, basado en el artículo del Dr. Brian Brown referenciado en [1].

se estudia la compatibilidad de la teoría de muestreo por desfase (TMD) con el teorema de Nyquist. Por último se presenta el análisis de Fourier para la teoría de muestreo por desfase, un análisis de error para la misma y se propone una técnica para minimizar el error de muestreo introducido al no definir de manera precisa el periodo de muestreo de la TMD.

2. DESCRIPCIÓN GENERAL

El método de muestreo por desfase para señales periódicas de periodo T conocido se basa, fundamentalmente, en tomar un periodo de muestreo de la forma:

$$\tau = \frac{T}{N} \left(1 \pm \frac{1}{M} \right)$$

donde N es el número de muestras por periodo (puede, incluso, tomarse $N = 1$) y M es el número de periodos donde la señal muestreada vuelve a ser periódica (la señal analógica). Al aplicar la técnica de reconstrucción a la señal muestreada se obtiene un periodo de muestreo aparente

$$\tau' = \frac{T}{NM}$$

De esta manera $\mu = MN$ es el periodo de la señal en tiempo discreto.

2.1 TEOREMA DE MUESTREO POR DESFASE

Sea $f(t)$ una señal periódica de periodo T conocido y τ el periodo de muestreo utilizado para obtener una señal digital $g(n)$ con N muestras por periodos y un número total de muestras $\mu = MN$. Si se cumple la relación

$$\tau = \frac{T}{N} \left(1 \pm \frac{1}{M} \right)$$

entonces es posible reconstruir, para la señal discreta, un periodo con $\mu = MN$ muestras espaciadas regularmente en el tiempo.

2.2 PERIODO DE MUESTREO (DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE MUESTREO POR DESFASE).

Sea $f(t)$ una señal periódica de periodo T conocido, entonces:

$$f(t) = f(t + nT) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Supóngase que se desea muestrear la señal $f(x)$ de tal manera que la señal muestreada tenga periodo $\mu = MN$, donde N es el número de muestras por periodo y M es el

número de periodos donde la señal muestreada vuelve a ser periódica. Para que esto se cumpla el periodo de muestreo τ , no debe ser múltiplo entero del periodo de la señal. De esta manera, por la periodicidad de la señal se cumple que:

$$f(t + \mu\tau) = f[t + (M \pm 1)T]$$

Con lo cual se obtiene que:

$$\tau = \left(\frac{M \pm 1}{\mu} \right) T = \frac{T}{N} \left(1 \pm \frac{1}{M} \right)^\dagger$$

2.3 PERIODICIDAD EN μ' MUESTRAS, DONDE $\mu' < \mu = MN$.

Cuando se cumple la relación la relación:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{NM}{M \pm 1} = \begin{cases} n \\ \frac{m}{2} \end{cases}$$

para n y $m \in \mathbb{Z}$

se tiene que el periodo de la señal muestreada será el mínimo entero entre

$$\frac{T}{\tau} \text{ y } 2 \frac{T}{\tau}$$

es decir, el menor valor que a la vez sea un número entero. Esto puede expresarse como:

$$\mu' = m \epsilon \left\{ \frac{T}{\tau}, 2 \frac{T}{\tau} \right\}$$

Es fácil demostrar que si:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{NM}{M \pm 1} = \begin{cases} n \\ \frac{m}{2} \end{cases}$$

entonces, para un N dado se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{T}{\tau} = n \Rightarrow M = \frac{\mp n}{m - 2N} \\ \text{para } m = 2N + \text{MulEnt}\{N\} \\ \\ \text{si } \frac{T}{\tau} = \frac{m}{2} \Rightarrow M = \frac{\mp n}{n - N} \\ \text{para } n = N + \text{MulEnt}\{N\} \end{array} \right.$$

† Esta relación fue enunciada anteriormente como un teorema dada su aplicación generalizada y su gran importancia en este desarrollo teórico.

donde $MulEnt\{N\}$ representa un múltiplo entero de N . Esto indica que hay varios valores posibles para m y n .

De manera general:

$$\mu' = m e \left\{ M N, \frac{T}{\tau}, 2 \frac{T}{\tau} \right\}$$

2.4 TÉCNICA DE MUESTREO POR DESFASE

Partiendo de una señal periódica con periodo T conocido y suponiendo que es posible muestrear la señal con un periodo de muestreo de la forma:

$$\tau = \frac{T}{N} \left(1 \pm \frac{1}{M} \right) \quad (1)$$

Entonces, bajo esta condición, la muestra perteneciente a un periodo se aleja de la primera muestra de su periodo en un factor

$$\Delta\phi = \pm \frac{T}{M}$$

ver Figura 1, y para M periodos se obtiene que se ha ganado un periodo de señal, si el signo en (1) es positivo, o se habrá perdido un periodo de señal si el signo en (1) es negativo.

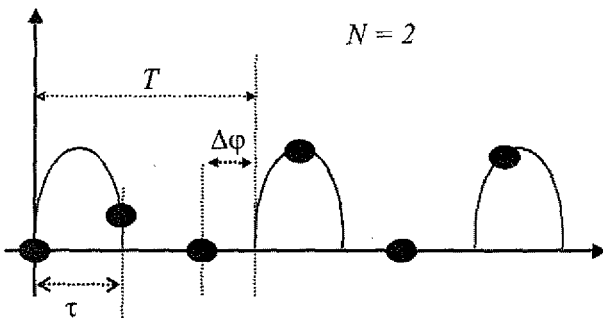


Figura 1. Esquema de muestreo por desfase para $N = 2$. Los puntos indican la muestra tomada de la señal de periodo T .

Se muestrea la señal, partiendo de $t = 0$, con periodo de muestro τ durante M periodos de la señal (como mínimo), es decir, durante un tiempo $t = M T$. Para reconstruir un periodo de la señal con $\mu = M N$ muestras se procede a formar los vectores de tiempo y señal de la forma:

$$t[n + m] = n\tau + m\Delta\phi$$

$$x[n + m] = f[(n + m)\tau]$$

para $n = 0, 1, \dots, N - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M - 1$

Donde los valores de n y m se toman así: inicialmente se toma $m=0$ y se varia n desde cero hasta $N-1$, luego

se va aumentando en uno a m y se repite el procedimiento de variar n desde cero hasta $N-1$. Se repite hasta que $m=M-1$.

Al realizar este procedimiento se conforma más de un periodo con todos los datos muestreados, para conformar un solo periodo es necesario encontrar todos los

$$t[k = n + m] < 0$$

y se cambian por

$$t[k = n + m] \leftarrow t[k = n + m] + T$$

A continuación se organiza el vector t ascendentemente, guardando las posiciones iniciales y las nuevas y con ellas se organiza el vector x , obteniendo un periodo conformado por $\mu = M N$ muestras espaciadas igualmente.

El espaciamiento temporal de los datos finales al muestreo realizado será:

$$\left| \frac{\Delta\phi}{N} \right| = \frac{T}{\mu} = \frac{T}{NM}$$

Esto quiere decir, que el periodo de muestreo aparente será $\frac{T}{NM}$

el cual es mucho menor que τ .

2.5 SIMULACIÓN DE MUESTREO POR DESFASE NEGATIVO DE UNA SEÑAL SINUSOIDAL.

Se tomó una señal sinusoidal con un periodo $T = 10^{-3} s$. La señal fue muestreada tomando 3 muestras por periodo durante 30 periodos, con lo cual: $\tau = 3.3 \times 10^{-4} s$. En la figura 2 se presentan los nueve primeros datos (correspondientes a tres primeros periodos) de la señal muestreada.

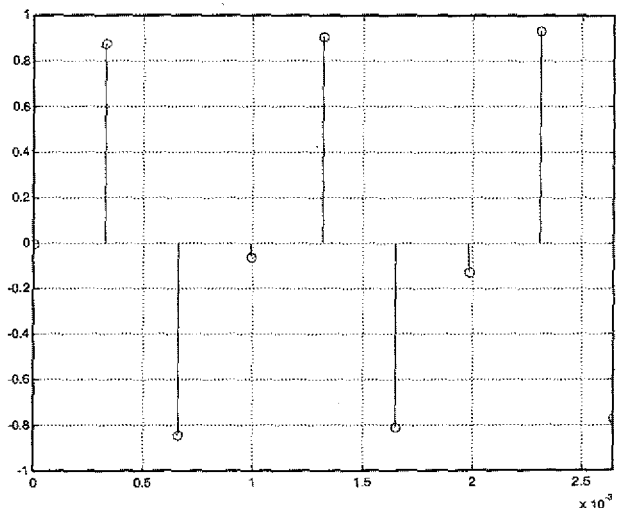


Figura 2. Primeros tres periodos de la señal muestreada.

Al hacer el primer paso de la reconstrucción de la señal se obtuvieron dos periodos de ésta, ver figura 3.

La señal reconstruida y su análisis frecuencial. [4] son presentados en la figura 4.

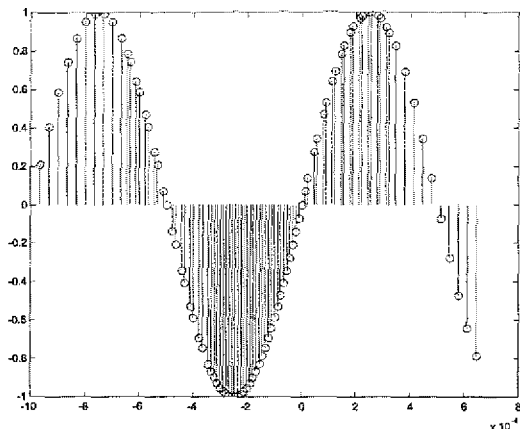


Figura 3. Primera etapa de conformación de la señal muestreada.

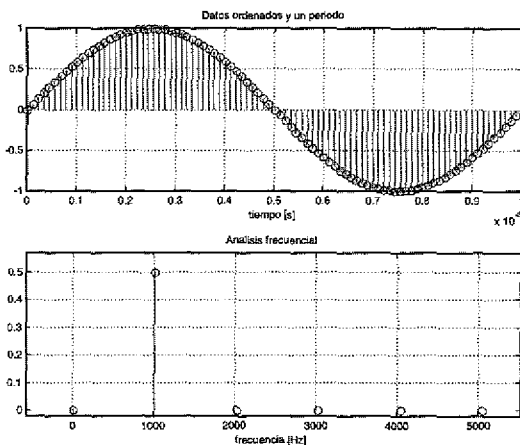


Figura 4. Señal obtenida.

3. MÁS ALLÁ DE NYQUIST

El teorema de muestreo de Nyquist plantea que para muestrear una señal periódica el periodo de muestreo debe ser menor a la mitad del periodo de la señal [2]. Esto quiere decir que se deben tomar como mínimo dos muestras por periodo. Tomemos un ejemplo particular para explorar una situación que se presenta al tomar una muestra por periodo satisfaciendo los requerimientos de la teoría de muestreo por desfase: supongamos que queremos muestrear la señal del ítem 2.5, pero tomando sólo una muestra por periodo durante un tiempo igual a treinta veces el periodo de la señal analógica y un periodo de muestreo de la forma (1). Al aplicar la técnica de muestreo por desfase para recuperar la señal se obtiene lo presentado en la figura 5. Como puede apreciarse,

se recuperó completamente la señal muestreada a pesar muestrear la señal con un periodo de muestreo mayor a la mitad del periodo de la señal. A continuación se hace un análisis de Fourier de la teoría de muestreo por desfase para mostrar que a pesar que el teorema de Nyquist no se satisface al muestrear la señal analógica, la función digital obtenida sí satisface el teorema de muestreo de Nyquist.

3.1 ANÁLISIS EN FRECUENCIA DE LA TEORÍA DE MUESTREO POR DESFASE

De acuerdo a lo presentado anteriormente se puede deducir que la señal muestreada con la teoría de muestreo por desfase puede ser escrita como:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot \delta(t - k\tau)] * \delta(t + \phi_k) \quad (2)$$

Nótese que (2) puede ser comparada con la función de muestreo tradicional, donde $x(t)$ es la señal a muestrear y ϕ_k es la función que reorganiza las muestras.

Resolviendo la convolución definida en (2) y aplicando la transformada de Fourier se llega a:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \delta(t' - k\tau) \cdot \delta(t - t' + \phi_k) e^{-j\omega t} dt' \quad (3)$$

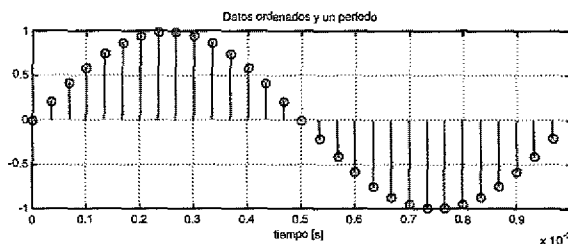
Al resolver la doble integral usando las propiedades del delta de Dirac se obtiene:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \cdot e^{-j\omega(k\tau - \phi_k)} \quad (4)$$

Si se define $\alpha_k = k\tau - \phi_k$ y se reemplaza en (4) se encuentra la expresión:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\alpha_k + \phi_k) \cdot e^{-j\omega\alpha_k} \quad (5)$$

Para analizar la ecuación (5) es necesario comparar la teoría de muestreo por desfase con el muestreo tradicional.



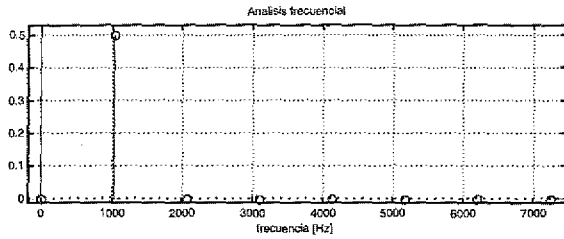


Figura 5. Muestreo de la señal utilizando el método de desfase.

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \cdot e^{-j\omega k\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k\tau + \phi'_k) \cdot e^{-j\omega \cdot k\tau} \quad (6)$$

Donde ϕ'_k es una función de reorganización arbitraria que da origen a la función y . Al comparar (6) con (5) es posible notar que la variación $\Delta\alpha_k$ en la ecuación (5) determina el periodo efectivo muestreo.

$$|\Delta\alpha_k| = |\Delta(k\tau - \phi'_k)| = \left| k \frac{T}{N} \left(1 \pm \frac{1}{M} \right) - \phi'_k \right| \quad (7)$$

Donde M es el número de periodos de señal en los cuales la señal va a ser recuperada, N , el número de muestras tomadas en cada periodo de señal, y T es el período de la señal que va a ser muestreada.

En el caso crítico de tomar sólo una muestra por periodo

$$\phi'_k = \pm k \frac{T}{N}, \text{ entonces (7) toma la forma:}$$

$$|\Delta\alpha_k| = \frac{T}{M \cdot N} \quad (8)$$

No es complicado demostrar que (8) es la expresión general para el periodo de muestreo aparente.

Lo anterior implica que para poder recuperar la señal $x(t)$, el sistema de muestreo debe tener un ancho de banda superior a

$$2 \frac{NM}{T}$$

para que no se traslape espectralmente la señal muestreada. Esto quiere decir que implícitamente se cumple el teorema de Nyquist, por lo tanto, se puede concluir que la teoría de muestreo por desfase es compatible con éste. La razón fundamental de la no contradicción entre el teorema de Nyquist y el teorema de muestreo por desfase es el hecho que para poder aplicar la teoría de muestreo por desfase (y por ende el teorema de muestreo por desfase) es necesario conocer de antemano el periodo de la señal a muestrear. El conocimiento de este periodo

y la forma como se define el periodo de muestreo (la cual hace que éste nunca sea igual al periodo de la señal) permiten recuperar una señal analógica aún tomando una sola muestra por periodo.

4. NECESIDAD DE GENERALIZACIÓN DEL MODELO TEÓRICO DEL MUESTREO POR DESFASE

Dada la importancia de la aplicación práctica del método de muestreo por desfase es importante estudiar las implicaciones prácticas del método y los requerimientos a los que conlleva. En este aspecto el método de muestreo por desfase presenta una dificultad debido a la fuerte restricción entre el periodo de muestreo y la frecuencia de la señal, por tal razón, el modelo teórico desarrollado hasta aquí debe ser generalizado. La generalización del método posibilita su implementación práctica extendiéndola a un número mayor de casos.

El muestreo por desfase está basado, básicamente, en la determinación de un periodo de muestreo τ relacionado con el periodo de la señal periódica a muestrear (de la cual se conoce su periodo) por medio de la expresión (1).

donde N es el número de muestras por periodo (puede, incluso, tomarse $N = 1$) y M es el número de periodos donde la señal muestreada vuelve a ser periódica.

Como puede observarse en (1), el tiempo de muestreo tiene una gran restricción al periodo de la señal y a los parámetros N y M . Las implicaciones directas de este hecho llevan a la necesidad de tomar un periodo de muestreo definido estrictamente como se plantea en la expresión (1), lo cual presenta dificultades prácticas, sobre todo, por la limitación en la resolución con la que puede ser escogido el tiempo de muestreo. Por ejemplo, si se utiliza un microcontrolador Motorola 64HC908jk3 con cristal de 5MHz, la máxima resolución en la escogencia del tiempo (utilizando interrupción por timer, es decir, el *Time Interfaz Module, TIM*, de este microcontrolador) será:

$$\frac{4}{5 \times 10^6 \text{ Hz}} = 8 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.8 \mu \text{ s}$$

Ahora, si el periodo de la señal a muestrear es

$$T = \frac{1}{8000 \text{ Hz}} = 125 \mu \text{ s}$$

y se toma $M=30, N=3$, entonces

$$\tau = \frac{T}{N} \left(1 - \frac{1}{M} \right) = 4.027 \times 10^{-5}$$

Nótese que este periodo de muestreo se obtiene para $50,3472^i$ cuentas del *TIM* del microcontrolador, lo cual es imposible de implementar dado que el número de cuentas debe ser entero, por lo tanto, el periodo de muestreo que puede ser implementado con este microcontrolador será $\tau = 4 \times 10^{-5}$, conduciendo a errores en el momento de implementar el algoritmo de reconstrucción de un periodo.

4.1 TEOREMA DE MUESTREO POR DESFASE GENERALIZADO

Sea $f(t)$ una señal periódica de periodo T conocido y τ el periodo de muestreo utilizado para obtener una señal digital $g(n)$ con N muestras por periodos y un número total de muestras $\mu = M N$. Si se cumple la relación

$$\tau = \frac{T}{N} + \frac{\Delta\phi}{N}$$

donde $\Delta\phi \in R$, entonces es posible reconstruir, para la señal discreta, un periodo con $\mu = M N$ muestras espaciadas regularmente en el tiempoⁱⁱ.

4.2 GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE MUESTREO POR DESFASE

Para dar respuesta a la dificultad práctica en la implementación del método de muestreo por desfase es necesario analizar el periodo de muestreo τ desde la perspectiva del retardo o desfase $\Delta\phi$. En términos de $\Delta\phi$ puede ser reescrito en tiempo de muestreo de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{T}{N} + \frac{\Delta\phi}{N} \quad (9)$$

Donde $\Delta\phi = \pm \frac{T}{M}$

Definiendo $\Delta\Psi$ como la diferencia entre un periodo y N veces el tiempo de muestreo τ , es decir, $\Delta\Psi = \pm(T - N\tau)$ entonces, el tiempo de muestreo pierde un grado de libertad al hacerlo explícitamente independiente del parámetro M . De esta manera

$$\tau = \frac{T}{N} + \frac{\Delta\Psi}{N} \quad (10)$$

Donde $\Delta\Psi$ se escoge de tal manera que se cumpla la relación:

$$|\Delta\Psi| \leq |\Delta\phi| \quad (11)$$

ⁱ Debe aclararse que el proceso de muestreo implica retardos adicionales, por lo tanto, este ejemplo debe tomarse de manera ilustrativa más que de estricto diseño.

ⁱⁱ Es importante aclarar que el valor de M en este caso se calcula con base en el periodo de la señal y el periodo de muestreo, es decir, está dado implícitamente y el factor $\Delta\phi$ corresponde al desfase.

La relación (11) permite la escogencia de un retardo $\Delta\Psi$ que cumpla con criterios prácticos. Es muy fácil demostrar que dado un $\Delta\Psi$ escogido de acuerdo a la relación (11), el número de muestras mínimo necesarias para reconstruir un periodo de señal estará dado por la expresión

$$\mu = MN = N \left\lceil \frac{T}{\Delta\Psi} \right\rceil \quad (12)**$$

4.3 RESULTADOS DE APLICAR MÉTODO DE MUESTREO POR DESFASE GENERALIZADO

Se hicieron pruebas utilizando un microcontrolador Motorola 68HC908jk3 con el cual se generó una onda cuadrada de periodo $T = 2,504\text{ms}$. Se utilizó la tarjeta de sonido del PC como sistema de muestreo, utilizando una frecuencia de muestreo de 8kHz , que corresponde a un periodo de muestreo $\tau = 125\mu\text{s}$. Esto corresponde a tomar 20 muestras por periodo.

Se muestreó la señal por 150 periodos, es decir, por un tiempo $t = 375,6\text{ms}$, obteniendo un total de 3005 muestras. En la figura 6 se presenta un periodo para la señal muestreada por el método de muestreo por desfase. La figura 7 muestra la magnitud de la respuesta en frecuencia de la señal muestreada y la señal conformada por el método de muestreo por desfase generalizado.

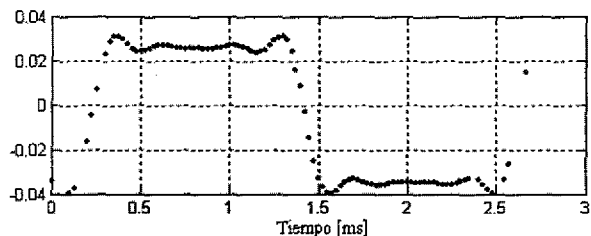


Figura 6. Resultados parciales obtenidos con el método de muestreo por desfase generalizado.

Como se puede observar en la figura 6, al aplicar la teoría de muestreo por desfase generalizada es posible observar el efecto del filtro pasabajos de la tarjeta de sonido sobre la señal muestreada, efecto Gibbs [3]. Este fenómeno no puede ser observado utilizando técnicas tradicionales de muestreo y la misma tarjeta de sonido, debido a que la frecuencia de muestreo para las técnicas tradicionales depende de la velocidad con que la tarjeta de sonido adquiere las muestras y para poder observar el efecto Gibbs [3] se necesita muestrear a una frecuencia mucho mayor al ancho de banda del sistema de muestreo.

** Debe aclararse que la expresión $\left\lceil \frac{T}{\Delta\Psi} \right\rceil$ indica tomar la parte entera de $\frac{T}{\Delta\Psi}$.

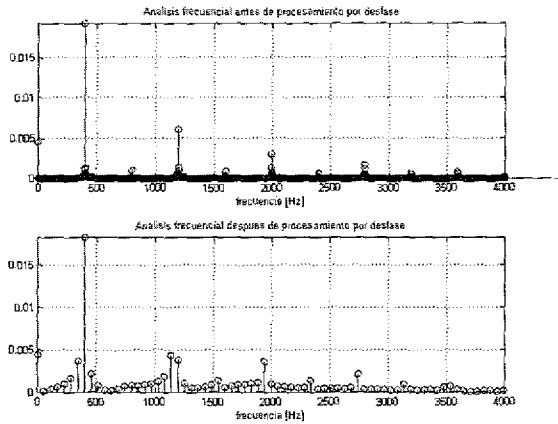


Figura 7. Magnitud de la respuesta en frecuencia para la señal muestreada y la conformada por el método de desfase generalizado.

5. ERROR INTRODUCIDO POR INESTABILIDAD EN LA FRECUENCIA DE LA SEÑAL A MUESTREAR POR TEORÍA DE MUESTREO POR DESFASE

Cuando una señal es muestreada usando teoría de muestreo por desfase, se pueden presentar pequeñas fluctuaciones en la frecuencia de la señal a muestrear, como se muestra en la figura 8. Una de las causas es que la fuente que genera la señal que se está muestreando no es estable, y su frecuencia está oscilando en un pequeño rango alrededor de una frecuencia central.

En la figura 8 es posible observar cómo la señal $x(t)$ (o señal sin error), con frecuencia f_0 , oscila cambiando su período, por pequeños instantes de tiempo, y se convierte en $x'(t)$, con frecuencia $f_0 + \Delta f$. Esta variación en la frecuencia de la señal introduce un error al aplicar la teoría de muestreo por desfase.

Suponiendo que $x(t)$ es la señal sin error y $x'(t)$ la señal con un instante $t' = t + \Delta t$, como se muestra en la figura 8, se puede definir el error para el intervalo de tiempo Δt como:

$$e_{\Delta t}(t) = x'(t) - x(t) \quad (13)$$

Si Δt es muy pequeño comparado con el período de la señal y se supone que la variación del período de la señal es pequeño, se puede aproximar $x'(t) \approx x(t + \Delta t)$. Reemplazando en (13):

$$e_{\Delta t}(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \quad e_A(t) = \frac{(x(t) - x(t - \Delta t))}{\Delta t} \Delta t \quad (14)$$

El error instantáneo se puede obtener haciendo una

expansión de $x(t + \Delta t)$ alrededor de $\Delta t = 0$, entonces se obtiene que:

$$e(t) \approx \frac{dx(t)}{dt} \Delta t \quad (15)$$

Nótese que Δt representa la diferencia temporal debido a la variación del período de la señal a muestrear. Esta variación tiene carácter aleatorio, por lo tanto, puede ser considerada como una variable aleatoria definida de la forma:

$$\tau(t) = \Delta t \quad (16)$$

Entonces, el error introducido por inestabilidad en el período de la señal a muestrear es de la forma:

$$e(t) \approx \frac{dx(t)}{dt} \tau \quad (17)$$

Para poder comprender mejor la expresión (17), supóngase que se quiere comparar el valor de la señal $x(t)$ en un instante dado con el error introducido por inestabilidad en la frecuencia. Se supondrá que $x_{real}(t)$ es el valor que se obtendría si no existiera inestabilidad en la frecuencia, $x_{medido}(t)$ el valor obtenido al muestrear la señal y $e(t)$ el error instantáneo por inestabilidad en el período. Entonces, estos tres términos estarán relacionados por:

$$x_{real} = x_{medido} + e(t) \quad (18)$$

Utilizando (17) se obtiene:

$$x_{real} = x_{medido} + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_p \tau(t) \quad (19)$$

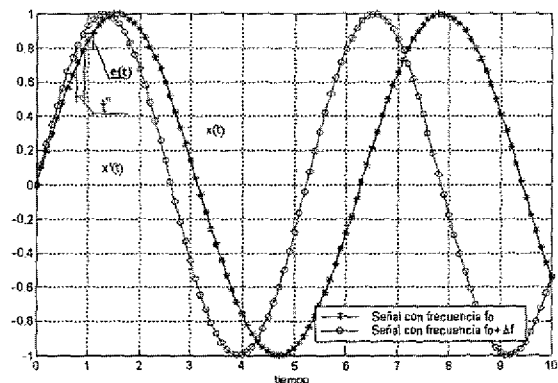


Figura 8. Oscilación de onda causada por la no estabilidad en el generador de señal

Si la $x(t) = x_0 \cdot \text{sen}(wt)$ y $\tau(t)$ es una variable aleatoria que representa la distribución temporal de la variación de $x(t)$ se encuentra que:

$$x_{real} = x_{medido} + 2 \cdot \pi \cdot x_0 \frac{\tau(t)}{\tau_0} \cos(2\pi \tau_0 t) \quad (20)$$

La expresión (20) muestra que el error al muestrear con la teoría de muestreo por desfase una señal que tiene variación en su periodo es de carácter aditivo, por lo tanto, si la fluctuación del periodo tiene media igual a cero, lo cual es común en la práctica, es posible obtener la señal con periodo central τ_0 promediando un cierto número de periodos de la señal digital obtenida con la teoría de muestreo por desfase. Lo anterior implica que se debe muestrear la misma señal varias veces utilizando teoría de muestreo por desfase y luego se deben promediar los periodos reconstruidos para cada aplicación de la teoría de muestreo por desfase.

En la figura 9 se muestra un periodo de una señal sinusoidal que presenta inestabilidad en el periodo y su reconstrucción sin realizar el promediado. La señal obtenida al aplicar teoría de muestreo por desfase seis veces y promediando los valores para los periodos obtenidos se muestra en la figura 10.

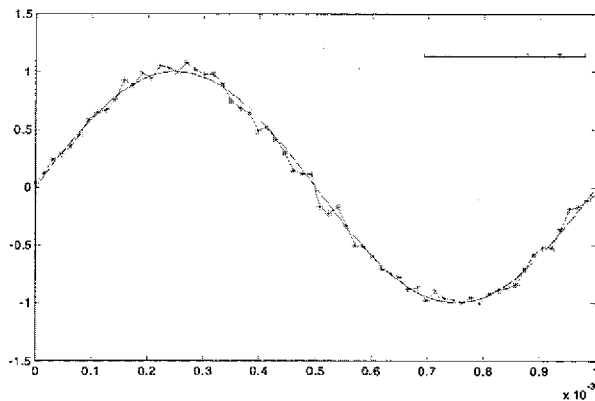


Figura 9. Comparación gráfica entre la señal real y la señal reconstruida sin promediado

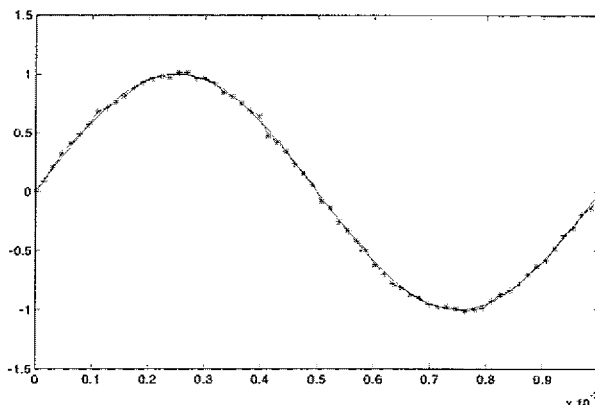


Figura 10. Comparación gráfica entre la señal real y la señal reconstruida y corregida por promediado

6. CONCLUSIONES

Es posible muestrear una señal periódica de alta frecuencia, con periodo conocido, utilizando una frecuencia de muestreo relativamente baja, es decir, un periodo de muestreo relativamente alto. Para ello se puede utilizar la teoría de muestreo por desfase, permitiendo, al tomar N muestras por varios periodos, reconstruir un periodo de la señal con un número de muestras que depende del factor de desfase, el periodo de la señal y el número de muestras por periodo. El método de muestreo por desfase está basado en dos teoremas que permiten su aplicación a varios problemas.

El análisis de Fourier de la teoría de muestreo por desfase muestra que ésta está en concordancia implícita con el teorema de muestreo de Nyquist. Además, el error que se puede presentar al reconstruir la señal cuando ésta presenta inestabilidad en su frecuencia puede ser minimizado promediando varios periodos reconstruidos por la teoría de muestreo por desfase.

Se espera que al utilizar esta técnica en los medidores de impedancia eléctrica que se están diseñando en el grupo de investigación interdisciplinario CIMBIOS, y en la Escuela de Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones de la UIS, obtener una alta resolución en el dominio de la frecuencia por el efecto de sobre-muestreo se puede lograr, sin tener que recurrir a costosos conversores A/D.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] WATERWORTH A.R, MILNES P, SMALLWOOD R H and B. H. BROWN. "Cole equation modeling to measurements made using an impulse driven transfer impedance system". *Physiological Measurement*, 21 (2000) pp 137-144
- [2] J. G. PROAKIS, D. G. MANOLAKIS. *Tratamiento Digital de Señales*, 3ª edición. Prentis Hall. España. 2000.
- [3] OPPENHEIM ALAN V., SCHAFER RONALD W. *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd Edition. Prentis Hall. España. 1999.
- [4] BURRUS C. SIDNEY, McCLELLAN JAMES H., OPPENHEIM ALAN V. *Computer Based Exercises for Signal Processing Using Matlab*. Prentice Hall. International, Inc. 1994.

8. AUTORES



**DAVID ALEJANDRO
MIRANDA MERCADO**

Was born in Medellín, Colombia, in 1979. He received his Electronic Engineering degree (2003), Physicist degree (2004), and Engineer Master degree (2005) from the Universidad Industrial de Santander of Bucaramanga, Colombia.

He is currently Lecturer at the Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. His research interests are in the field of bioengineering and condensates matter physics. He has worked in the research of new technologies to early cancer detection, material characterizations, numerical modeling and simulation of tissue properties.

JAIME GUILLERMO BARRERO PÉREZ

Ingeniero Electricista, Magister en Potencia Eléctrica, UIS.
Profesor Titular Universidad Industrial de Santander.