

FLUJO EN MEDIO POROSO NO SATURADO CON CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA DISCONTINUA II SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE AUTOVALOR

SULLY GÓMEZ I

*Profesora Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Industrial de Santander
sgomez@uis.edu.co*

CARLOS F. COGOLLO A

*Ingeniero Civil
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Industrial de Santander*

OSCAR J. MESA S

*Profesor Facultad de Minas
Universidad Nacional de Colombia, Medellín*

LILIAN I. ROJAS V.

*Ingeniero Civil
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Industrial de Santander*

RESUMEN

En el problema planteado por Barenblatt y expuesto en la primera parte de este trabajo, se estudia la propagación de una masa de fluido a partir de una inyección. Se muestra la diferencia que existe en la solución al problema cuando se ignora la retención residual del fluido en el suelo, en cuyo caso corresponde a la tradicional solución de la ecuación de difusión. Sin embargo, el problema debe plantearse considerando retención residual, lo cual da lugar a un problema de conductividad hidráulica discontinua y debe plantearse una nueva ley de similaridad que incluye en su forma funcional un exponente anómalo. A partir de las ecuaciones de flujo y condiciones de frontera se genera un problema de autovalor que en este trabajo es resuelto en forma numérica utilizando un algoritmo combinado de Runge-Kutta y Euler modificado, el cual permite hallar el exponente en función de los valores de conductividad hidráulica y obtener la solución completa del problema. Se puede observar la evolución del volumen de fluido, el tiempo y la distancia de propagación de algunos fluidos, considerando o no retención residual en el suelo.

PALABRAS CLAVE: Medio poroso, flujo de fluidos, retención residual, saturación, ley de similaridad, escalamiento, exponentes anómalos, métodos numéricos, autovalores, contaminantes, runge kutta-euler, contaminantes.

INTRODUCCIÓN

Inyecciones puntuales de fluidos y su propagación constituyen importantes problemas de ingeniería que deben resolverse en forma apropiada, con el fin de conocer tiempos de esparcimiento y alcance del frente del fluido, ya sea la pluma de un contaminante o el avance de un hidrocarburo en el suelo.

En este caso se considera un medio poroso no

saturado que se encuentra sobre un estrato impermeable (ver primera parte), dicho suelo presenta condiciones de retención residual, fenómeno que se origina debido a la existencia de fuerzas de capilaridad. Considerar la retención residual en el suelo conlleva a una ley de conservación de la masa que no es integrable [2], es decir el volumen de fluido disponible para fluir es variable en el tiempo, de ahí que las ecuaciones posean exponentes llamados anómalos que deben ser determinados en el transcurso de la solución.

Se requiere entonces obtener los valores del exponente β para conocer la forma de propagación y obtener la solución completa. Se conoce que la solución a una ecuación diferencial de segundo orden, como la presentada en el trabajo anterior, no puede satisfacer las tres condiciones de borde propuestas para los valores de β arbitrarios, sin embargo, existen valores excepcionales ó autovalores para los cuales si se satisfacen dichas condiciones.

A partir de un algoritmo combinado que utiliza el método de Euler y de Runge-Kutta de cuarto orden se obtiene la relación entre los valores de conductividad hidráulica y el exponente β , [4]. Con los valores anteriores y la forma de la solución presentada en el trabajo anterior se puede estudiar y cuantificar el esparcimiento de fluidos en el suelo. En este trabajo se estudia el flujo del agua y un hidrocarburo y se obtienen los tiempos de propagación y alcance del frente. Igualmente se compara la respuesta de dichos fluidos cuando se desprecia la retención residual del suelo.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

El análisis dimensional permite convertir las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Las ecuaciones [15.1] y [15.2] presentadas en el trabajo anterior son ecuaciones de segundo orden, de tipo parabólico, no lineales y poseen condiciones de normalización que rigen el esparcimiento o propagación de una masa de fluido a partir de una inyección puntual. Resolviendo numéricamente el problema de autovalor se encuentra la solución.

En general las ecuaciones diferenciales de orden superior se pueden descomponer en un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. A continuación se considera un ejemplo ilustrativo de solución:

$$y'''' + ay'''' + by'' + cy' + ey = g \quad (1)$$

Donde a, b, c, e, g son constantes o funciones conocidas de t.

Las condiciones iniciales están dadas por:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0, & y'(0) &= y_0' \\ y''(0) &= y_0'', & y'''(0) &= y_0''' \end{aligned} \quad (2)$$

Donde y_0, y_0', y_0'', y_0''' , son valores definidos. Si definimos u, v y w como:

$$u = y', \quad v = y'', \quad w = y''' \quad (3)$$

La Ecuación (1) se puede escribir como:

$$w' + aw + bv + cu + ey = g \quad (4)$$

Y es equivalente al siguiente conjunto de cuatro EDO de primer orden:

$$\begin{aligned} y' &= u, & y(0) &= y_0 \\ u' &= v, & u(0) &= y_0' \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v' &= w, & v(0) &= y_0'' \\ w' &= g - aw - bv - cu - ey, & w(0) &= y_0''' \end{aligned}$$

Una vez se tengan las ecuaciones en la forma anterior se aplican los métodos numéricos de solución de ecuaciones de primer orden.

Para la solución del problema propuesto en este trabajo se emplearon los métodos de Euler hacia delante y de Runge-Kutta de cuarto orden cuya aplicación se muestra a continuación.

MANEJO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

Como se dijo anteriormente para solucionar las EDOs de orden superior se recurre a un cambio de variable para reducirla a un conjunto de ecuaciones de primer orden, que al ser resueltas simultáneamente arrojan la solución al problema. Se toma la ecuación [15.1] del trabajo anterior así:

$$\frac{d^2\Phi_1^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\Phi_1^2}{d\zeta} + (1 - 2\beta)\Phi_1 + \beta\zeta \frac{d\Phi_1}{d\zeta} = 0 \quad (6)$$

Que se puede escribir como:

$$2f'^2 + 2ff'' + \frac{2}{y} ff' + \alpha f + \beta y f' = 0 \quad (7)$$

Haciendo $S=f'$ tenemos:

$$2fS' + 2S^2 + \frac{2}{y} fS + \alpha f + \beta y S = 0 \quad (8)$$

Despejando S' se obtiene:

$$S' = \left[\frac{-2S^2 - \frac{2}{y} fS - \alpha f - \beta y S}{2f} \right] \quad (9)$$

Resolviendo $S=f'$ y (9) simultáneamente con las respectivas condiciones de borde se obtiene la solución. Reemplazando en la ecuación (6) se obtiene:

$$S' = \left[\frac{-2S^2 - \frac{2}{y} fS - (K_1 / K_2)(\alpha f + \beta y S)}{2f} \right] \quad (10)$$

Para la solución de estas ecuaciones se elaboró un algoritmo en C++ que conjuga el método de Euler y el de Runge-Kutta y permite hallar la función Φ_1 y su derivada. Se consideran las condiciones de solución y se obtiene como resultado los puntos para la construcción de la figura 1. Esta figura que expresa la relación entre el valor del exponente y los valores de conductividad hidráulica. El exponente β que corresponde a cada valor K_2/K_1 , es hallado por prueba y error haciendo que dicho autovalor satisfaga las tres condiciones planteadas en el trabajo anterior.

Gráfica de la función $f(\zeta, k_2/k_1)$ para varios valores de k_2/k_1

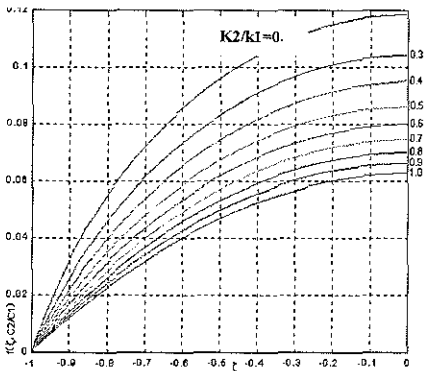


Figura 1. La función $\Phi_1(\zeta, k_2/k_1)$ obtenida de la solución de autovalor.

La Figura 1 muestra el comportamiento de la función Φ_1 para un K_2/K_1 determinado, K_2 y K_1 representan la conductividad hidráulica según sea el caso de llenado o drenaje. La obtención de esta función es fundamental para conocer el esparcimiento de la recarga en el medio poroso.

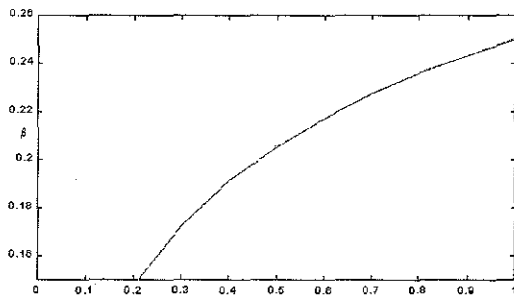


Figura 2. Relación entre β y K_2/K_1 obtenida de la solución al problema de autovalor.

A partir de los datos anteriores, para cada valor de K_2/K_1 , se obtuvo su correspondiente valor de β que se muestra en la Figura 2.

Desde la Figura anterior, se pueden obtener los valores de los exponentes conociendo los valores de conductividad hidráulica del suelo en función de sus valores de porosidad y retención residual.

FORMA DE LA PROPAGACIÓN DE FLUIDOS A PARTIR DE RECARGA PUNTUAL O INYECCIÓN

Para observar el esparcimiento de la masa de fluido inyectada, el tiempo de propagación y el alcance del frente del fluido se construyen los respectivos gráficos de avance a partir de las ecuaciones obtenidas.

A. Cuando no se considera retención residual

En este caso la conductividad hidráulica toma un solo valor ($K_1=K_2$) y constituye la ecuación de difusión tradicional.

La siguiente forma de la solución del problema se presentó en el trabajo anterior, ecuación (12), con esta expresión se puede encontrar la distribución de alturas de fluido dentro del suelo.

$$h = \frac{Q^{1/2}}{K^{1/2} t^{1/2}} \Phi_1 \left(\frac{r}{(QKt)^{1/4}} \right) \quad (11)$$

$$= \frac{Q^{1/2}}{16K^{1/2} t^{1/2}} \left(8 - \frac{r^2}{(QKt)^{1/2}} \right) \quad \text{para } r \leq r_1 = \sqrt{8(QKt)^{1/4}},$$

$$0 \quad \text{para } r > r_1$$

Donde:

- Q: Volumen de la recarga (L^3)
- K: Coeficiente de conductividad hidráulica (L/T) expresado: Como: $K=k\rho g / (2m\mu\sigma)$. Ver 1ª. parte

Siendo: k : permeabilidad intrínseca del medio (L^2)

- ρ : densidad del fluido (M/L^3)
- g : aceleración de la gravedad (L/T^2)
- m : porosidad del medio
- μ : viscosidad del fluido (M/LT)
- σ : saturación del medio

- t : tiempo, (T).
- r : distancia desde el punto de recarga (L)

Con el volumen de la recarga se halla r_1 (alcance del frente de agua para un tiempo determinado) y se reemplaza en la ecuación que describe la altura usando el mismo tiempo con que fue hallado r_1 . Con un nuevo tiempo se calcula el nuevo r_1 y se repite el proceso anterior, las veces que se quiera conocer la posición del frente de fluido.

A continuación se observan los gráficos de propagación de un volumen de agua en los primeros minutos (Figura 3) y después de días de iniciado el proceso (Figura 4).

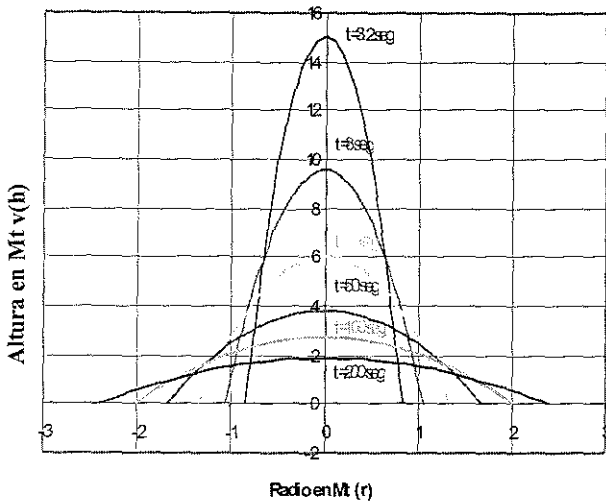


Figura 3. Esquema de distribución de alturas para agua sin retención para el intervalo $T=3.2$ seg. a $T=200$ seg.

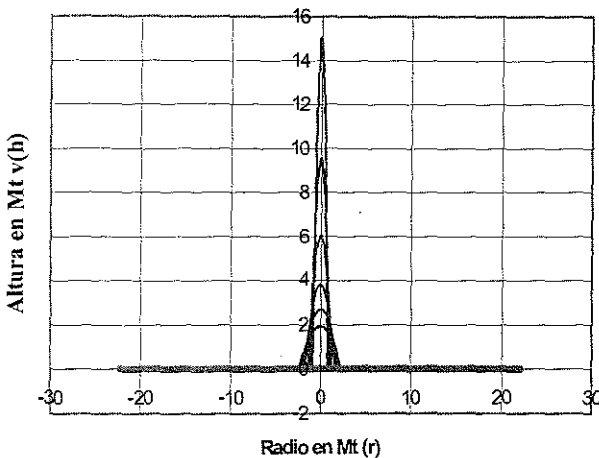


Figura 4. Esquema de distribución de agua sin considerar retención residual, para un tiempo de 17.4 días.

B. Cuando se considera retención residual.

En este caso la conductividad hidráulica toma dos valores diferentes según se trate de entrada o de salida del fluido en el medio poroso (llenado o drenaje). La distribución de alturas a partir de una recarga para este caso se obtiene la siguiente ecuación.

$$h = At^{-\alpha} \Phi_1(\zeta, k_2/k_1), \tag{12}$$

$$\alpha = (2 + \gamma)/4, \quad \beta = (1 - \varepsilon)/4$$

$$A = Q^{(2-\gamma)/4} r_0^\gamma k_1^{-\alpha}, \quad B = (Qk_1)^\beta r_0^{1-4\beta},$$

$$\zeta = r / Bt^\beta$$

En el presente trabajo se obtuvo dicha distribución para dos líquidos diferentes, agua y crudo de petróleo de 48° API.

En este caso $K_1 = ktg / (2mm(s-s_0))$, donde s_0 es la retención residual. r_0 ancho de la recarga o inyección (L). b, a : Exponentes anómalos obtenidos en la solución. $F(z, K_2/K_1)$: Valores de la Función F para un K_2/K_1 definido.

Para determinar el comportamiento de la solución se hace lo siguiente: Con los valores conocidos de K_2/K_1 , Q (volumen de la recarga) y r_0 (radio del pozo) se obtiene el valor de b en la Figura 2. Con la ecuación $z = r / (Btb)$ y para un tiempo determinado se hallan los diferentes frentes de fluido (radio de propagación). Para los diferentes z con el valor de K_2/K_1 se calcula el valor de la función $F(z, K_2/K_1)$ en la Figura 1. Reemplazando estos valores en la ecuación (12) y calculando los demás parámetros que intervienen se hallan las alturas para las diferentes distancias desde el pozo en el tiempo escogido. Con un nuevo tiempo se repite el procedimiento anterior y se obtiene así la forma del avance del fluido.

En las Figuras 5 y 6 se muestra el comportamiento de la propagación de los fluidos mencionados.

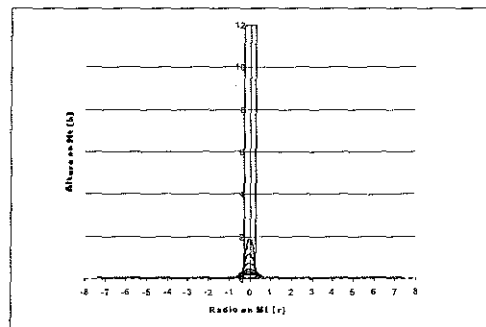


Figura 5. Esquema de distribución de alturas para agua considerando retención residual para un intervalo de tiempo $T= 3.2$ seg y $T= 17.36$ días.

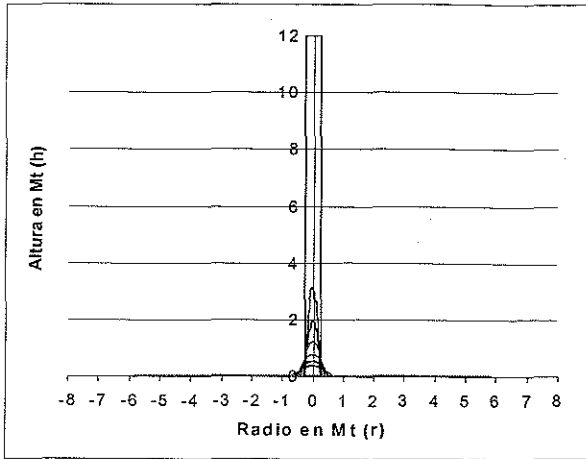


Figura 6. Esquema de distribución de alturas para crudo de petróleo de 48° API considerando retención residual para un intervalo de tiempo $T=3.2$ seg

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el caso de difusión de un volumen de agua sin considerar retención se utilizaron los siguientes datos:

- Volumen de la recarga 2.7 m^3
- permeabilidad del medio poroso $k=10^{-10} \text{ m}^2$.
- densidad del agua a 15°C , 999 Kg./m^3
- porosidad del suelo 0.45
- viscosidad del agua a 15°C , $\mu=1.2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg./m}^3\text{seg}$

Las alturas y el avance del fluido cuando no se tiene en cuenta retención son determinados de acuerdo a la ecuación (11) cuya solución no considera la forma inicial de la montaña ni la existencia de retención residual; por esta razón el volumen disponible para fluir permanece constante en el transcurso del proceso y es igual –para un tiempo determinado– a la integral bajo la curva que delimita la forma de la montaña de fluido.

En este caso el fluido en cuestión podría seguir fluyendo indefinidamente sobre el lecho impermeable. Y formar una lamina infinita, así que el frente de fluido se extiende infinitamente. Con este tipo de modelamiento no es posible determinar la expansión máxima del fluido ni el tiempo final, sus consideraciones lo hacen un fenómeno ideal, situación que en la naturaleza no se presenta.

El mismo problema pero considerando retención residual del suelo se rige por la ecuación (12), que fue expuesta en el trabajo anterior con las notaciones correspondientes.

Las propiedades del suelo y del fluido tienen los mismos valores de la aplicación anterior. El dato adicional ahora, σ_0 (retención residual) se asumió con un valor de 0.1 y representa el porcentaje de fluido retenido en el medio debido a las fuerzas capilares.

En este caso aparece una nueva escala que debe considerarse, el ancho de la forma inicial de la montaña r_0 , en este caso se toma como el radio del pozo donde se hace la recarga. Para el ejemplo se toman $r_0=0.24 \text{ m}$ la altura inicial $h_0=12 \text{ m}$. En este caso el volumen de fluido disminuye en el transcurso del proceso. Se determina el comportamiento para el agua y se obtiene la Figura 8 donde se observa el avance del agua en los primeros tres minutos.

Con el propósito de comparar el avance de dos fluidos con propiedades diferentes, densidad y viscosidad, pero en el mismo medio poroso (porosidad, saturación y retención residual). Se estudió la propagación de otro fluido, crudo de petróleo de 48° API (Figura 7), sus resultados se comparan con el ejemplo de propagación del agua para el caso en que hay retención.

Las propiedades del crudo de petróleo a 15°C son las siguientes: $\rho=787.5 \text{ Kg/m}^3$, $\mu=2.56 \cdot 10^{-3} \text{ Kg./m}^3\text{seg}$

Los tiempos en que se evaluaron las alturas de esparcimiento en todos los ejemplos son los mismos (para tiempos menores alturas mayores y viceversa), la altura inicial de la recarga de fluido disminuye con el tiempo.

Debido a la diferencia de las propiedades físicas de cada fluido la difusión de estos varían en función de sus propiedades, así observamos que para el fluido más viscoso (crudo de 48° API) la pérdida de altura es más lenta que para el caso del agua. En las Figuras 7 y 8 se observa que para un tiempo de 20 segundos la altura en el pozo cuando el fluido es agua es de aproximadamente 0.7 metros y cuando el fluido es crudo es de 1.2 metros.

En las Figuras 5 y 6 se observa el avance del frente de los fluidos a los 17.36 días. En la medida que el fluido avanza se tiene obtiene una lamina de fluido sobre el lecho impermeable, en este caso se estimó que a los 115 días el agua aún presenta una altura de 0.8 mm y su radio de expansión es de 11.7 m, mientras que el crudo de petróleo de 48° API presenta una altura de 1.4 mm y un radio de expansión de 9.1 m recordando que el volumen es el mismo en los dos casos, la forma inicial de la recarga y las características del medio también se mantiene constantes.

Se ha observado el avance de frentes de fluido a partir de una recarga o inyección realizada desde una zona concentrada, que para este caso es un pozo, el fluido se propaga sobre el lecho o suelo impermeable. Se pudo observar la diferencia de comportamiento cuando se considera retención residual o no. Se observó también la diferencia de tiempos en el avance del agua y del petróleo en tiempos pequeños del orden de minutos y en tiempos grandes del orden de días.

CONCLUSIONES

Cuando se considera retención residual en el medio poroso, se obtiene la solución a la ecuación diferencial con conductividad hidráulica discontinua, lo cual da lugar a la aparición de un exponente y la consideración del ancho de la zona de recarga en la solución. Esta consideración permite obtener la forma real de la propagación de la masa de fluido en un suelo poroso no saturado.

La propagación o evolución de un volumen de fluido que es inyectado en una región concentrada, por ejemplo un pozo, se puede determinar a partir de los valores de conductividad hidráulica del suelo (en función del valor de porosidad y retención residual) y de volúmenes de recarga inicial. Es posible medir el alcance del fluido para un tiempo determinado y estimar el avance total del frente.

Se obtuvo el exponente llamado anómalo, β , que hace parte de la solución, recurriendo a los métodos numéricos como una ayuda para la solución del problema de autovalor. A este problema se llegó por medio de un proceso analítico como lo es el análisis dimensional, utilizado para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Los métodos numéricos son utilizados extensamente en la solución numérica de problemas de ingeniería, en este caso, ellos complementan una solución analítica.

Al comparar el proceso de esparcimiento mostrado por los gráficos de fluidos como el agua y el crudo de petróleo de 48° API en un mismo medio, se observa que las propiedades del fluido determinan tanto la forma de esparcimiento como su velocidad de propagación. Se pudo observar el avance del fluido en varias escalas de tiempo, tiempos pequeños (segundos), y tiempos grandes (días).

Para desarrollar este tipo de aplicaciones se requiere conocer los parámetros físicos del medio o suelo en estado no saturado. Por lo tanto se debe avanzar en investigaciones que permitan el desarrollo de mecanismos para la medición de la retención residual del suelo y fuerzas de capilaridad (tensiómetros). Lo anterior permitirá la confrontación en laboratorio de los resultados obtenidos a partir del análisis teórico de las ecuaciones de flujo. Posteriormente se debe pasar a la aplicación y verificación de estos resultados en campo.

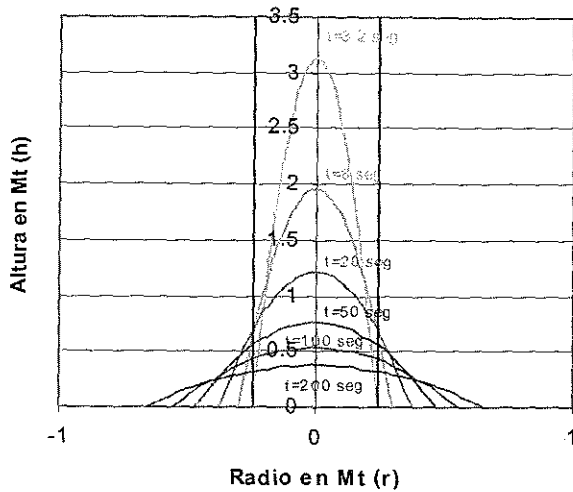


Figura 7. Esquema de distribución de alturas para crudo de petróleo de 48° API para un intervalo de tiempo entre T= 3.2 seg y T = 200 seg

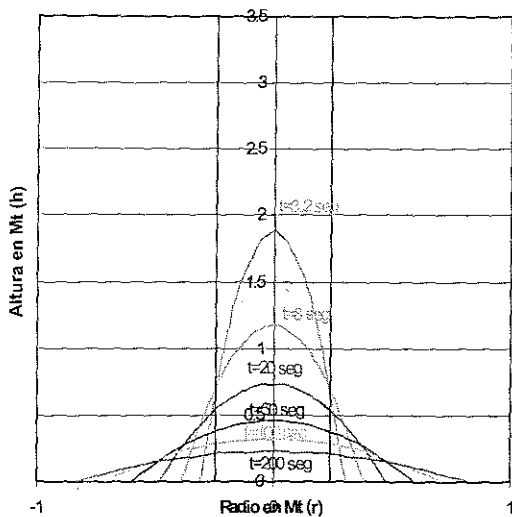


Figura 8. Esquema de distribución de alturas para agua considerando retención residual para un intervalo de tiempo de T=3.2 seg y T=200 seg

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BARENBLATT, G.I. Dimensional análisis. Gordon and Breach sci. publ. 1987.
- [2] GÓMEZ, S, MESA, O.J. Flujo en rocas usando grupos de renormalización. Revista Colombiana de Física. Vol.30 No.1. 1998
- [3] KOCHINA, I.N. MIKHAILOV, N.N, FILINOV, M.V. Groundwater Mound Damping. Int. J. Engng. Sci. Vol 21. No.4. pp 413-421. 1983.
- [4] COGOLLO, C, ROJAS, L. Solución numérica de la ecuación de flujo en medio poroso lejos del equilibrio. Proyecto de Grado de Ingeniería Civil. UIS. 1999.
- [5] BURDEN, R, DOUGLAS, F. Análisis numérico. Grupo Editorial Iberoamericana. 1985.