Modelamiento a Través de la Programación Lineal Entera Mixta del Problema de Programación de Operaciones en el Taller de Trabajo

MYRIAM LEONOR NIÑO LÓPEZ
Profesora Asociada Escuela de Estudios Industriales y Empresariales
Universidad Industrial de Santander
myleni@uis.edu.co

Resumen

En la búsqueda de la competitividad las empresas han acudido al área de Dirección de Operaciones que ofrece múltiples oportunidades si es gestionada adecuadamente. La programación de operaciones plantea grandes desafíos dada su complejidad inherente, por ello se han dedicados amplios esfuerzos en la búsqueda de soluciones desde diversas perspectivas, que han significado el desarrollo de una gama de técnicas analíticas. Este articulo trata la programación de operaciones determinística para el caso específico del Taller de Trabajo, utilizando el modelamiento a través de la Programación Lineal entera Mixta y optimizando la medida de eficacia del Instante de Salida de la última pieza del taller.

Palabras clave: Programación de Operaciones, Secuenciación, Taller de trabajo, Modelos Matemáticos, Programación lineal entera mixta.

Introducción

La internacionalización de la economía ha generado un nivel de competencia relativamente nuevo en la mayoría de los sectores industriales. Las empresas hoy día enfrentan el desafío de buscar formas eficientes de responder ante esta situación.

La competitividad es la nueva filosofía del mundo empresarial y ello resalta la importancia estratégica que tiene el área de Dirección de Operaciones en la consecución de la ventaja competitiva.

Las empresas interesadas en garantizar su permanencia han abordado la nueva situación mejorando sus procesos productivos, desarrollando nuevos métodos de dirección, planificación y control de las operaciones y dedicando especial atención a la gestión del factor humano.

Los esfuerzos empresariales se han trasladado desde la obtención de economías de escala, a la racionalización y optimización de los procesos de producción y distribución. Este cambio ha alcanzado todo el ámbito productivo: los centros de fabricación se han configurado de forma diferente a los convencionales, tanto en su organización como en lo referente a instalaciones y métodos de trabajo.

Este entorno demanda una programación de operaciones eficiente, efectiva y exacta la cual resulta bastante compleja, aún en los ambientes más simples de producción. Debido a la complejidad del problema, se han dedicado grandes esfuerzos en la búsqueda de soluciones desde una amplia variedad de perspectivas, que han generado el desarrollo de diversas técnicas analíticas.

En este artículo se abordará el modelamiento a través de la Programación Lineal Entera Mixta (PLEM) de una categoría específica de este problema, la referida a la programación de operaciones determinística del taller de trabajo, con el objetivo de *minimizar* la medida de eficacia del Instante de Salida de la Ultima Pieza del Taller (Makespan).

Estructura de la programación de operaciones

La programación de operaciones concreta el Programa Maestro de Producción en actividades o tareas, las asigna a un centro de trabajo, máquina o instalación y determina un intervalo de tiempo para su ejecución, buscando que se cumplan las fechas de entrega planificadas y que se emplee el menor volumen de recursos e inventario posible.

La función de la programación de operaciones varía con relación al tipo de configuración productiva. En los procesos de fabricación de tipo continuo, la programación cobra su forma más básica. En estas empresas, la función de programación se circunscribe fundamentalmente a la asignación de operaciones a los centros de trabajo, la determinación de la ruta y al equilibrado de las líneas, a partir de este punto solo resta establecer la secuencia de los productos a lanzar a las líneas (sí es que procesan productos diferentes), ajustar el ritmo de producción (sí varía) y/o, en caso de que la actividad se interrumpa al final de la jornada, a garantizar un número de funcionamiento de la línea.

Una situación muy diferente se plantea en las empresas con sistemas intermitentes, por cuanto la frecuencia del ciclo de producción será mayor y las decisiones deberán tomarse, en gran proporción, en función de las circunstancias reales de cada momento.

En los procesos intermitentes, los artículos generalmente se procesan en lotes pequeños, muchas veces de acuerdo con las especificaciones de un cliente. Los lotes de los distintos productos van de un centro de trabajo a otro con base en la función que estos desarrollan, las secuencias de paso de cada pedido por los diferentes centros de trabajo pueden ser distintas. Además, la obtención de cada lote puede diferir notablemente en término de los materiales requeridos, el tiempo de proceso en cada centro de trabajo, los requerimientos de preparación de máquina, etc.

A este tipo de configuración pertenece el denominado Taller de Trabajo, que se distingue por órdenes de trabajo individuales que siguen patrones de flujo de trabajo diferentes en la planta. Este es el caso más complejo para desarrollar la función de programación de operaciones.

Las actividades que se realizan en la programación de operaciones son las siguientes:

- Carga del taller de trabajo *(Shop Loading)*: Asignación de las operaciones a un centro de trabajo, decisión que se adopta por comparación entre la capacidad disponible del centro y la capacidad requerida por las operaciones que ya se asignaron.
- Secuenciación *(Sequencing)*: define un orden de ejecución de las operaciones en los diferentes centros de trabajo.
- Programación detallada *(Scheduling)*: Determinación de los instantes de inicio y terminación (programado) de las operaciones en cada centro de trabajo, también se denomina temporización.

El interés de la investigación a la cual se refiere el presente artículo se centró en las dos últimas actividades de la programación de operaciones: La secuenciación y la programación detallada para el caso del taller de trabajo.

Programación de operaciones en el taller de trabajo

A. *Definición*

Un taller de trabajo es una organización funcional cuyos centros de trabajo se organizan alrededor de cierto tipo de equipos y operaciones, como son: taladrar, hilar, forjar, etc. Los productos fluyen por los centros de trabajo en lotes que pueden corresponder a pedidos individuales de los clientes.

El problema fundamental de la programación del taller de trabajo consiste en determinar el orden o secuencia en que las máquinas procesarán los trabajos optimizando alguna medida de desempeño.

Un enunciado básico del problema del taller de trabajo es el siguiente:

"En piezas (lotes, trabajos u órdenes) deben realizarse en m máquinas (secciones o puestos de trabajo). La realización de cada pieza consiste en someterla a una serie de operaciones prefijadas; cada operación está asignada a una máquina concreta y tiene una duración determinada conocida. Debe establecerse un programa, es decir, la secuencia de las operaciones en cada máquina, que optimice un cierto índice de eficacia (por ejemplo, la ocupación total del taller)" [1]

Cuatro factores sirven para describir y clasificar un problema específico de programación del taller de trabajo:

- *El patrón de llegada de los trabajos.* Si *n* trabajos llegan simultáneamente a un taller que esta ocioso e inmediatamente disponible para trabajar, se dice que el problema de programación es *estático*. Si el instante de disponibilidad de los trabajos y/o de las máquinas no son idénticos, el problema se considera *semidinámico*. Si los trabajos llegan intermitentemente probablemente de acuerdo con una distribución estadística y el horizonte de funcionamiento del taller se considera ilimitado hacia el futuro, el problema de programación es *dinámico*.
- *El número y variedad de las máquinas en el taller.* Es evidente que el número de las máquinas en el taller afecta el proceso de programación. Si sólo hay una máquina, o se puede tratar un grupo de máquinas como si fuera una sola, la programación de operaciones es mucho más simple. En la medida que se incremente el número de máquinas y su variedad, el problema de programación se vuelve más complejo.
- *El patrón de flujo de trabajos en el taller.* El flujo del proceso de los trabajos a través de las máquinas debe ser especificado. Si todos los trabajos siguen la misma ruta, se le denomina Taller de Flujo Regular (*flow-shop*). El extremo opuesto es el Taller de Trabajo de Flujo General, donde no hay un patrón similar de movimiento de los trabajos de una máquina a la siguiente. La mayoría de los talleres están entre estos dos extremos.
- *Los criterios para evaluar el desempeño del taller.* Las medidas de eficacia juegan un papel crítico en el proceso de programación y permiten clasificar los programas obtenidos. Algunas de las medidas de eficacia más utilizadas son las siguientes: El instante de salida de la última pieza del taller (C_{max}: *Makespan*), El tiempo medio de permanencia en el taller (F_{med}: *Mean Flow-Time*), El retraso de la pieza que se retrasa más (T_{max}: *Maximum Lateness*).

[1] **Companys R. Y Corominas A.** *Organización de la Producción II. Dirección de operaciones* 4. España: Ediciones UPC, 1996, p.24.

Otra forma de clasificar los problemas de programación del taller de trabajo, se corresponde con el comportamiento de los elementos que integran la estructura básica del problema. Los modelos donde estos elementos no involucran variaciones y que por consiguiente las decisiones se pueden establecer de manera exacta, se conocen como *Modelos Determinísticos*. El caso contrario en donde se reconoce que pueden existir variaciones e incertidumbre en uno o más de estos elementos, se denomina *Modelos Estocásticos*. Los elementos que varían estocásticamente, se asume que son predecibles únicamente en sentido estadístico.

Los elementos que en este último modelo se pueden comportar en forma probabilística, son las siguientes: 1) Las características de los trabajos que incluyen el comportamiento de llegada de los trabajos al taller, las fechas de vencimiento (*due-date*) de los trabajos y la importancia relativa de cada trabajo. 2) Los requerimientos de ingeniería de cada trabajo que incluye el número de operaciones, la ruta, los tiempos de proceso, y otras restricciones. 3) Las características de las máquinas que incluyen el número de máquinas, la capacidad disponible de estas máquinas, y la habilidad y conveniencia de cada máquina para el desarrollo de los trabajos.

B. Términos utilizados en la programación de operaciones

Es conveniente definir algunos conceptos básicos utilizados en la formulación matemática y en el análisis del taller de trabajo:

Trabajo: Es una unidad de producto o un lote de unidades idénticas, que debe ser procesado en determinadas máquinas. Algunos términos sinónimos pueden ser tarea, lote de trabajo u orden del taller.

Máquina: Es un recurso capaz de desarrollar determinado proceso. Otros términos empleados son instalación o centro de trabajo.

Operación: Es una tarea elemental que se desarrolla en un trabajo por una máquina particular. Para especificar una operación se indica el trabajo al que pertenece y la máquina en la cual se desarrolla. Otro término puede ser actividad.
Tiempo de proceso: Es el tiempo que se requiere para realizar una operación en una máquina particular. Puede incluir el tiempo de preparación de la máquina (*setup*) y el tiempo de transporte para trasladar un trabajo de una máquina a otra (*run-time*).

Ruta: Es la sucesión de operaciones necesarias en los diferentes centros de máquina para la elaboración de un trabajo. La ruta se diseña con base en los requerimientos tecnológicos y establece las relaciones de precedencia de las operaciones.

Secuencia: Es el orden en que se desarrollan las operaciones en las máquinas. La secuencia no especifica los tiempos de proceso o la existencia de tiempos ociosos entre las operaciones. Una secuencia factible es consistente con los requerimientos tecnológicos de la ruta.

Programa: Un programa es una secuencia factible en la que los tiempos de inicio y terminación de las operaciones comprendidas en todos los trabajos en cada una de las máquinas, son especificados. También determina el tiempo ocioso, si lo hay, entre los tiempos de proceso de las operaciones.

C. Hipótesis generalmente aceptadas para el modelamiento del problema del taller de trabajo

Los modelos de programación del taller que se han desarrollado, por lo general se basan en un conjunto de hipótesis, cuyo propósito principal es simplificar el análisis del problema, a la vez que lo generaliza. Estas hipótesis se clasifican de acuerdo con el elemento que tratan en tres categorías. Relativas a los trabajos, a las máquinas y otras consideraciones.

Algunas de las principales hipótesis relativas a los trabajos son:

- Las operaciones requeridas por un trabajo tienen que realizarse en un solo tipo de máquina del taller.
- Cuando una operación ha comenzado debe terminarse antes de iniciar otra en la misma máquina, no se admiten interrupciones.
- No se pueden solapar dos operaciones de la misma pieza (en la misma máquina o en máquinas distintas).
- No hay montajes ni particiones de lote.
- Se utilizan tiempos determinísticos.
- El tiempo de proceso de las operaciones es independiente de la secuencia.

Algunas de las hipótesis relacionadas con las máquinas son:

- Cada máquina esta continuamente disponible, durante el periodo de tiempo analizado, sin interrupciones como averías o mantenimiento.
- Cada máquina puede tratar una sola operación a la vez.

Y algunas hipótesis sobre otras consideraciones son:

- Los tiempos de transporte y de preparación de la máquina se consideran despreciables o parte del tiempo de proceso.
- No existen cancelaciones de trabajos.

Las hipótesis anteriores pueden ser modificadas al formular el modelo, sin embargo, la complejidad del mismo aumenta en mayor o menor grado en la medida que estas no se respeten.

Modelamiento matemático

Modelo es un término usualmente utilizado para referirse a una estructura que se ha construido con el propósito de exhibir rasgos y características de algún objeto.

Aunque algunos modelos son "concretos" como es el caso de un modelo de avión, la Investigación Operacional se relaciona con modelos "abstractos". Estos modelos son matemáticos y emplean los símbolos algebraicos para reflejar las relaciones internas del objeto que esta siendo modelado (a menudo una organización).

La característica fundamental de un modelo de programación matemática, en la investigación operacional, es que involucra un conjunto de "relaciones matemáticas" (tales como ecuaciones, desigualdades, dependencias lógicas, etc.) que corresponden a relaciones que no son visibles a primera vista (tales como limitaciones tecnológicas, restricciones de mercadeo, leyes físicas, etc.)

Williams [15] señala como las principales razones que conducen a la construcción de modelos de programación matemática las siguientes:

- Se logra una mayor comprensión del objeto que esta siendo modelado, pues a menudo se revelan relaciones que no son aparentes para muchas personas.
- Ayuda a identificar cursos de acción que de otra forma no sería fácil conocerlos.
- Hace posible la experimentación con el modelo, pues generalmente no conviene o no es deseable experimentar con el objeto.

Es importante señalar que un modelo lo define las relaciones que incorpora. Estas relaciones son, en buena medida, independientes de los datos del modelo. Por lo general, se puede pensar en el mismo modelo aunque algunos datos se hayan modificado, no obstante esta no es una afirmación absoluta. Cambios radicales en los datos pueden normalmente interpretarse como cambios en las relaciones y por consiguiente del modelo.

En la mayoría de las aplicaciones de Investigación Operacional, se supone que el problema se puede expresar en forma cuantitativa o matemática, en estos casos se dice que se trata de un modelo de programación matemática.

Sin embargo, a pesar de los grandes desarrollos en la representación de modelos de programación matemática, un buen número de situaciones prácticas está fuera de las técnicas matemáticas disponibles. Es posible que se tengan demasiadas relaciones o variables para hacer posible una representación matemática "adecuada" o aún cuando sea posible formular el modelo de programación matemática, este puede ser muy complejo para solucionarlo con los procesos y medios disponibles.

Hiller y Lieberman [5] definen un modelo de programación matemática de un problema industrial como:

"El sistema de ecuaciones y expresiones matemáticas relacionadas que describen la esencia del problema. Así, si se pueden tomar n decisiones cuantificables relacionadas unas con otras, se representan como Variables de decisión (por ejemplo X1, X2,..., Xn) para las cuales se deben determinar los valores respectivos. La medida de desempeño adecuada (por ejemplo, la utilidad) se expresa entonces como una función matemática de estas variables de decisión (por ejemplo, U = 3 X1 + 2 X2 +... + 5 Xn), a esta función se le llama Función objetivo. También se expresan matemáticamente todas las limitaciones que se pueden imponer sobre los valores de decisión, casi siempre en forma de ecuaciones y desigualdades (por ejemplo, X1 + 3 X2 ≤ 10). Tales expresiones matemáticas de las limitaciones, generalmente se les denomina Restricciones. Las constantes (los coeficientes o el lado derecho de las ecuaciones) en las restricciones y en la función objetivo se llaman parámetros del modelo. El modelo de programación matemática puede expresarse entonces como el problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se optimice (maximice o minimice, según el caso) la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas".

Programación Lineal Entera Mixta

La Programación Lineal (PL: *Linear programming*) es una de las técnicas de optimización más importantes de la Investigación Operacional. Esta técnica utiliza un modelo de programación matemática para describir el problema. El adjetivo "lineal" indica que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser "funciones lineales".

En esencia deben existir cuatro condiciones fundamentales para que pueda aplicarse la Programación Lineal a un problema:

- Los recursos deben ser limitados (de lo contrario no habría ningún problema).
- Debe existir una función objetivo, es decir un objetivo específico a ser logrado.
- Debe existir una relación lineal en las restricciones y en la función objetivo.
- La programación lineal continua supone que es posible fraccionar las variables y que son no negativas.

La suposición de linealidad de la Programación Lineal no se puede garantizar siempre en un problema práctico, sin embargo permite que cualquier modelo sea mucho más fácil de solucionar.

Cuando en un modelo se incorpora relaciones no-lineales (en la función objetivo o en las restricciones) se obtiene un modelo de Programación No-lineal (PNL: *Non-linear Programming Model*), el cual normalmente es más complejo de solucionar.

La suposición de que las variables pueden tomar valores fraccionales no es siempre posible. Cuando se considera que las variables deben tener valores enteros (integralidad) se obtiene un Modelo de Programación Entera (PE: *Integer Programming Model*). Si sólo es necesario que algunas de las variables tengan valores enteros (y la suposición de divisibilidad se cumple para el resto), el modelo se conoce como uno de Programación Entera Mixta (PEM: *Mixed Integer Programming*), éstos tipos de problema son también mucho más difíciles de solucionar que el modelo básico de Programación Lineal.

La mayor complejidad para solucionar un problema de Programación Entera en relación con uno de Programación Lineal, se debe a que en la Programación Lineal se posee un algoritmo que converge y cuando se halla el óptimo existen propiedades que así lo demuestran. En la Programación Entera no existe un procedimiento que converja y los requerimientos de tiempo para hallar una solución óptima en muchos casos son excesivos.

Un tipo de Problema de Programación Entera son los Problemas Combinatorios, los cuales son comunes en la Investigación Operacional y se caracterizan por tener un número grande de soluciones factibles, generadas por los diferentes órdenes en que se pueden organizar un conjunto de operaciones o asignar un grupo de artículos o personal en diferentes posiciones.

Esta categoría de Problemas Combinatorios se subdivide en Problemas de Secuenciación y Problemas de Localización y Asignación. Un tipo de Problema de Secuenciación es el Problema de Programación del Taller de Trabajo (*Job-Shop Problem*), otro muy conocido es el Problema del Viajante de Comercio (*Traveling Salesman Problem*). En cuanto a los Problemas de Localización y Asignación se consideran los de Selección de Proyectos, Asignación de Presupuestos y Localización de Plantas o Almacenes.

Los Modelos de Programación Entera Pura son menos frecuentes, la gran mayoría de los problemas prácticos corresponden a la Programación Entera Mixta.

Modelamiento a través de la Programación Lineal Entera Mixta del Problema del Taller de Trabajo

El Problema de Programación del Taller de Trabajo, descrito anteriormente, puede ser modelado por medio de la Programación Entera Mixta. Este problema trata de la fabricación de lotes de trabajo, por lo general pequeños, de productos muy diferentes, los cuales tienen distinta secuencia de paso por las máquinas o centros de trabajo.

Los centros de trabajo son utilizados en el desarrollo de una o varias operaciones de las rutas de algunos de los productos. Además para cada uno de ellos, la obtención de un lote puede diferir notablemente en términos de los materiales requeridos, tiempo de proceso, tiempos de preparación, etc.

Debido a que la secuencia de paso de los pedidos a procesar por las máquinas es diferente, no es suficiente establecer solo el orden de entrada en la primera máquina, sino que se debe determinar la secuencia de todas y cada una de ellas. Esto se hace considerando, además, las diferentes rutas, de tal forma que un pedido respete el orden tecnológico establecido por su ruta.

El problema consiste en determinar el orden o secuencia de los lotes para cada una de las máquinas, respetando las rutas y las capacidades disponibles, de tal forma que se optimice una medida de eficacia determinada (por ejemplo: El instante de salida de la última pieza del Taller (*Makespan*)).

El modelo para este tipo de problema se define básicamente a través de dos clases de restricciones:

- Restricciones de secuencia
- Restricciones de interferencia

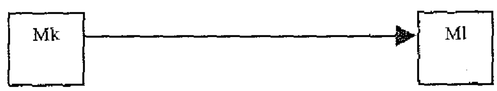
A. Restricción de secuencia

Esta restricción es necesaria para garantizar que las operaciones se realizan en el orden tecnológico que establece la ruta.

Las desigualdades que se definen se modifican dependiendo del número de unidades disponibles de cada una de las máquinas comprometidas. A manera de ilustración se presentan los casos cuando se tiene disponible una o dos unidades de una máquina.

Restricción de secuencia Tipo I:

Es la secuencia entre dos operaciones que se ejecutan en máquinas de las cuales solo se dispone de una unidad de cada una.

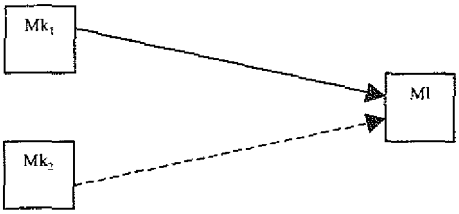


$$X(i,j,k)+TT(i,j,k)\leq X(i,d,l)$$

X:	Variable tiempo de inicio de la operación
i:	Trabajo
j:	Operación precedente
d:	Operación siguiente
k:	Máquina donde se ejecuta la operación precedente
l:	Máquina donde se ejecuta la operación siguiente
TT:	Parámetro tiempo de inicio más temprano posible para la operación siguiente.

Restricción de secuencia Tipo II:

Es la secuencia entre dos operaciones, la operación precedente se ejecuta en una máquina de la que hay disponibles dos unidades y por consiguiente se debe elegir donde desarrollar la operación. La operación siguiente se realiza en una máquina de la que solo se tiene una unidad.



$$X(i,j,k_1)+TT(i,j,k_1)\leq X(i,d,l)+M^*(1-Y(i,j,k_1))$$

$$X(i,j,k_2)+TT(i,j,k_2)\leq X(i,d,l)+M^*(1-Y(i,j,k_2))$$

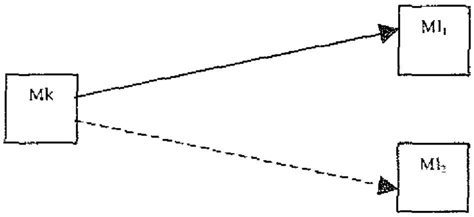
$$Y(i,j,k_1)+Y(i,j,k_2)=1$$

X: Variable tiempo de inicio de la operación
i: Trabajo
j: Operación precedente
d: Operación siguiente
k_1: Máquina donde es posible ejecutar la operación precedente
k_2: Máquina donde es posible ejecutar la operación precedente
l: Máquina donde se ejecuta la operación siguiente
Y: Variable binaria que si vale 1 señala que la operación se ejecuta en esa máquina y si vale 0 en la otra
TT: Parámetro tiempo de inicio más temprano posible para la operación siguiente
M: Número suficientemente grande para permitir que solo una de las desigualdades sea activa.

Si la variable binaria $Y(i,j,k_1)=1$, la primera ecuación es activa y la segunda es redundante. La tercera expresión se formula para garantizar que solo se utiliza una de las dos unidades disponibles de la máquina.

Restricción de secuencia Tipo III:

Es la secuencia entre dos operaciones, la operación precedente se ejecuta en una máquina de la que se tiene una sola unidad y la operación siguiente en una máquina de la cual se dispone de dos unidades y por consiguiente se debe elegir una para desarrollar la operación.



$$X(i,j,k)+TT(i,j,k)\leq X(i,d,l_1)+M^*(1-Y(i,d,l_1))$$

$$X(i,j,k)+TT(i,j,k)\leq X(i,d,l_2)+M^*(1-Y(i,d,l_2))$$

$$Y(i,d,l_1)+Y(i,d,l_2)=1$$

X: Variable tiempo de inicio de la operación
i: Trabajo
j: Operación precedente
d: Operación siguiente
k: Máquina donde se ejecuta la operación precedente
l_1: Máquina donde es posible ejecutar la operación siguiente
l_2: Máquina donde es posible ejecutar la operación siguiente
Y: Variable binaria que si vale 1 señala que la operación se ejecuta en esa máquina y si vale 0 en la otra
TT: Parámetro tiempo de inicio más temprano posible para la operación siguiente
M: Número suficientemente grande para permitir que solo una de las desigualdades sea activa.

Si la variable binaria $Y(i,d,l_1)=1$, la primera ecuación es activa y la segunda es redundante. La tercera expresión se formula para garantizar que solo se utiliza una de las dos unidades disponibles de la máquina.

Es posible modelar restricciones de secuencia cuando se tiene disponible un mayor número de máquinas, obviamente que las desigualdades a formular se incrementan, al igual que las variables binarias.

B. *Restricción de Interferencia*

Esta restricción se formula para evitar que dos operaciones se programen para utilizar simultáneamente una misma máquina.

Restricción de Interferencia Tipo I:

Este tipo de restricción se formula en aquellos casos en donde sólo se tiene una unidad de la máquina. Existen ligaduras disyuntivas entre dos trabajos cualquiera i, r en una máquina que se pueden representar por las siguientes desigualdades:

$$X(i,j,k)-X(r,d,k)\geq PL(r,d,k)$$

o bien

$$X(r,d,k)-X(i,j,k)\geq PL(i,j,k)$$

X: Variable tiempo de inicio de la operación
i: Trabajo
r: Trabajo
j: Operación
d: Operación
k: Máquina donde se realiza las operaciones *j*, *d*.
PL: Tiempo de proceso de lote

Este tipo de ligadura se trata mediante un modelo lineal con una variable binaria $Z(i,j,r,d,k)$, que vale 1 sí el trabajo (i,j) precede al trabajo $(r;\ d)$ en la máquina k, no necesariamente de forma inmediata y cero en caso contrario. En consecuencia se deben formular las siguientes restricciones:

$$M^*Z(i,j,r,d,k)+X(i,j,k)-X(r,d,k)\geq PL(r,d,k)$$

$$M^*(1-Z(i,j,r,d,k))+X(r,d,k)-X(i,j,k)\geq PL(i,j,k)$$

Restricción de Interferencia Tipo II:

Este tipo de restricción se refiere a aquellos casos en donde se disponen de dos unidades o más de una misma máquina. Para formular las restricciones de interferencia es necesario verificar que efectivamente las operaciones se desarrollan en la misma unidad. Para esto se necesita una variable binaria $W(i,j,r,d,k)$ que vale uno si efectivamente las operaciones se ejecutan en la misma unidad de un tipo de máquina y cero en caso contrario.
La condición lógica:

$$Y(i,j,k_1) = 1 \wedge Y(r,d,k_1) = 1 \Leftrightarrow W(i,j,r,d,k_1) = 1$$

Se representa por medio de las siguientes restricciones:

$$-Y(i,j,k)+W(i,j,r,d,k)\leq 0$$

$$-Y(r,d,k)+W(i,j,r,d,k)\leq 0$$

$$Y(i,j,k)+Y(r,d,k)-W(i,j,r,d,k)\leq 1$$

La formulación de las restricciones de interferencia depende del valor que tome la variable binaria $W(i,j,r,d,k)$, en cada caso. Esta situación se plantea a través de las siguientes restricciones:

$$X(i,j,k_1)-X(r,d,k_1)+A^*U(i,j,r,d,k_1)\geq PL(r,d,k_1)+A$$

$$X(i,j,k_1)-X(r,d,k_1)-(M+B)^*U(i,j,r,d,k_1)\leq PL(r,d,k_1)-B$$

$$X(r,d,k_1)-X(i,j,k_1)+A^*V(i,j,r,d,k_1)\geq PL(i,j,k_1)+A$$

$$X(r,d,k_1)-X(i,j,k_1)-(M+B)^*V(i,j,r,d,k_1)\leq PL(i,j,k_1)-B$$

U: Variable binaria para indicar si la restricción se satisface
V: Variable binaria para indicar si la restricción se satisface
M: Número suficientemente grande para forzar a que una restricción sea activa
A: Número suficientemente pequeño
B: Valor de tolerancia pequeño a partir del cual se considera que la restricción se rompe.

Adicionalmente, a las restricciones anteriores, es necesario formular dos restricciones más para las variables binarias, que garantizan que solo serán activas un par de las cuatro restricciones de interferencia planteadas anteriormente.

$$W(i,j,r,d,k_1)+U(i,j,r,d,k_1)+V(i,j,r,d,k_1)\leq 2$$
$$W(i,j,r,d,k)-U(i,j,r,d,k)-V(i,j,r,d,k)\leq 0$$

C. Medida de Eficacia

Como inicialmente se señaló, se utiliza como medida de eficacia a optimizar la del Instante de salida de la última pieza del Taller (*Makespan*).

Para esta medida, es necesario formular para la última operación de cada trabajo, una restricción que se modifica dependiendo de sí existe una sola unidad o varias de la máquina donde la operación se desarrolla.

Cuando sólo se dispone de una unidad de la máquina, la restricción que se debe formular es la siguiente:

$$X(i,z,k)+PL(i,z,k)\leq T$$

T: Variable que representa la terminación del proceso
z: Ultima operación de un trabajo

En el caso de que se disponga de dos o más unidades, es necesario formular la siguiente restricción para cada unidad de máquina:

$$X(i,z,k_n)+PL(i,z,k_n)\leq T+M^*(1-Y(i,z,k_n))$$

La función objetivo es minimizar la variable T.

De esta forma se tendrían todas las restricciones que se requieren para modelar el caso de programación de operaciones en el Taller de trabajo, optimizando la medida de eficacia del Instante de salida de la última pieza del taller.

Conclusiones y recomendaciones

La programación de operaciones basada en Modelos Matemáticos pone al alcance de los tomadores de decisiones un referente cuantitativo, que les permite un conocimiento más profundo acerca del sistema productivo analizado y, por ende obtener mejores soluciones.

La formulación del Modelo Matemático de la Programación de Operaciones del Taller de Trabajo, requiere unos conocimientos básicos en las áreas de la Investigación Operacional y Dirección de Operaciones.

El rápido crecimiento de la velocidad de procesamiento de los computadores y la disponibilidad de software como el Sistema General de Modelización Algebraica (GAMS: *General Algebraic Modeling System*) y de optimizadores que utilizan algoritmos eficaces para resolver modelos de gran tamaño, como CPLEX, ofrecen una gran oportunidad para que el modelamiento matemático sirva de soporte en las decisiones cotidianas de las empresas.

Teniendo en cuenta las limitaciones de tamaño del artículo, no se analiza en detalle el parámetro denominado TT, utilizado en la formulación de las restricciones de secuencia y referido al tiempo de inicio más temprano posible para la operación siguiente. Sin embargo, valdría la pena su análisis puesto que representa un elemento importante en la reducción del tiempo total de la programación de operaciones.

Referencias

[1] BLAZEWICZ J.; DOMSCHKE W.; PESCH E. (1996). "The job shop scheduling problem: Conventional and new solutions techniques". European Journal of Operational Research. Num 93, p. 1-33.

[2] BOWMAN E. (1959). "The Schedule Sequencing Problem". Operations Research. Num. 7, p. 621-624.

[3] COMPANYS R.; COROMINA A. (1996) Organización de la Producción II. Dirección de Operaciones 4. España: Ediciones UPC.

[4] ESCUDERO L. (1976). Programación Lineal. Continua, entera, bivalente, mixta. España: Ediciones Deusto.

[5] HILLER F.; LIEBERMAN G. (1997). Introducción a la Investigación de Operaciones. 6ª Edición. México: McGraw - Hill.

[6] JAIN A.; MEERAN S. (1999). Deterministic job-shop scheduling: Past, present and future. European Journal of Operational Research. Num. 113, p. 390-434.

[7] JOHNSON L.; MONTGOMERY D. (1974). Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc.

[8] NEMHAUSER G.; WOLSEY L. (1988). Integer and Combinatorial Optimization. USA: John Wiley & Sons, Inc.

[9] NEMHAUSER G.; RINNOOY KAN A.; TOOD M. (1989). Optimization. Handbooks in Operations Research and Management Science. Amsterdam: North-Holland.

[10] NIÑO M. (2002). Evaluación del Sistema de Programación de Operaciones DBR. Tesis Doctoral dirigida por Ramón Companys Pascual. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona. Universidad Politécnica de Cataluña. España.

[11] PINEDO M. (1995). Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems. USA: Prentice-Hall.

[12] PAPADIMITRIOU C.; STEIGLITZ K. (1982). Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity. USA: Prentice-Hall.

[13] PRAWDA J. (1996). Métodos y modelos de Investigación Operativa. Modelos determinísticos. Vol. 1. México: Limusa.

[14] SULTAN A. (1993). Linear Programming and Introduction with Applications. USA: Academic Press Limited.

[15] WILLIAMS H. (1993). Model Building in Mathematical Programming. Third Edition. Great Britain: John Wiley & Sons, Inc.

[16] WOLSEY L. (1998). Integer Programming. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc.

Autora

Myriam Leonor Niño López.

Vinculada desde 1984 a la UIS. Actualmente se desempeña como profesora asociada de la Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Ingeniera Industrial UIS 1983. Maestra en Administración del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. Especialista en Gerencia de la Producción y Mejoramiento Continuo UIS. Doctora de la Universidad Politécnica de Cataluña.