Estudio De Modelos De Apoyo Al Proceso De Asignación De Cupos Escolares En El Sistema De Educación Pública Del Distrito Capital

PABLO ANDRÉS MAYA DUQUE
MsC Ingeniería Industrial
Profesor Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Antioquia
pmaya@udea.edu.co

Fecha Recepción: 12/02/2007
Fecha Aceptación: 28/05/2007

Resumen

En el proceso de asignación de cupos escolares, en los colegios públicos del distrito de Bogota, es posible identificar como una situación problemática la asignación de cupos a los estudiantes que ingresan nuevos al sistema de educación pública. Dicha asignación puede modelarse de manera similar a un problema de asignación con objetos repetidos, la solución de este problema aumenta su complejidad al considerar el gran número de estudiantes que deben ser asignados y la presencia de restricciones adicionales. Se discuten en este documento estrategias de solución al problema de optimización inherente a la asignación de cupos, que se distancian del enfoque greedy que rige el procedimiento de solución actual. Inicialmente se discute el algoritmo de generación de columnas, específicamente el algoritmo Branch-and-Price. Dadas las dificultades en la convergencia de este algoritmo se estudia el algoritmo de Subastas. Para cada una de las estrategias discutidas se describen los aspectos mas importantes, se presentan los aspectos más relevantes de su implementación y por ultimo se plantea la forma como podrían incorporarse dentro del proceso de asignación que actualmente se ejecuta

PALABRAS CLAVE: Problema de Asignación, Generación de columnas, Branch and Price, Algoritmo de subastas

Abstract

The assignation of new students to schools could be considered a problem into the process that manages the student places at the Bogotá educational system. It is possible to model that problem like an assignation with similar objects, the solutions of this problem increase in complexity when consider the large number of students and other additional restrictions. This Document explores two strategies to approach the student assignation problem, which differ from the current "greedy" algorithm that is used into the assignation process. Initially a Branch and Price algorithm is discussed which presents convergence problems, and then the Auction Algorithm is studied.

KEY WORDS: Assignment Problem, Column Generation, Branch and Price, Auction Algorithm.

1. Descripción de la situación problemática

Con base en la definición del proceso de matriculas, hecho por la Secretaria de Educación distrital (SED), el conjunto de estudiantes cubiertos por el sector oficial es caracterizado de la siguiente forma:[1]

A. Estudiantes Antiguos: Estudiantes que se hayan matriculado para el año 2004 en las IED, CED, los colegios distritales en conseción y los colegios privados en convenio.

B. Estudiantes Nuevos: Aquellos que deseen acceder al servicio, que no se encuentran registrados como matriculados en la base de datos del sistema de la SED. Dentro de este conjunto de estudiantes podrían distinguirse

i. Estudiantes Nuevos transición y primero: Aspiran a ingresar al sistema educativo público del distrito en el grado cero (0° o Transición) y primer grado (1°). Se consideran como estudiantes nuevos, los niños y niñas que han estado vinculados al DABS y el ICBF durante el año lectivo anterior y que desean ingresar al grado de transición en el sector oficial.

[1] Basado en la Resolución 4040 y 5578 de 2004

ii. Estudiantes Inscritos Contra Oferta Educativa: Interesados en ingresar al sistema educativo oficial para cualquiera de los grados o niveles ofrecidos. Esta población se denomina inscritos contra oferta educativa disponible.

Dentro de cada uno de estos conjuntos de estudiantes es importante distinguir aquellos pertenecientes a grupos vulnerables (desvinculados del conflicto armado, desplazados, hijos de desmovilizados, hijos de víctimas del secuestro y desaparición forzada entre otros) a los cuales se otorgará prioridad en la asignación de cupos.

Las etapas para desarrollar la asignación de cupos están definidas para cada uno de estos grupos de estudiantes. Para una gran parte del conjunto de estudiantes antiguos la asignación de cupos se lleva a cabo mediante la estrategia de renovación automática y los procedimientos definidos para el traslado de estudiantes ya vinculados al sistema de educación público. Por otra parte, la asignación de los estudiantes provenientes del DABS y el ICBF así como los estudiantes nuevos, son instancias particulares del problema de asignación que se desea estudiar, para las cuales debe desarrollarse dicho proceso bajo la consideración de limitaciones de capacidad y restricciones adicionales. El proceso de asignación para este último conjunto de estudiantes se desarrolla, principalmente, de acuerdo con el siguiente lineamiento de la SED:

"La SED asignará los cupos escolares preferiblemente en las opciones seleccionadas por el padre, madre o acudiente. De no existir cupo en las opciones solicitadas, se asignará en las instituciones cercanas a su lugar de residencia (de acuerdo con la dirección suministrada en el formulario). Si una vez surtido este proceso, no es posible asignar un cupo, la SED recurrirá a otras estrategias de cobertura"(Resolución 4040 de 2004)

La asignación de cupos se lleva a cabo de acuerdo con el cronograma del proceso de matrículas, según el cual, se asignan primero los estudiantes del DABS y el ICBF, luego los estudiantes vulnerables y de transición y 1° y por ultimo los estudiantes inscritos contra la oferta educativa. En cada una de estas etapas se desarrollan las estrategias definidas para la asignación de cupos a los estudiantes. En primer lugar, se desarrolla la asignación por Opciones, la cual asigna a los estudiantes con respecto a las opciones presentadas en el formulario y considerando las prioridades en la asignación[2]; para ello ordena los estudiantes con respecto a su prioridad para en este orden desarrollar el proceso de asignación. Posteriormente, aquellos estudiantes que no fueron asignados en alguna de las opciones seleccionadas, son asignados por georeferenciacion, es decir nuevamente se recorre en orden, de acuerdo a las prioridades, el conjunto de estudiantes asignando cada uno de ellos tan cerca como sea posible a su residencia. Por ultimo, la asignación por Bloques, pretende generar estrategias de asignación para aquellos estudiantes a los que no fue posible asignarles un cupo mediante las dos estrategias anteriores, haciendo uso para ello de las distintas herramientas para ampliar la cobertura que diseñe la secretaria.

De acuerdo con la información suministrada por la SED el total de estudiantes Nuevos inscritos hasta marzo de 2005 ascendía a 223,537 de los cuales cerca de 170,753 se encontraban matriculados. La distribución de la demanda generada por los alumnos nuevos en cada uno de los grados, hace que el problema de asignación involucrado en este proceso deba considerar en algunos casos más de 30,000 estudiantes simultáneamente[3]. Este hecho genera una complejidad importante dentro del proceso de asignación y otorga mayor importancia a su estudio y análisis.

Respecto a la forma como actualmente se desarrolla el proceso de asignación de cupos en el distrito, es posible observar su similitud con los algoritmos "greedy" diseñados para problemas similares. Si bien permite encontrar una solución factible al problema, podría perjudicar en el objetivo de encontrar una asignación que favorezca a un mayor número de estudiantes, respecto a la asignación de colegios más cercanos y convenientes a sus necesidades y expectativas.

2. Formulación de Problema

Se pretende abarcar el problema de la asignación de cupos escolares para el conjunto de estudiantes nuevos e inscritos contra la oferta educativa) para el sistema de educación oficial del distrito. De manera bastante general, el problema puede enunciarse de la siguiente forma:

Dado un conjunto de estudiantes que aspiran a un cupo, en determinado grado, en alguno de los colegios distritales, y dado un conjunto de colegios, con una capacidad (oferta) determinada (por grado); deben asignarse los estudiantes a los colegios, de modo que se maximice una función del beneficio (en términos de la distancia y prioridades, entre otras) para dicha asignación.

Este problema puede formularse como se presenta en el problema **P1**, que en adelante se denominará *formulación estándar*:

Sea:

I : Conjunto de Estudiantes para asignar. Indexado con i, $|I| = n$

J : Conjunto de Instituciones . Indexado con j, $|J| = m$

[2] Estas prioridades son el resultado de la evaluación que hace la Secretaria de Educación de las diferentes características del estudiante; por ejemplo, el estrato socio económico, el SISBEN y el tipo de población a la cual pertenece. Como resultado de la evaluación se asigna al menor un cierto nivel de prioridad para su asignación.

[3] Construidas a partir de l información suministrada por la Secretaria de Educación

c_{ij} : Beneficio de asignar el estudiante i a la institucion j

b_j : Beneficio de asignar el estudiante i a la institucion j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el estudiante } i \text{ es asignado al colegio } j \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$Max \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a. \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I \qquad (1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = b_j \qquad \forall j \in J \qquad (2)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I \wedge \forall j \in J \qquad (3)$$

El conjunto de restricciones (1) y (2) garantizan, respectivamente, que cada estudiante será asignado a algún colegio y que el número de estudiantes asignados a un colegio particular no sobrepasara la capacidad de cupos de este. Note que se asume que el número de estudiantes que deben asignarse es igual al número de cupos en los colegios; de hecho, en este problema particular esta condición no se satisface; sin embargo, puede modificarse ligeramente el problema para satisfacerla.

Es importante resaltar algunos aspectos respecto al problema básico presente en el proceso de asignación de cupos escolares **(P1)**

- La estructura de este problema puede asemejarse a algunos problemas típicos y bien estudiados.[1] y [3] Este hecho determinarla los distintos algoritmos que se estudien para su solución. Específicamente, el problema en **(P1)** se asemeja a un Problema de Asignación Generalizada (GAP). De igual forma, el problema en **(P1)** puede ser visto como un caso particular de un problema de transporte o de un problema de asignación.

- El problema en (P1) es bastante general, en el se asume que cualquier estudiante puede ser asignado a cualquier colegio y que las restricciones de asignación para todos los colegios son iguales. Sin embargo, podría ser necesario considerar restricciones respecto a los colegios a los cuales un estudiante dado puede ser asignado o las asignaciones factibles de cada colegio.

- El valor cij que representa el beneficio de asignar el estudiante i a la institución j, es en realidad el resultado de una función que involucra aspectos como la prioridad de asignación, las preferencias expresadas por los padres y la ubicación (distancia) del estudiante respecto a la institución.

Las siguientes secciones presentan algunas estrategias que podrían emplearse para la solución de este problema en instancias de gran escala.

3. Estrategia de Solución: Generación De Columnas

Esta estrategia de solución se fundamenta en el principio de descomposición y en el uso del esquema de generación de columnas, ideas que fueron desarrolladas por Dantzing y Wolfe y Gilmore y Gomory respectivamente. [9], [15]

3.1 DESCOMPOSICIÓN DE DANTZING-WOLFE

El Problema en la formulación estándar, P1, puede ser entendido como la partición del conjunto de estudiantes en subconjuntos que pueden ser asignados a cada institución maximizando en dicha partición el beneficio de la asignación.[12] Bajo esta óptica el problema puede reformularse de una forma alterna considerando:

$i.)$ $K_j = \{x_1^j, x_2^j, \ldots, x_{k_j}^j\}$ Conjunto de las asignaciones factibles para la institución j

$ii.)$ $x_k^j = \{x_{1k}^j, x_{2k}^j, \ldots, x_{nk}^j\}$ Corresponde a la k-ésima asignación factible ra la institución j, si:

$$\sum_{i \in I} x_{ik}^j = b_j \qquad x_{ik}^j \in \{0,1\} \qquad (4)$$

$iii.)$ Se define y_k^j para todo $j \in J$ y $k \in K_j$ como:

$$y_k^j = \begin{cases} 1, & \text{Si la asignación factible } x_k^j \text{ es seleccionada para la institución j} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así el problema se puede formular como:

$$Max \quad \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} \left(\sum_{i \in I} c_{ij} x_{ik}^j \right) y_k^j$$

$$s.a. \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} x_{ik}^j y_k^j = 1 \qquad \forall i \in I \qquad (5)$$

$$\sum_{k \in K_j} y_k^j = 1 \qquad \forall j \in J \qquad (6)$$

$$y_k^j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \wedge \forall k \in K_j \qquad (7)$$

La formulación en **(P2)** se denominarla en adelante *formulación desagregada*. En esta formulación, la restricciones (5) y (6) garantizan, respectivamente, que cada estudiante es asignado a una institución y que para cada institución es seleccionada una asignación factible.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

El algoritmo de generación de columnas permite resolver la relajación lineal del problema en la formulación desagregada(P2). Si bien el interés recae en la solución del problema entero, posteriormente se evidencia la utilidad que la solución de la relajación lineal tiene para este fin.

La idea del algoritmo es resolver el problema lineal por medio de la aplicación del Método Simplex; sin embargo, dada la enorme cantidad de columnas (asignaciones factibles) para cada colegio, en lugar de evaluar todas las columnas respecto a su costo reducido, para determinar cual debe adicionarse a la base, el problema de encontrar la columna con el mayor costo reducido es en si mismo un conjunto de m problemas de optimización. El procedimiento desarrollado en el algoritmo puede describirse de la siguiente forma.[4]

1. Inicialización. Debe disponerse de un subconjunto de columnas que provean el Problema Lineal Maestro Restringido (PLMR) para el cual sea posible determinar una solución básica factible, de modo que cualquier solución básica factible del problema restringido lo es también para el problema no restringido.

2. Prueba de Optimalidad para el Problema no Restringido. Debe determinarse si la solución factible encontrada es óptima para el problema restringido, para ello se determina si es posible hallar una columna con costo reducido positivo para adicionar a la base, usando para ello los precios duales asociados a la solución del problema restringido. De no existir dicha columna la solución actual de problema restringido es óptima, y también lo es para el problema no restringido.

3. Generación de una Nueva Columna. En caso de no satisfacerse las condiciones de optimalidad, una (o varias) columna con costo reducido positivo debe ser adicionada generándose un nuevo Problema Maestro Restringido, el cual puede ser reoptimizado para volver al segundo paso del algoritmo.

3.3 CONVERGENCIA DEL ALGORITMO

Para el algoritmo de generación de columnas es conocida su convergencia lenta; lo cual genera que el algoritmo requiera de un tiempo considerable hasta obtenerla optimalidad de la solución e incluso tarde en decretar la optimalidad de soluciones óptimas degeneradas. Este hecho se conoce como el efecto Tailing-off. [15]

Dos aspectos se destacan en la literatura respecto al problema de convergencia del algoritmo y su aplicación al problema de asignación o transporte. En primer lugar el problema presenta una notoria degeneración, lo cual puede afectar la eficiencia del algoritmo [3]. El segundo aspecto, es el comportamiento del valor de las variables duales; estas variables presentan grandes oscilaciones durante el proceso de solución, la ausencia de este comportamiento es vista como una propiedad deseable [15].

3.3.1 Estrategias de Estabilización

Con el fin de atenuar el problema de convergencia lenta y degeneración en la aplicación del algoritmo de generación de columnas, se han propuesto diferentes procedimientos, principalmente enfocados a la estabilización de los valores duales.[10] Una estrategia de simple aplicación, sugiere formular el problema de modo que las restricciones de igualdad puedan ser sustituidas por desigualdades, sin alterar el valor de la solución óptima. El hecho de sustituir las restricciones de igualdad por desigualdades restringe el valor de las variables duales a ser bien sea no negativas o no positivas en lugar de ser variables libres en signo, este hecho reduce la oscilación de dichas variables. El cambio en las restricciones de asignación de los estudiantes reduce las *oscilaciones en la solución dual; sin embargo, la solución de ambas formulaciones presenta evidencia del efecto de tailing-off,* lo cual sugiere la necesidad del uso de otras estrategias de estabilización para mejorar la convergencia del algoritmo. Para este problema en particular se decidió hacer uso de un método de estabilización y aceleración del algoritmo cuya principal característica es permitir su implementación en el marco de la programación lineal. La estrategia empleada se describe detalladamente en [19][5], a continuación se presentan los aspectos más relevantes al respecto:

Considere el siguiente programa lineal (**P**), factible y acotado, y su correspondiente dual (**D**), en donde (**P**) tiene un número considerable de variables y se hace uso del algoritmo de generación de columnas para su solución.

PROBLEMA PRIMAL (P)	PROBLEMA DUAL (D)
$\begin{aligned} Max\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.a. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} Min\ & \mathbf{b}^T\pi \\ \text{s.a. } & \mathbf{A}^T\pi \geq \mathbf{c} \end{aligned}$

Una forma de atenuar la degeneración en la solución es mediante la perturbación de (**P**), adicionando variables de holgura y de exceso acotadas. Alternativamente, podría usarse penalizaciones explícitas para las variables duales. La estrategia propuesta en [19] combina el método de perturbación y de penalizaciones explícitas, de la siguiente forma:

Se define el programa lineal $(\tilde{P})$ y su correspondiente dual $(\tilde{D})$

PROBLEMA PRIMAL $(\tilde{P})$	PROBLEMA DUAL $(\tilde{D})$
$\begin{aligned} Max\ & \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\delta}^T\mathbf{y}^- + \boldsymbol{\delta}^T\mathbf{y}^+ \\ \text{s.a. } & \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}^- + \mathbf{y}^+ = \mathbf{b} \\ & \mathbf{y}^- \leq \boldsymbol{\varepsilon}^- \\ & \mathbf{y}^+ \leq \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ & \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}^-, \mathbf{y}^+ \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} Min\ & \mathbf{b}^T\tilde{\pi} + \boldsymbol{\varepsilon}^-\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}^+\mathbf{w} \\ \text{s.a. } & \mathbf{A}^T\tilde{\pi} \geq \mathbf{c} \\ & -\tilde{\pi} + \mathbf{v} \geq -\boldsymbol{\delta} \\ & \tilde{\pi} + \mathbf{w} \geq \boldsymbol{\delta} \end{aligned}$

En el problema primal $(\tilde{\mathbf{P}})$, y^- y y^+ son vectores de variables de exceso y holgura, con cotas superiores ε^-

---

[4] Basado en [13]. Una mejor descripción, con mayor nivel de detalle, del algoritmo de generación de columnas se presenta en [7]

[5] Una implementación particular de esta estrategia para la solución del problema GAP puede consultarse en [20]

y ε^+, respectivamente. En el problema Dual ($\tilde{D}$), las dos últimas restricciones pueden reescribirse como $\delta - w \leq \pi \leq \delta + v$ la cual cuantifica la penalización de las variables duales π.[19]. Observe que la solución de los dos problemas, **P** y $\tilde{\mathbf{P}}$, son iguales cuando se satisface que $\varepsilon^- = \varepsilon^+ = 0$, lo cual motiva el algoritmo de solución. Así, el algoritmo empleado es esencialmente el mismo planteado anteriormente; sin embargo, es necesario observar algunas consideraciones a la actualización de los nuevos parámetros (δ, ε^- y ε^+)

La implementación en Mosel del algoritmo permitió correr instancias de prueba. Las Figura 1. presenta el resultado de aplicar la estrategia de estabilización en la formulación en la cual la restricción de asignación de cada estudiante se cambió por desigualdad. La imagen presenta un detalle de las primeras iteraciones, hasta alcanzar optimalidad en el algoritmo estabilizado.

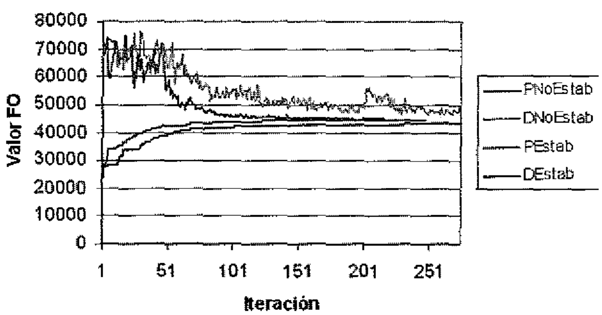

Figura 1. Generación de Columnas. Estabilización del algoritmo

Es posible observar como el número de iteraciones requerido hasta encontrar la solución óptima se reduce considerablemente, pasando en este caso de más de 1200 iteraciones a cerca de 250 iteraciones. Adicionalmente, puede verse como la variabilidad de la solución dual se reduce, principalmente a partir de cierto número de iteraciones iniciales.

3.4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ENTERO (NO RELAJADO) P2

Un aspecto de importancia respecto a la solución del problema entero esta relacionado con el hecho de que la solución de ambos problemas, la relajación lineal y el problema entero, coinciden. Dada esta consideración, el algoritmo de generación de columnas puede usarse para determinar la solución del problema básico de optimización inmerso en el proceso de asignación de cupos escolares; sin embargo, es importante señalar, que la solución de instancias con restricciones adicionales, es decir que no correspondan a la forma básica del problema presentado, no necesariamente satisfacen que la solución del problema relajado sea entera, en cuyos casos será necesario recurrir a algoritmos como el de Branch-and-Price.

4. Estrategia de Solución: Algoritmo de Subasta

Esta sección describe la generalización del algoritmo de subasta para problemas de asignación, de modo que permita la solución del problema particular en (P1).

4.1 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO DE SUBASTAS

En el problema clásico de asignación hay n personas (estudiantes) y n objetos (cupos) que deben serles asignados. La asignación del cupo j al estudiante i genera vun beneficio c_{ij}, se pretende asignar los cupos a los estudiantes de modo que se maximice el beneficio total obtenido.

Sea S una asignación, es decir el conjunto de pares estudiante-cupo (i, j), de modo que cada estudiante i y cada cupo j esta presente en máximo un par en S. si el número de pares en S es n entonces se dice que S es factible, en caso contrario se dice que no es factible. Se pretende entonces encontrar una asignación S factible, la cual sea óptima, es decir que maximice $\sum_{(i,j)\in S} c_{ij_i}$

Definiendo este como el problema de asignación primal, puede observarse la equivalencia con un problema de flujo en redes de Programación Lineal.

Para comprender intuitivamente el algoritmo es importante destacar un problema de equilibrio económico equivalente al problema de asignación. Considere la asignación de n objetos a n personas a través de un mecanismo de mercado, donde cada persona corresponde a un agente económico que busca su máximo beneficio personal. Suponiendo que cada objeto j tiene un precio p_j y que la persona a la cual le sea asignado el objeto pagaría este precio por el, el valor del objeto j para la persona i es $c_{ij} - p_j$ y cada persona i pretenderá que le sea asignado el objeto j_i con máximo valor, es decir:

$$c_{ij} - p_j = \max_{k \in J} \{c_{ik} - p_k\} \qquad \forall (i,k) \in S \tag{8}$$

El sistema estaría entonces en equilibrio, debido a que ninguna persona estaría incentivada a actuar unilateralmente, para buscar otro objeto diferente al que le ha sido asignado. [5]

Si bien la interpretación economía del algoritmo permite su comprensión intuitiva, una relación fundamental existe entre el equilibrio económico señalado y el programa lineal correspondiente: una asignación S que genera dicho equilibrio, ofrece el máximo beneficio total, resolviendo el problema de asignación, mientras que el correspondiente conjunto de precios p_j resuelve el problema dual asociado.

Es decir, una asignación factible S y un vector de precios p_j son primal y dual óptimos simultáneamente si y solo si cada persona logra su máximo beneficio (utilidad) siendo asignada al objeto que le ofrece mayor valor, puede mostrarse que este hecho corresponde a las condiciones de holgura complementaria. En [5] y [6] se demuestra esta relación.

Un primer algoritmo para encontrar una asignación S que genere el equilibrio y el vector de precios asociado se desarrolla en iteraciones. Al comenzar cada iteración las condiciones de holgura complementaria (8) son satisfechas por todos los pares $(i, j) \in S$; si todas las personas han sido asignadas el algoritmo termina, en caso contrario una de las personas que no ha sido asignada es seleccionada y se desarrolla una nueva iteración. Cada una de las iteraciones esta compuesta de dos fases:

1. __Fase de Oferta__: Para una persona i en el conjunto de personas no asignadas, se determina el objeto que genera el mayor valor j_i^*

$$j_i^* \in \arg\max_{j \in J} \{c_{ij} - p_j\} = v_{ij_i^*} \qquad (9)$$

Se calcula además la oferta de la persona i por el objeto j_i^*, dada por,

$$b_{ij_i^*} = p_{j_i^*} + v_{ij_i^*} - w_i \qquad (10)$$

Donde, w_i es el mejor valor $(c_{ij} - p_j)$ para otro objeto diferente de j_i^*

2. __Fase de Asignación__: Se asigna el objeto j_i^* a la persona i, dado el caso en el cual este objeto ya estaba asignado a otra persona, entonces esta entra a formar parte del conjunto de personas no asignadas. Por ultimo se incrementa el precio del objeto de modo que este se haga igual a la oferta hecha por i, es decir, el nuevo precio del objeto será, $b_{ij_i^*}$

El algoritmo continúa hasta que el conjunto de personas a las cuales no se ha asignado algún objeto esta vacío. En el algoritmo descrito podría generarse un ciclo infinito cuando mas de un objeto ofrece la máxima valoración, lo cual genera que el precio de los objetos no cambie y el algoritmo se atasque.[14] Para salir de el ciclo generado, se introduce un mecanismo de perturbación[6].

Sea ε un valor escalar fijo positivo, se dice que una asignación S y un vector de precios $\boldsymbol{p}$ satisface las ε-condiciones de holgura complementaria, $(\varepsilon - CS)$, si se satisface:

$$c_{ij} - p_j \geq \max_{k \in J} \{c_{ik} - p_k\} - \varepsilon \qquad \forall (i,k) \in S \qquad (11)$$

[6] Motivado en las Subastas reales, en las cuales cada oferta por un objeto debe incrementar el precio actual del objeto [5]

Es decir, se satisfacen $(\varepsilon - CS)$, si todas las personas pueden ser asignadas a objetos que están a una cantidad ε de ser las mas valoradas. Puede entonces reformularse el algoritmo modificando únicamente la fase de oferta, de modo que esta siempre incremente el precio de los objetos, para ello, la oferta de la persona i por el objeto j_i^* que genera mayor valoración será:

$$b_{ij_i^*} = p_{ij_i^*} + v_{ij_i^*} - w_i + \varepsilon \qquad (12)$$

Es importante destacar que para un problema de asignación con beneficios c_{ij} enteros, si

$$\varepsilon < 1/n$$

el algoritmo de subastas termina en un número finito de iteraciones con una asignación óptima S.[7] Bajo esta consideración, el algoritmo de subasta para el problema de asignación opera usando un concepto denominado ε –scaling, el cual consiste en aplicar el algoritmo en repetidas ocasiones, comenzando con un valor de ε suficientemente grande y reducir iterativamente este valor hasta que se logre el valor crítico que garantice la optimalidad de la solución encontrada.

4.2 EL ALGORITMO DE SUBASTA PARA EL PROBLEMA DE ESTUDIO

El algoritmo de Subastas descrito funciona apropiadamente para problemas de asignación, sin embargo, debe notarse que el problema **(P1)**, no corresponde exactamente a un problema de asignación. Este problema puede asimilarse a un problema de asignación en el cual para cada uno de los colegios puede definirse un número igual a su capacidad de cupos (objetos) idénticos, es decir, dado un colegio con capacidad b_j existirán b_j cupos que generan el mismo beneficio de asignación c_{ij} para el estudiante i. Podría aplicarse el algoritmo descrito anteriormente a este problema, sin embargo, la dimensión del problema crecería considerablemente y la estructura del problema modificado seria tal que la guerra de precios seria inevitable, generando atascamientos en el algoritmo. [5]

Dadas estas circunstancias, toma importancia la modificación realizada por los profesores Bertsekas y Castañon, la cual permite considerar la existencia de objetos similares.[8] El algoritmo de Subasta para problemas de asignación con objetos similares, tiene en cuenta las siguientes consideraciones.

- Se entiende que dos objetos j y j_0 son similares, pertenecen a la misma clase $M(j)$, si para todas las personas $i \in I$ se tiene que $a_{ij} = a_{ij_0}$

[7] En [4] y [5] se demuestra estas afirmaciones

[8] Esta modificación del algoritmo, junto con las consideraciones para permitir personas similares, son la base del algoritmo de subasta para problemas de transporte presentado en [6]

• Dado un vector de precios $\boldsymbol{p}$ se define el precio de la clase *M(j)* de un objeto *j* como $\hat{p}_j = \min_{k \in M(j)} \{p_k\}$

Finalmente, el algoritmo empleado para la solución del problema de asignación de estudiantes a los colegios considera *n* estudiantes y *n* cupos, en donde los *n* cupos son el resultado de definir para cada colegio una clase de objetos similares con tantos elementos como cupos disponga el colegio.

Algoritmo de Asignación de Estudiantes
Para la mejor comprensión del algoritmo es necesario definir los siguientes conceptos:

Iteración. Corresponde al procedimiento en el cual para un estudiante al que no le ha sido asignado cupo se realizan las dos fases básicas del algoritmo: Oferta y Asignación.

Subasta. Corresponde al conjunto de iteraciones necesarias hasta lograr una asignación que satisfaga las ε–CS para un valor de epsilon dado.

El algoritmo desarrolla subastas sucesivas, de modo que cada subasta tiene un valor de epsilon menor que la subasta anterior. En cada subasta se efectúan cuantas iteraciones sean necesarias hasta satisfacer las condiciones ε – CS. El algoritmo desarrolla los siguientes pasos:

1. Inicializar. Inicialice ε en un valor suficientemente grande. considere una asignación inicial *S* y un vector de precios $\boldsymbol{p}$ que satisfagan las condiciones ε–CS. El conjunto $S = \Phi$; y el vector de precios $\boldsymbol{p} = 0$ satisfacen estas condiciones.

2. Subasta. Encuentre la asignación óptima que maximiza el beneficio y satisface las condiciones ε –CS, para ello desarrolle iterativamente, hasta que a todos los estudiantes les haya sido asignado un cupo

i.) Fase de Oferta. Para una persona *i* en el conjunto de personas no asignadas, se determina el objeto que genera el mayor valor j_i^*, según se presenta en (9). Se calcula además la oferta de la persona *i* por el de acuerdo a como se indicó en (12).

ii.) Fase de Asignación

3. Prueba de optimalidad. Verifique si se satisface la condición de optimalidad

$$\varepsilon < \frac{1}{\# Clases} \quad ^{9}$$

De no ser así, reduzca el valor de ε y vuelva al paso 2.[10]

La implementación del algoritmo se desarrolló en el lenguaje JAVA. Esta implementación se empleó para resolver instancias del problema con 1000 estudiantes y 10 colegios, con beneficios de asignación generados mediante una distribución uniforme entre 0 y 200, en las cuales se observó la incidencia de los valores de los distintos parámetros, particularmente del valor de epsilon y su factor de reducción. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1. Esta tabla presenta el valor de los parámetros empleados, el numero máximo de iteraciones que fue necesario realizar hasta hallar el equilibrio en alguna de las subastas, el numero promedio de las iteraciones por subasta y el numero total de iteraciones, suma de las iteraciones de cada una de las subastas, hasta satisfacer la condición de optimalidad.

Tabla 1. *Resultados Corridas Instancia 1000 Estudiantes 10 Colegios*

epsilon	Factor	Max. Iterc	Prom Iterac	Total Iterac.
200	4	6.233.227	1.940.713,3	13.584.993
	6	9.122.522	2.645.464,5	15.872.787
	10	10.786.088	3.186.277,2	15.931.386
20	4	10.967.917	3.559.022,7	21.354.136
	6	12.949.869	4.188.911,0	20.944.555
	10	10.781.926	3.878.714,8	15.514.859
500	4	8.193.556	2.154.001,8	17.232.014
	6	17.056.954	3.868.593,6	27.080.155
	10	32.011.981,0	6.952.164	41.712.985

De acuerdo con estos resultados es posible observar que:

• Para esta instancia particular el algoritmo parece ser más eficiente cuando el valor inicial de epsilon es del mismo orden de magnitud que el mayor de los beneficios de asignación estudiante-colegio considerados.

• Al incrementarse el factor de reducción de epsilon, el numero máximo de iteraciones en una ronda tiene a hacerse mayor en la mayoría de los casos, sin embargo es importante notar que el incremento de dicho factor implica un menor numero de rondas o subastas.

• Iniciar el algoritmo con valores de epsilon considerablemente grandes, aumenta el rondas o subastas necesarias, aún más si se considera un factor de reducción menor, sin embargo esta combinación parece generar mejores resultados que valores de epsilon y factores de reducción grandes.

Adicionalmente, se empleó el algoritmo para resolver instancias del problema de mayor escala y más cercanos al problema real. Como ejemplo, en una de estas instancias se consideraron 50,000 estudiantes, 200 colegios, con beneficios de asignación generados como una distribución uniforme entre 0 y 200. Se empleó un valor inicial de epsilon de 200 y un factor de reducción de 4. La Figura 2 presenta la forma como evoluciona el valor de la función objetivo a medida que se desarrollan las rondas

[9] Para el caso de Objetos similares, esta condición de optimalidad es equivalente a la expuesta para el algoritmo de subasta para problemas de asignación.[6]

[10] Factores de reducción típicos de _ son del orden de 4 a 10. [5]

o subastas. Puede observarse como para esta instancia particular se obtienen buenas soluciones, próximas al valor óptimo, a partir de la 5 ronda; este hecho sugiere que el algoritmo puede ser utilizado como una heurística para generar buenas soluciones, deteniendo su ejecución después de un numero dado de iteraciones o mediante la comparación con alguna cota superior de la solución óptima.

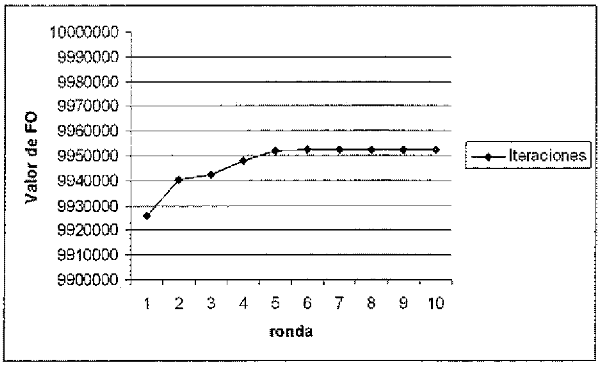

Figura 2. Valor de la Función Objetivo por ronda (subasta)

5. Consideración de Extra Restricciones

El problema real podría considerar algunas otras restricciones para la asignación, estas restricciones podrían clasificarse en dos grupos:

i.) Restricciones propias de los estudiantes, en particular respecto a los colegios a los cuales puede ser asignado un estudiante particular
ii.) Restricciones propias de los colegios, en relación con condiciones particulares respecto a los estudiantes que pueden serle asignados o la selección de las asignaciones factibles a dichos colegios.

Esta sección describe la forma como podrían considerarse algunas de dichas extra restricciones en el algoritmo de Subastas. La inclusión de dichas restricciones en la estrategia de solución basada en el algoritmo de generación de columnas (abordada mediante el algoritmo de Branch-and-Price) presentó nuevamente problemas de convergencia, por lo que su estudio se excluye en este documento.

[11] Observe que la implementación de la versión densa del problema puede usarse directamente para dar solución a la versión dispersa, considerando para ello los beneficios de las asignaciones no posibles para un estudiante dado como un valor suficientemente pequeño; sin embargo, desde el punto de vista de eficiencia resulta más apropiado considerar la estructura particular de la versión dispersa al momento de almacenar la información y de ejecutar el algoritmo.

5.1 EXTRA-RESTRICCIONES EN EL ALGORITMO DE SUBASTA

El Algoritmo de Subastas descrito pretende dar solución a la versión densa del problema, es decir a aquella en la cual se asume que cada estudiante puede ser asignado a cualquiera de los colegios disponibles. Sin embargo, el algoritmo puede modificarse fácilmente para dar solución a la versión dispersa del problema;[11] para ello considere:

$$A(i) = \{j \in J \mid \exists (i, j)\}$$

Es decir, el conjunto de Asignaciones posibles, o colegios a los cuales puede ser asignado, el estudiante i .

Dada esta consideración el algoritmo puede ser modificado en la Fase de Oferta para que cada estudiante ofrezca sólo por aquellos colegios en los cuales puede ser asignado. Esta modificación permitiría considerar, entre otras, las siguientes restricciones adicionales:

- Restringir la asignación de cada estudiante a colegios que estén en su localidad o a cierta distancia máxima de su residencia.
- Permitir la asignación de estudiantes que ingresan al sistema y que tienen hermanos dentro del mismo, a los colegios en los cuales actualmente se encuentra asignado el hermano.
- Permitir la asignación de los estudiantes considerando su género y limitaciones así como la clasificación de las instituciones en femeninas, masculinas, mixtas o de educación especial

6. Consideraciones para la Aplicación de las Estrategias de Solución

Por último, se analiza la forma como podría definirse una función de beneficios y se plantea como las estrategia de solución descritas podrían ser usadas dentro del proceso de asignación definido por el distrito.

6.1 DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE BENEFICIOS

La función de beneficio para el problema que se pretende solucionar deberá satisfacer por lo menos las siguientes condiciones.

- El proceso de asignación deberá favorecer a aquellos estudiantes con mayor prioridad.[12]

[12] El índice de prioridad se encuentra ordenado de menor a mayor en donde 1 corresponde a los estudiantes con mayor prioridad en la asignación.

- En la definición de los beneficios deben considerarse las opciones de colegios presentadas por cada padre para la asignación de sus hijos.

- La definición de beneficios deberá considerar la posible existencia de un colegio o nodo ficticio, de modo que el beneficio de la asignación de cada estudiante a este tipo de institución se vea desfavorecido.

Dadas estas consideraciones, la función de beneficio que se propone para esta instancia particular, se define mediante el siguiente procedimiento.

1. Se calcula la distancia de cada estudiante a cada colegio

    i.) La distancia de asignación de los estudiantes a los colegios seleccionados por los padres como opciones se realiza de la siguiente forma:

    - Será 0 si el estudiante presenta máxima prioridad (prioridad 1)

    - Será igual a la menor distancia del estudiante a cualquiera de los colegios si la prioridad del estudiante no es la máxima. Así, si el padre seleccionó una institución ubicada a 2 Km. de su casa, pero la institución más cercana esta a un kilómetro, entonces la distancia a los colegios seleccionados como opción será 1 Km.

    ii.) La distancia de un estudiante a cualquier colegio que no corresponda a los colegios seleccionados, será igual a la distancia real medida en las unidades que se considere convenientes (Km o Mts).

2. La distancia calculada se afecta por la prioridad del estudiante. Para cada estudiante, todas las distancias a cada uno de los colegios, excepto las correspondientes a aquellos seleccionados como opciones por los padres, se multiplican por el índice de prioridad del estudiante.

3. Se calcula la distancia de cada estudiante al colegio ficticio. Para ello, se selecciona la mayor de todas las distancias afectadas, calculadas en el paso 2, y se multiplica por un factor determinado previamente, con el fin de hacerla suficientemente grande para desmotivar su selección. Para cada estudiante la distancia al nodo ficticio será igual al valor calculado anteriormente multiplicado por un factor relacionado con la prioridad, así

$$M \times (m + 1 - prioridad) \qquad (13)$$

En donde: m es el número de niveles de prioridad $prioridad_i$ es el índice de prioridad asignada al estudiante *i*.

Esta definición pretende que el valor de la distancia de los estudiantes de más prioridad al colegio ficticio sea más alto pues estos no deberían quedarse sin asignar.

4. Calcular el beneficio. El beneficio se calcula substrayendo a cada uno de los costos el máximo de todos ellos. De modo que aquellas asignaciones (estudiante-colegio) con menor costo, se convertirán en las de mayor beneficio, mientras que las de mayor costo generaran un menor beneficio.

Con el fin de observar como podría comportarse una definición similar de los beneficios para ser empleada en alguna de las estrategias de solución, se efectuaron 9 corridas en instancias de asignación de 10,000 estudiantes a 100 colegios. Algunos de los resultados más importantes de la ejecución de estas instancias se presentan en la Tabla 2:

Tabla 2. *Resultados de Ejecución de Instancias de Prueba*

Probabilidad	0,6			0,5			0,4		
Instancia	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A (%)	99,5	99,8	99,3	99,1	98,8	99,6	100,0	98,3	98,2
B (%)	30,1	30,0	30,1	30,7	29,3	30,3	30,2	30,6	31,2
C (%)	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
DISTANCIA									
entre 0 y 1 (%)	19,5	19,9	19,3	20,2	19,3	19,4	19,5	20,2	20,5
entre 0 y 2 (%)	86,0	83,0	84,3	81,5	86,5	85,0	86,0	84,6	83,3
entre 0 y 3 (%)	93,0	90,1	91,4	88,4	92,9	91,8	93,3	91,7	90,2
entre 0 y 4 (%)	95,6	92,8	93,9	90,7	95,5	94,5	96,0	94,2	92,7
entre 0 y 5 (%)	97,2	94,3	95,4	92,3	97,0	96,2	97,7	95,9	94,6
entre 0 y 6 (%)	97,7	94,7	95,9	92,9	97,5	96,8	98,2	96,6	95,1
entre 0 y 7 (%)	97,9	94,8	96,0	93,1	97,7	96,9	98,3	96,7	95,2
entre 0 y 8 (%)	97,9	95,0	96,1	93,2	97,8	97,0	98,4	96,7	95,3
entre 0 y 9 (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	97,1	98,4	96,8	95,3
A:Procentaje de Estudiantes de prioridad 1 asignados a una Opción									
B:Procentaje Total de Estudiantes asignados a una Opción									
C:Procentaje de estud. no asignados pertenecientes a prioridad 5									

De los resultados presentados es importante observar como:

- En todas las corridas realizadas, más del 98% de los estudiantes con prioridad 1, fueron asignados a alguno de las opciones de su preferencia.

- En la mayoría de los casos, más del 30% de los estudiantes fue asignado a una de las instituciones de su preferencia.

- En todas las corridas realizadas, todos los estudiantes que no pudieron ser asignados pertenecían al menor nivel de prioridad.

- En la mayoría de las corridas realizadas, mas del 90% de los estudiantes fue asignado a instituciones ubicadas a una distancia de tres o menos unidades de medida de su hogar, esto es aun mas importante si se recuerda que el parámetro empleado para la distribución de la distancia generó distancia máximas de 20 unidades.

Puede observarse como dependiendo de las características particulares de la instancia del problema de asignación que se pretende resolver, puede formularse una función para calcular los beneficio que permita satisfacer muchas de las condiciones deseables en la asignación obtenida.

6.2 IMPLEMENTACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS

Las estrategias de solución planteadas en las secciones anteriores se enmarcan en una etapa, la asignación misma, dentro del proceso de matricula. Se presenta a continuación una propuesta de como usar los modelos descritos en el desarrollo de este trabajo dentro del dicho proceso.

6.2.1 Alternativa de Aplicación

La alternativa de aplicación propuesta difiere de la forma como actualmente se desarrolla dicho proceso. En esta alternativa, podrían considerarse simultáneamente todos los estudiantes que aspiran a un cupo en un determinado grado y se efectuaría para ellos el proceso de asignación mediante la estrategia de solución descrita.

En esta alternativa toma mayor relevancia la definición de la función de beneficios, pues deberá representarse en este valor tanto la prioridad como la distancia y demás consideraciones para la asignación en la instancia particular, de modo similar a como se presentó en la Sección 6.1. Esta alternativa abandona el la naturaleza "greedy" del proceso que actualmente se desarrolla.

Esta alternativa corresponde fundamentalmente a resolver un problema de asignación como el formulado en (P1), quizás con la consideración de extra-restricciones, para cada uno de los grados en los que se requiera asignar estudiantes. Para ello y dependiendo de la instancia particular el algoritmo de subastas puede resultar apropiado.

7. CONCLUSIONES

El procedimiento seguido para la asignación del conjunto de estudiantes nuevos, mediante opciones o gereferenciacion, se identifica como el punto en el cual el uso de modelos matemáticos puede contribuir en el mejoramiento del resultado del proceso.

El algoritmo de Subastas puede ser modificado de modo que permita la consideración de instancias de problemas como el que se estudia en este proyecto. Este es un algoritmo de fácil comprensión e implementación y cuyo tiempo de ejecución esta en relación con algunos de los parámetros que caracterizan la instancia; si bien no es un algoritmo de tiempo polinomial, su tiempo de ejecución es seudopolinomial y esta determinado por los valores particulares de los beneficios de asignación, el numero de estudiantes y el numero de colegios. Las corridas realizadas de este algoritmo en instancias generadas aleatoriamente evidencian que es una estrategia atractiva para ser usada en el proceso de asignación de cupos, incluso permite la consideración de restricciones respecto a los colegios a los cuales puede ser asignado cada estudiante.

Las estrategias de solución presentadas en el desarrollo de este proyecto, son aplicables dentro del proceso de asignación de cupos que desarrolla actualmente la Secretaria de Educación. La implementación de estas estrategias estaría soportada sobre el mismo sistema de información y el mismo procedimiento definido para el proceso de matricula, simplemente reemplazaría el proceso de asignación como tal, que dadas las condiciones de ejecución actual no esta orientado a generar la asignación de los estudiantes que maximice u optimice algún criterio particular.

La comparación de las diferentes formas de desarrollar la asignación de cupos escolares y la estimación de la mejora alcanzada a través de la aplicación de las estrategias propuestas en este proyecto, solo es posible con el compromiso de la SED. Para este fin es necesario poder acceder a la información real y los resultados obtenidos con tanto en el proceso actual como con la aplicación de los modelos propuesto.

Es relevante desarrollar un análisis crítico de los procesos desarrollados en la SED así como la identificación de puntos en los cuales sea posible contribuir a través del estudio de modelos de apoyo a estas labores. De manera particular quedan abiertos temas relacionados al desarrollado en este proyecto, dentro de los cuales se desataca el estudio de la localización de futuros colegios, de modo que se logre una mejor cobertura de la demanda futura por cupos escolares en el Distrito.

8. BIBLIOGRAFÍA

[1] MAGNANTI T y ORLINJ AHUJA R. Network Flows. Theory, Algorithms and Applications. Prentice Hall, 1993.

[2] NEMHAUSER George SAVELSBERGH Martin y VANCE Pamela BARNHART Cynthia, JOHNSON Ellis. Branch-and-price column generation for solving huge integer programs. No Publicado, Enero 1996.

[3] JARVIS J y SHERALI H. BAZAARA M. Programación Lineal y Flujo en Redes. Limusa, 2ª edition, 1999.

[4] BERTSEKAS D. The auction algorithm: A distributed relaxation method for the assignment. Annals of Operations Research, 14:105–123, 1988.

[5] BERTSEKAS D. Auction algorithms for network flow problems: A tutorial introduction. Mayo 1992.

[6] BERTSEKAS D. and CASTANON D. The auction algorithm for transportation problems. Annals of Operations Research, 20:67–96, Febrero 1989.

[7] DESROSIERS J. y SOLOMON M. DESAULNIERS G. Column Generation, Springer, 1 edition, 2005.

[8] LUBBECKE Marco e. y DESROSIERS Jaques. Selected topics in column generation. Para aparecer en Operations Research, Diciembre 202.

[9] VANDEERBECK Francois. Descoposition and Column Generation for Integer Programs. PhD thesis, Universidad Catolica de Louvain, Septiembre 1994.

[10] VANDERBECK Francois. Implementing mixed integer column generation. Documento de Trabajo, Septiembre 2004.

[11] PARK Sungsoo y PARK Kyungchul JEONG Gue-woog, LEE Kyungsik. A branch-and-price algorithm for the steiner tree packing. Computers and Operations Research, (29):221–241, 2002.

[12] W JOHNSON eellis l., NEMHAUSER George L. y SAVELSBERGH Martin. Progress in linear programming-based algorithms for integer programming: An exposition. INFORMS Journal on Computing, 12(1), 2000.

[13] WOLSEY Laurence. Integer Programming. Jhon Wiley and sons, 1998. [14] H'ENON M. Algorithmic aspects of mak. Noviembre 2004.

[15] LUBBECKE Marco. Engine Scheduling by Column Generation. PhD thesis, Universidad de Braunschweig, julio 2001.

[16] SAVELSBERGH Martin. A branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem. Operations Research, 45(6):831–841, Diciembre 1997.

[17] SAVELSBERGH Martin. A branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem. Operations Research, 45(6):831–842, Noviembre 1997.

[18] SAVELSBERGH Martin. Branch-and-price: Integer programming with column generation. No Publicado, Febrero 2002.

[19] DESROSIERS Jacques y HANSEN Pierre MERLE Olivier, VILLENUEVE Daniel. Stabilized column generation. Discrete Mathematics, (194):229–237, 1999.

[20] PIGGATI Alexander y POGGI Marcus. Satbilized branch-andcut-andprice for the generalized assignment problem. No Publicado, Octubre 2004.