

Análisis de sensibilidad y de estabilidad numérica en el cálculo de factores de intensidad de tensiones en un caso de mecánica de fractura

Analysis of sensitivity and numerical stability in the calculation of factors of tension intensity in a case of fracture mechanics

Wilson Rodríguez-Calderón¹, Rosangel Rojas-Aguero², José Yépez-Aguirre³, Myriam Pallares-Muñoz⁴

¹Programa de Ingeniería Civil, Universidad Cooperativa de Colombia, Colombia. Email: wilroca50@hotmail.com

²Universidad Federal de Rio Grande del Sur, Porto Alegre, Brasil. Email: rosangelrojasa@hotmail.com

³Universidad Federal de Rio Grande del Sur, Porto Alegre, Brasil. Email: chepel2@hotmail.com

⁴Programa de Ingeniería Civil, Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia. Email: myriam.pallares@usco.edu.co

RECIBIDO: Noviembre 15, 2016. ACEPTADO: Marzo 1, 2017. VERSIÓN FINAL: Mayo 15, 2017.

RESUMEN

El artículo aborda el cálculo de factores de intensidad de tensiones en un caso de mecánica de fractura en placas de acero bajo configuración de carga uniforme. Se explora la sensibilidad del factor de primer modo de intensidad de tensiones K_I respecto a las relaciones a/w , a/h , h/w (a : tamaño de fractura inicial, w : ancho de placa, h : distancia vertical entre la fractura y la línea de carga). Se realizan comparaciones de los resultados obtenidos por diferentes metodologías como la analítica obtenida de la literatura, el método de colocación del contorno implementado en el software libre MAXIMA y el método de elementos finitos implementado a través de un modelo en ANSYS. Dado que, el método de colocación del contorno incorpora una solución generalizada por mínimos cuadrados, es posible observar algunos problemas de inestabilidad numérica asociados principalmente a casos en los que el tamaño de la fractura inicial es considerable respecto al ancho de la placa cargada. Los aportes más destacados se dan respecto al análisis de sensibilidad particular del caso, el análisis de problemas de inestabilidad numérica en situaciones específicas de cálculo de K_I , implementaciones de códigos en software libre como MAXIMA e implementación de modelos de elementos finitos en ANSYS usando elementos Quarter Point. Los resultados obtenidos se reportan mediante comparaciones numéricas y gráficas del comportamiento del factor K_I para las diferentes relaciones estudiadas, bajo las diferentes metodologías. El artículo concluye sobre cuáles son las relaciones significativas en la sensibilidad del factor de intensidad de tensiones K_I y el origen de los problemas de inestabilidad numérica del método de colocación mediante el estudio paramétrico asociado al número de condición del sistema de la matriz global del mismo método.

PALABRAS CLAVE: Análisis de sensibilidad, ANSYS, Método de colocación del contorno, MAXIMA, Elementos finitos, Fractura.

ABSTRACT

The article studies the calculation of stress intensity factors in a case of fracture mechanics in steel plates under uniform load configuration. The sensitivity of the first mode factor of stress intensity K_I with respect to the relationships a/w , a/h , h/w (a : initial fracture size, w : plate width, h : vertical distance between fracture and the loading line) is explored. We perform comparisons of the results obtained by different methodologies such as the analytical obtained from the literature, the method of placement of the contour implemented in the free software MAXIMA and the finite element method implemented through a model in ANSYS. Since the method of positioning the contour incorporates a generalized least squares solution, we could observe some problems of numerical instability associated mainly to cases in which the size of the initial fracture is considerable with respect to the width of the loaded plate. The most relevant contributions are given regarding the particular sensitivity analysis of the case, the analysis of problems of numerical

Este artículo puede compartirse bajo la licencia **CC BY-ND 4.0** y se referencia usando el siguiente formato: W. Rodríguez-Calderón, R. Rojas-Aguero, J. Yépez-Aguirre, M. Pallares-Muñoz, "Análisis de sensibilidad y de estabilidad numérica en el cálculo de factores de intensidad de tensiones en un caso de mecánica de fractura", UIS Ingenierías, vol. 16, no. 2, pp. 151-160, Julio-Diciembre 2017. Doi: <https://doi.org/10.18273/revuin.v16n2-2017014>

instability in specific situations of K_I calculation, implementations of free software codes such as MAXIMA and implementation of finite element models in ANSYS using Quarter Elements Point. The results obtained are reported by numerical and graphical comparisons of the behavior of the K_I factor for the different relationships studied under different methodologies. The article concludes on what are the significant relations in the sensitivity of the stress intensity factor K_I and the origin of the problems of numerical instability of the placement method by the parametric study associated to the condition number of the system of the global matrix of the same method.

KEYWORDS: Sensibility analysis, ANSYS, Method of placement of the contour, MAXIMA, Finite elements, Fracture mechanics.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo del factor de intensidad de tensiones K_I (modo I o modo de apertura) tiene importancia práctica para la determinación de la posibilidad inminente de fractura de una pieza o elemento estructural, así como en la determinación de variables asociadas al cálculo de esfuerzos de fractura y de parámetros de energía de fractura. En el artículo se aborda el estudio de un problema clásico de una placa con grieta de tamaño a bajo carga uniforme aprovechando que particularmente existe disponibilidad de soluciones teóricas para realizar comparaciones frente a opciones numéricas. La figura 1 muestra el problema de fractura parametrizado donde w es el ancho de la placa, h es la distancia vertical entre la grieta y la línea de carga, p el valor de la carga distribuida por unidad de área y a el tamaño de la grieta.

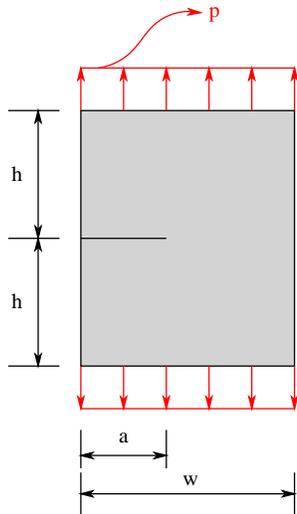


Figura 1. Caso de fractura en modo de apertura parametrizado. **Fuente.** Elaboración propia.

1.1. Calculo teórico del factor de intensidad de tensiones modo I para el caso de carga uniforme

En la literatura pueden encontrarse diferentes fórmulas más o menos calibradas para el cálculo del factor de intensidad de tensiones K_I , a continuación, se muestra la

fórmula empleada en el análisis reportado en este artículo:

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

Donde α es un factor de corrección de geométrica cuya expresión es:

$$\alpha = 1.12 - 0.23(a/w) + 10.55(a/w)^2 - 21.71(a/w)^3 + 30.38(a/w)^4 \quad (2)$$

1.2. Calculo numérico del factor de intensidad de tensiones K_I para el caso de carga uniforme por el método de colocación del contorno

William (1957, [1]) encontró una solución general para el campo de tensiones general alrededor de una grieta (ver figura 2) empleando las denominadas funciones de Airy así:

$$\sigma_{xx} = \sum_{j=0}^J A_j (r/w)^{j-1/2} \{ \cos[(j-1/2)\theta] - (j-1/2) \sin(\theta) \sin[(j-3/2)\theta] + \sum_{m=0}^M B_m (r/w)^m \{ 2 \cos(m\theta) - m \sin(\theta) \sin[(m-1)\theta] \} \} \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{j=0}^J A_j (r/w)^{j-1/2} \{ \cos[(j-1/2)\theta] + (j-1/2) \sin(\theta) \sin[(j-3/2)\theta] + \sum_{m=0}^M B_m (r/w)^m \{ m \sin(\theta) \sin[(m-1)\theta] \} \} \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{j=0}^J -A_j (r/w)^{j-1/2} \{ (j-1/2) \sin(\theta) \cos[(j-3/2)\theta] - \sum_{m=0}^M B_m (r/w)^m \{ m \sin(\theta) \cos[(m-1)\theta] + \sin(m\theta) \} \} \quad (5)$$

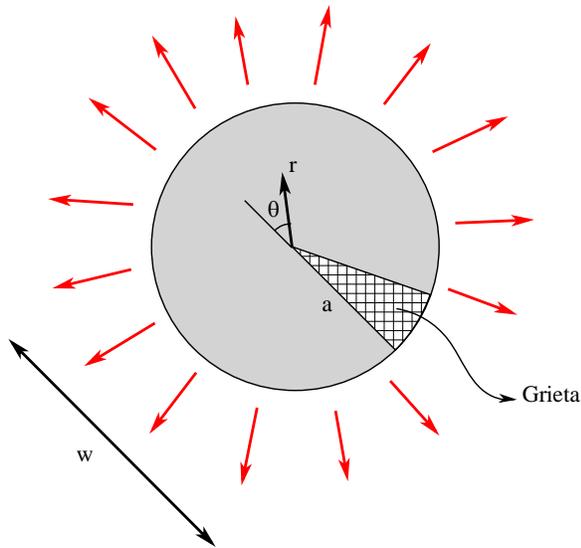


Figura 2. Dominio alrededor de una grieta. **Fuente.** Elaboración propia.

Aplicando las ecuaciones (3), (4) y (5) a puntos igualmente espaciados alrededor del contorno de la grieta y aprovechando la simetría es posible obtener un sistema lineal de ecuaciones. Debe tenerse en cuenta que las condiciones de contorno del problema son conocidas. En la figura 3 se ilustra el proceso de discretización y las condiciones de contorno aplicadas.

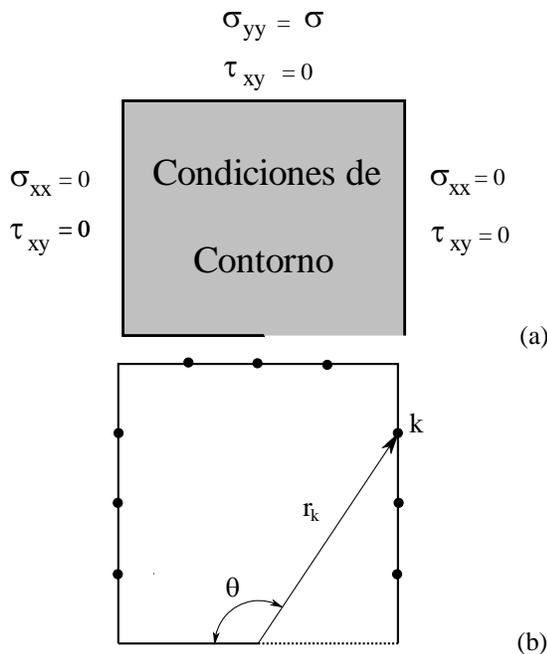


Figura 3. Problema de fractura bajo carga uniforme. (a) Condiciones de contorno (b) Discretización del contorno en el método de colocación del contorno $k=1, n$ ($n=9$ para la figura). **Fuente.** Elaboración propia.

A continuación, se ilustra el planteamiento matemático del método de colocación del contorno (Gross et al, 1964), teniendo en cuenta que los subíndices de σ indican el punto en cuestión y las tensiones σ pueden ser para el caso tensiones xx, yy o xy aplicadas punto a punto por la imposición de las condiciones de contorno y las funciones f_j y g_m corresponden a las funciones que acompañan a los coeficientes A_j , B_m respectivamente, dentro de la expresión correspondiente para la tensión evaluada mediante las ecuaciones generales 3, 4 y 5. Los valores límite J y M para el desarrollo de las series pueden ser determinados en la práctica por la calibración del número de términos necesario para la convergencia de la serie a valores constantes. De esta manera la formulación sería:

$$\sigma_1 = \sum_{j=0}^J A_j f_j^1(r_1, \theta_1) + \sum_{m=0}^M B_m g_m^1(r_1, \theta_1)$$

$$\sigma_2 = \sum_{j=0}^J A_j f_j^2(r_2, \theta_2) + \sum_{m=0}^M B_m g_m^2(r_2, \theta_2)$$

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^J A_j f_j^n(r_n, \theta_n) + \sum_{m=0}^M B_m g_m^n(r_n, \theta_n)$$

Donde:

$\sigma_n \rightarrow$ Tensiones xx, yy o xy conocidas en el contorno.
 $A_j, B_m \rightarrow$ Coeficientes de desarrollo de las series a ser determinados.
 $f_j, g_m \rightarrow$ Funciones de William.

Del proceso de las ecuaciones (6) resulta un sistema lineal de ecuaciones no cuadrado así:

$$\{\sigma\} = [M]\{C\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_J^1 & g_0^1 & g_1^1 & \dots & g_M^1 \\ f_0^2 & f_1^2 & \dots & f_J^2 & g_0^2 & g_1^2 & \dots & g_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^n & f_1^n & \dots & f_J^n & g_0^n & g_1^n & \dots & g_M^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma^*\} = [M^*]\{C\}$$

Donde:
 $\{\sigma^*\} = [M]^T \{\sigma\}$
 $[M^*] = [M]^T [M]$

El sistema (8) puede ser resuelto por algún método de factorización o por métodos iterativos. En el caso de este artículo se empleó la factorización LU. Resuelto el sistema y determinado el vector C, es posible calcular K_I como $K_I = A_0 (2\pi w)^{0.5}$

1.3. Cálculo numérico del factor de intensidad de tensiones K_I para el caso de carga uniforme por el método de elementos finitos

El artículo no aborda toda la formulación de elementos finitos del problema de fractura, más bien se hace énfasis en detalles particulares importantes para la modelación del fenómeno y para el cálculo del factor de intensidad de tensiones. Respecto a los elementos finitos es importante anotar que es común emplear elementos finitos especiales alrededor de la punta de la grieta, estos elementos se denominan elementos quarter point y tienen la cualidad de capturar de manera muy precisa el campo de desplazamientos y de tensiones en la cercanía de la punta de la grieta donde los gradientes de tensiones son realmente altos.

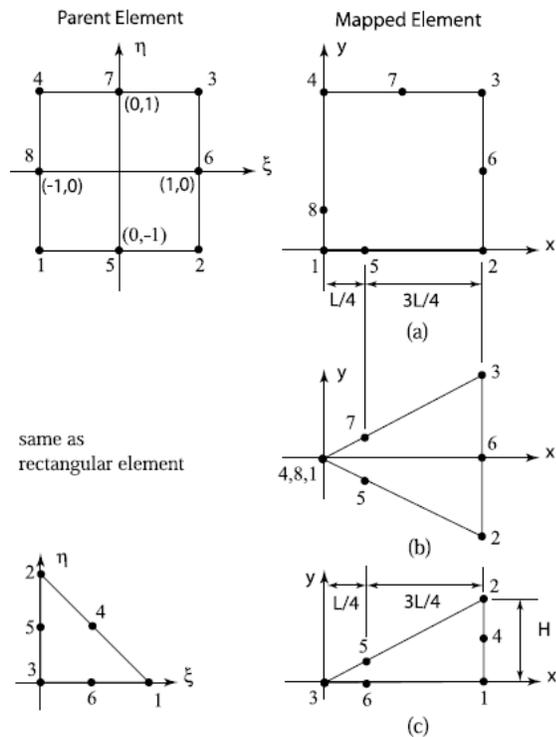


Figura 4. Elementos quarter-point en coordenadas naturales (parent element) y coordenadas reales (mapped element) (a) Elemento cuadrilátero de 8 nodos (b) Elemento triangular por colapso de los nodos 4,8 y 1. (c) Elemento triangular natural (recomendado para problemas lineales). **Fuente.** Fracture mechanics, Alan T. Zehnder, pag. 91.

Para el cálculo del factor de intensidad de tensiones puede evaluarse este en dos puntos cercanos a la punta de

la grieta, que comúnmente son los dos nodos del elemento quarter point sobre la grieta. Teniendo esto es posible extrapolar linealmente a la punta de la grieta y calcular de este modo el factor de intensidad de tensiones correcto. La fórmula empleada para evaluar el factor de intensidad de tensiones en los nodos mencionados es:

$$K_I = \frac{E\sqrt{2\pi}u_y}{4\sqrt{r}} \quad (9)$$

2. MÉTODOS

2.1. Calibración del método de colocación del contorno para el caso de carga uniforme usando el cas libre MAXIMA

Para ilustrar un poco sobre el sistema de algebra computacional CAS usado, puede decirse que MAXIMA es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, que produce resultados de alta precisión usando fracciones exactas, números enteros de precisión arbitraria y números de coma flotante con precisión variable. Por otra parte, puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones. Dado que es un programa libre puede ser compilado en varios sistemas operativos como Windows, Linux y MacOS X. MAXIMA es un descendiente de Macsyma, un sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Este es el único sistema basado en ese programa que está todavía disponible públicamente y con una comunidad activa de usuarios, gracias a la naturaleza del software abierto. Macsyma fue revolucionario en su tiempo y muchos sistemas posteriores, como Maple y Mathematica, se inspiraron en él. La rama MAXIMA de Macsyma fue mantenida por William Schelter desde 1982 hasta su muerte en 2001. En 1998 él obtuvo permiso para liberar el código fuente bajo la licencia de software libre GPL. Entrando al tema de la calibración, dado que, el método de colocación del contorno implica una discretización de la frontera del dominio y un desarrollo truncado de las series, se requiere conocer el número de coeficientes y el número de puntos de análisis necesarios para llegar a un valor estable en el cálculo del factor de intensidad de tensiones. Para la implementación se realizó un desarrollo de un macro y un archivo de instrucciones bajo el lenguaje propio de MAXIMA, debido a que se requiere realizar ciclos de cálculo que se desarrollan mediante la llamada continua al macro desarrollado en MAXIMA, este se encarga de calcular el factor de intensidad de tensiones para cada uno de los llamados y así poder generar una curva de convergencia o de calibración del método. MAXIMA posee ventajas respecto a su capacidad simbólica, su capacidad gráfica y la riqueza de comandos disponibles para la generación de macros adaptados a las necesidades específicas de un

problema. Para la calibración primero se realizan ciclos de cálculo incrementando el número de coeficientes presentes en la formulación (J,M) desde 5 hasta 50 con paso de 5 (ver figura 5). Una vez encontrada la cantidad eficiente de coeficientes se realiza una segunda calibración del número de puntos necesario para la discretización que es manejado por una fórmula interna que es $3*(nd-1)$ donde nd varía de 5 a 30 con paso de 5 y este representa el número de divisiones de cada línea que por facilidad se maneja igual para las tres líneas del modelo, el valor de 30 divisiones puede ser incrementado solo que con algunas pruebas es posible determinar que 30 es un número de divisiones razonable para resultados satisfactorios (ver figura 6). El macro de máxima

desarrollado calcula además el número de condición de la matriz M^* para conocer un índice del condicionamiento de la matriz y de la posible afectación de los resultados si la matriz resultante posee un número de condición demasiado alto. La figura 5 muestra el proceso iterativo de un modelo donde $a=50$ mm, $h=100$ mm, $w=100$ mm, $p=1$ MPa, $nd=30$, $J=M=[5\dots50]$ con paso de 5. En esta figura puede verse que un número razonable para desarrollar las series es $J=M=30$.

La figura 6 muestra los resultados obtenidos dejando fijo el número de coeficientes ya determinado e incrementando el número de puntos como ya se explicó.

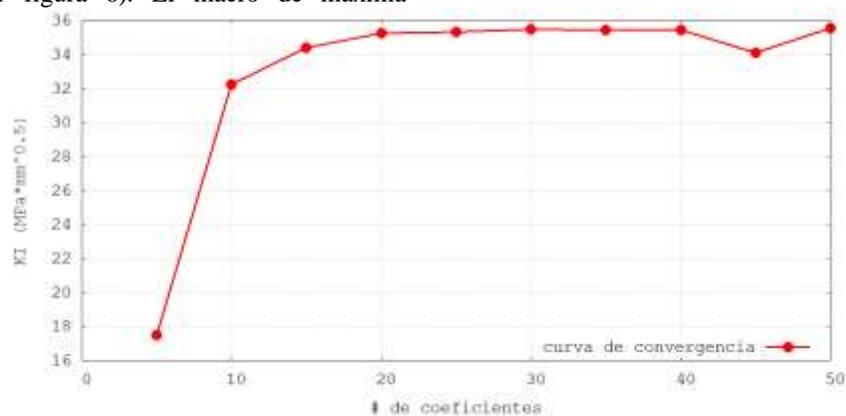


Figura 5. Curva de convergencia para elegir el número eficiente de coeficientes a tener en cuenta para el desarrollo de las series de la solución de William. **Fuente.** Elaboración propia.

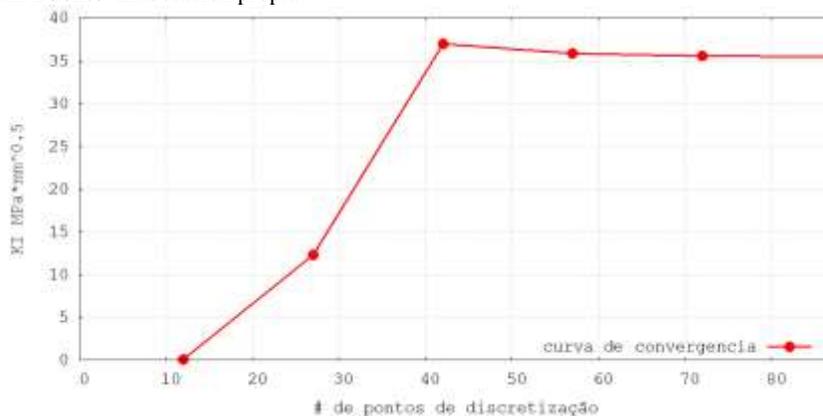


Figura 6. Curva de convergencia para determinar una solución estable del factor de intensidad de tensiones. **Fuente.** Elaboración propia.

3. RESULTADOS

3.1. Modelo de elementos finitos para el cálculo de factor de intensidad de tensiones para el caso de carga uniforme usando ANSYS

Los datos básicos usados para el modelo mostrado a continuación son: $a=10$ mm, $h=100$ mm, $w=100$ mm, $p=1$ MPa, $E=200$ GPa (módulo elástico), $\nu=0.3$ (coeficiente

de Poisson), Espesor = 1mm. La figura 7 muestra las condiciones de carga (1), las condiciones de apoyo del modelo (2) y los detalles de los nodos de los elementos quarter point alrededor de la punta de la grieta (3). La malla es no estructurada, el elemento finito usado es el PLANE183, bajo la opción de esfuerzo plano con constante real de espesor especificado, por último, se realizaron test de malla, para una densidad razonable de elementos que capturen la solución de manera precisa.

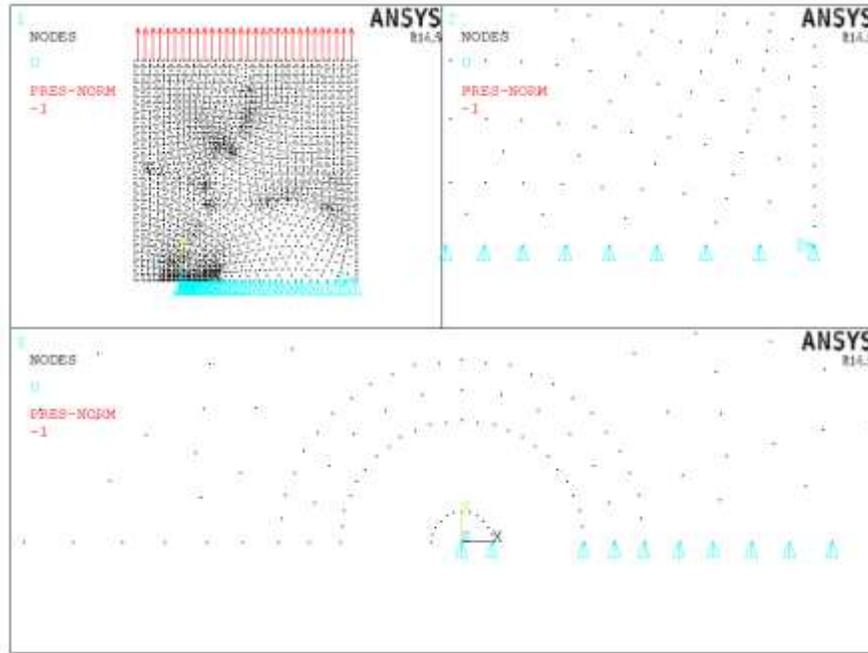


Figura 7. Condiciones de carga (1), condiciones de apoyo del modelo (2) y detalles de los nodos de los elementos quarter point alrededor de la punta de la grieta (3). **Fuente:** Elaboración propia.

La figura 8 muestra la deformada (3) e isocontornos de desplazamiento vertical (2) y horizontal (1). Basado en los resultados de la ventana 2 de la figura se realizan los

cálculos como ya se explicó anteriormente en el apartado 1.3 y usando como parte del proceso la ecuación (9).

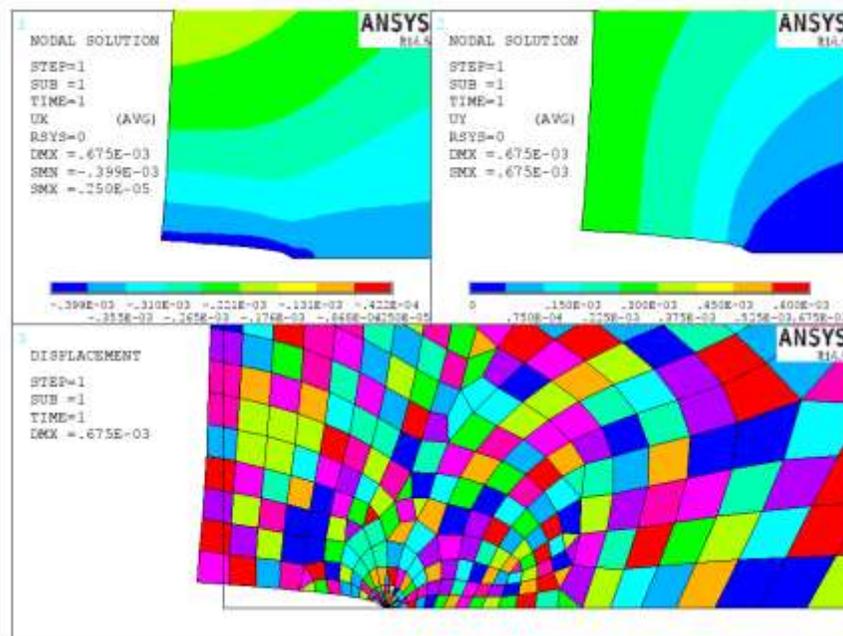


Figura 8. Postproceso de deformada (3) e isocontornos de desplazamiento vertical (2) y horizontal (1). **Fuente:** Elaboración propia.

La Figura 9 muestra los isocontornos de tensiones normales xx (1), yy (2) y las tensiones de corte xy (3).

Puede verse concentraciones de tensiones en cada uno de los componentes de tensión.

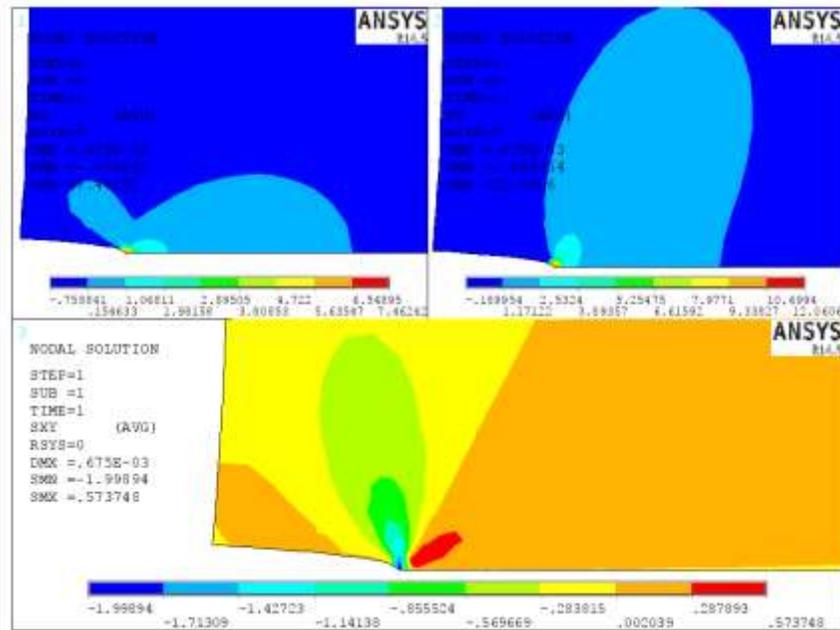


Figura 9. Isocontornos de tensiones normales σ_{xx} (1), σ_{yy} (2) y las tensiones de corte τ_{xy} (3). Fuente. Elaboración propia.

3.2. Análisis de sensibilidad y de estabilidad numérica del cálculo del factor de intensidad de tensiones para el caso de carga uniforme

En este apartado se explica el análisis de sensibilidad del factor de primer modo de intensidad de tensiones K_I respecto a las relaciones a/w , a/h , h/w (a : tamaño de fractura inicial, w : ancho de placa, h : distancia vertical entre la fractura y la línea de carga). La figura 9 muestra comparaciones de los resultados obtenidos por vía analítica, usando el método de colocación del contorno implementado en el software libre MAXIMA y el método de elementos finitos implementado a través del modelo en ANSYS. Para la sensibilidad se hacen barridos de cada una de las relaciones mencionadas y se calcula el factor de intensidad de tensiones, lo que implica realizar varios análisis cambiando el valor de los parámetros y para esto es útil el empleo de los modelos numéricos y teóricos ya parametrizados e implementados en las diferentes herramientas computacionales.

Dado que, el método de colocación del contorno incorpora una solución generalizada por mínimos cuadrados, es posible observar algunos problemas de inestabilidad numérica asociados principalmente a casos en los que el tamaño de la fractura inicial es considerable respecto al ancho de la placa cargada. Al respecto, puede verse que en la figura 10 que los valores de K_I evaluados en la relación a/w de 0.8 y 0.9 se alejan de la solución analítica tanto en el modelo de ANSYS, como en el método de colocación del contorno. Si se observa en el eje secundario de la gráfica está el valor del número de condición de la matriz M^* del método de colocación y

puede verse que en a/w de 0.8 y 0.9 se dan cambios importantes en el condicionamiento de la matriz que afectan la lógica misma del valor del factor de intensidad de tensiones que aumenta con el tamaño de la grieta, indudablemente en esta zona los resultados no son confiables, en los valores de a/w de 0.1 y 0.2 también hay números de condición un poco grandes, sin embargo el cálculo de K_I se mantiene dentro de valores correctos. En el valor de a/w de 0.5 se da el menor número de condición y por esto se eligió este modelo para la calibración adecuada del método de colocación en el problema.

Respecto a las diferencias de las curvas de sensibilidad de a/w vs K_I analítico y de ANSYS, es posible que la fórmula analítica posea restricciones para el cálculo de K_I cuando el tamaño de la grieta sea grande como en los valores a/w de 0.8 y 0.9, para analizar esto se realizaron refinamientos de malla en ANSYS sin obtener cambios significativos en K_I . En la literatura algunas fórmulas advierten límites de aplicación en grietas grandes, sin embargo, la fórmula usada no reporta nada al respecto. El comportamiento de la curva de sensibilidad de a/w vs K_I analítico sigue la lógica de incrementar el valor de K_I con el incremento de a/w y quedaría para la verificación experimental que pasa con K_I en los valores de a/w de 0.8 y 0.9, en todo caso ANSYS supervalora a K_I respecto a la solución analítica y esto iría en favor de la seguridad.

Las sensibilidades de K_I respecto a a/h y h/w no se encontraron en la literatura, no obstante, los resultados ratifican que K_I se mantiene prácticamente constante variando la relación h/w , luego K_I no es sensible a esta relación, por otra parte, respecto a a/h se encuentra algo

de sensibilidad, pero no comparable a la encontrada en a/w . Los incrementos realizados en a/h implican un acercamiento de la carga a la grieta que conduce a un aumento del factor K_I .

Finalmente, puede verse que los resultados indican que la sensibilidad más importante se da respecto a la relación a/w y explica la abundancia de soluciones analíticas para

el cálculo de K_I como función de la relación a/w . Se advierten cuidados importantes a tener en cuenta cuando la grieta se hace grande ($a/w > 0.8$), ya que, pueden existir dudas sobre la certeza del cálculo por lo que se recomienda usar en este caso un modelador de elementos finitos (el cálculo por colocación infravalora K_I cuando la grieta es grande).

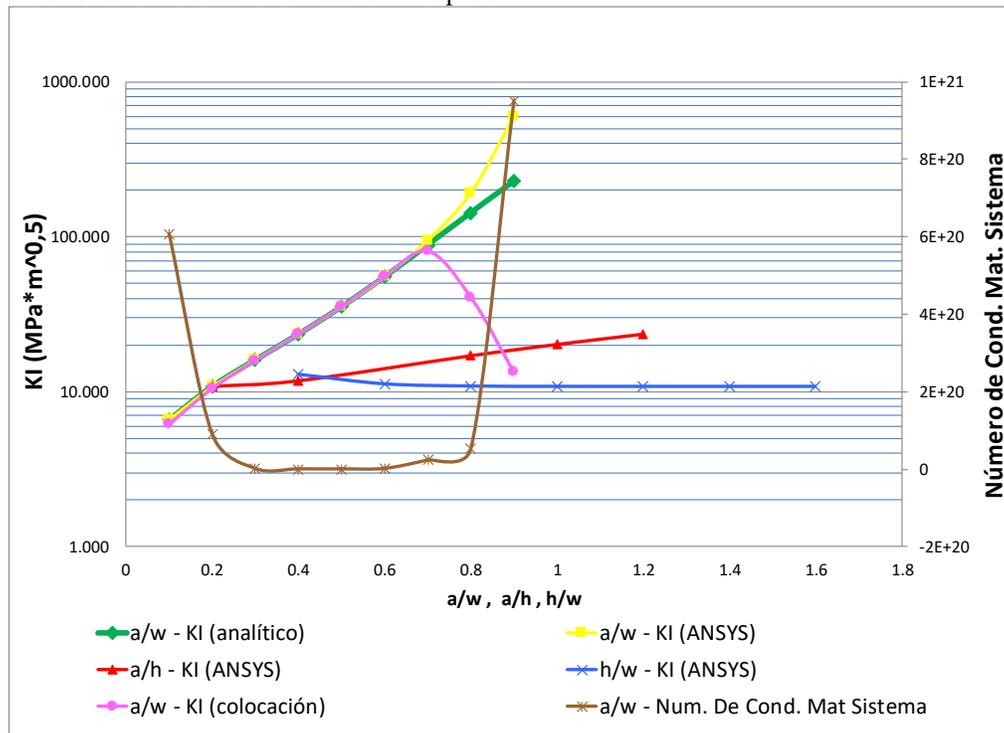


Figura 10. Curvas de sensibilidad y de condicionamiento del cálculo del factor de intensidad de tensiones para el caso de carga uniforme. **Fuente.** Autores.

4. CONCLUSIONES

El artículo concluye que la relación de mayor sensibilidad para el factor de intensidad de tensiones es a/w , mientras que la relación h/w prácticamente no presenta ninguna sensibilidad y la relación a/h presenta una sensibilidad moderada. El origen de los problemas de inestabilidad numérica del método de colocación se determinó mediante el estudio paramétrico asociado al número de condición del sistema de la matriz global del mismo método, encontrando que cuando la relación a/w toma valores iguales o superiores a 0.8 el método entrega resultados errados. Respecto a las implementaciones, el software libre MAXIMA representa una excelente alternativa para atacar problemas de alta complejidad simbólica y numérica, ya que este cuenta con funciones básicas y avanzadas para desarrollar macros de manera adaptada y eficiente. Los modelos realizados con ANSYS muestran resultados muy satisfactorios que colocan esta herramienta como un instrumento confiable

para modelar problemas de fractura bajo diferentes configuraciones de geometría.

5. REFERENCIAS

- [1] Anderson, T. L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. CRC Press, 2005. ISBN 0849316561.
- [2] Barsoum, R. S. On The Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 10, N. 1, P. 25-37, 1976. ISSN 1097-0207. 1976.
- [3] Bittencourt, E. Mecânica Da Fratura E Do Dano. UFRGS 2011.
- [4] González, V.; Maravilla, E.; Tarancón, J. "Descripción del crecimiento de grietas usando una aproximación geométrica basada en level sets y fast marching method". Revista uis ingenierías, [s.l.], v. 16, n. 1, ene. 2017. ISSN 2145-8456. [En Línea] Disponible en:

<http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistauisingenierias/article/view/6011>.

[5] González. V.; Maravilla. E.; Tarancón, J. “Comparación de esquemas de integración 3D para elementos enriquecidos en XFEM”. Revista UIS Ingenierías, [s.l.], v. 15, n. 2, nov. 2016. ISSN 2145-8456. [En Línea] Disponible en: <http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistauisingenierias/article/view/7-16>
<https://doi.org/10.18273/revuin.v15n2-2016001>.

[6] González, O.; Leal, j.; Reyes, J. “Análisis de integridad estructural de tuberías de material compuesto para el transporte de hidrocarburos por elementos finitos”. Revista UIS Ingenierías, [S.l.], v. 15, n. 2, nov. 2016. ISSN 2145-8456. [En Línea] Disponible en: <http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistauisingenierias/article/view/105-116>.
<https://doi.org/10.18273/revuin.v15n2-2016009>.

[7] Gross, B.; Srawley, J. E.; Brown Jr, W. F. Stress-Intensity Factors for A Single-Edge-Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function. DTIC Document. 1964

[8] Hibbitt, H. Some Properties of Singular Isoparametric Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 11, N. 1, P. 180-184, 1977. ISSN 1097-0207. 1977.

[9] Hughes, T. J. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Courier Dover Publications, 2012. ISBN 0486135020.

[10] Ingraffea, A. R.; Manu, C. Stress-Intensity Factor Computation in Three Dimensions with Quarter-Point Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 15, N. 10, P. 1427-1445, 1980. ISSN 1097-0207.

[11] Peano, A.; Pasini, A. A Warning Against Misuse of Quarter-Point Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 18, N. 2, P. 314-320, 1982. ISSN 1097-0207.

[12] Pin, T.; Pian, T. H. On The Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity. International Journal of Solids and Structures, V. 9, N. 3, P. 313-321, 1973. ISSN 0020-7683.

[13] Quintero, Y. et al. “Optimización de diseños de fractura hidráulica aplicando estudios geomecánicos”. Revista fuentes, [s.l.], v. 8, n. 2, mayo 2011. ISSN 2145-8502. [En Línea] Disponible en:

<http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistafuentes/article/view/1626>

[14] Zehnder, A. T. “Lecture Notes On Fracture Mechanics. Available for Public Use at Cornell University” [En Línea] Disponible en: <http://Ecommons.Library.Cornell>.

[15] Edu/Bitstream/1813/3075/6/Fracture_Notes_2008.pdf, 2007.