

## Desarrollo analítico de las ecuaciones Ginzburg-Landau para películas delgadas superconductoras en presencia de corrientes

### Analytical development of Ginzburg-Landau equations for superconducting thin film in presence of currents

Cristian Andrés Aguirre<sup>1</sup>, Quesle da Silva Martins<sup>2</sup>, José José Barba-Ortega<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil. Correo electrónico: cristian@fisica.ufmt.br

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidade Federal de Rondônia, Jí-Paraná, Brasil. Correo electrónico: quesle@fisica.ufmt.br

<sup>3</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jjbarbao@unal.edu.co

<sup>4</sup>Foundation of Researchers in Science and Technology of Materials, Bucaramanga, Colombia.

Recibido: 23 abril, 2018. Aceptado: 4 noviembre, 2018. Versión final: 10 febrero, 2019.

#### RESUMEN

Un análisis analítico para obtener las ecuaciones Ginzburg-Landau dependientes del tiempo en presencia de una corriente  $\mathbf{J}$  y de campo magnético  $\mathbf{H}$ , en una película delgada superconductora mesoscópica, es mostrado. La corriente de transporte es aplicada en un pequeño contacto ubicado en la frontera de la muestra. Estos contactos son incluidos a través del parámetro de extrapolación de deGennes  $b$  en las condiciones de contorno. Finalmente, mostramos una útil herramienta que puede ser usada para encontrar la evolución de  $\psi(\mathbf{A}, t)$  en dicho formalismo. Encontramos la dependencia de la magnetización  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  y de la susceptibilidad magnética  $\chi_m(\mathbf{H})$  con  $b$  para dicha muestra.

**PALABRAS CLAVE:** Ginzburg-Landau; corriente; Poisson; magnetización; susceptibilidad

#### ABSTRACT

An analytical analysis to obtain the time dependent Ginzburg-Landau equations in presence of a current  $\mathbf{J}$  and magnetic field  $\mathbf{H}$  in a mesoscopic superconducting thin film is shown. The transport current is applied in a little contact in the boundary of the sample. This contacts are included through to the deGennes extrapolation parameter  $b$  in the boundary conditions. Finally, we show a useful tool that can be used to found the evolution of  $\psi(\mathbf{A}, t)$  in this formalism. We found the dependence of the magnetization  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  and magnetic susceptibility  $\chi_m(\mathbf{H})$  with  $b$  for such sample.

**KEYWORDS:** Ginzburg-Landau; current; Poisson; magnetization; susceptibility.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Una de las ramas de la física de la materia condensada que más ha sido estudiada recientemente, es el área de la superconductividad, por dos aspectos básicos: el primero, son las aplicaciones directas que tiene implicaciones en casi todas las áreas del conocimiento, como la medicina [1], [2], mediciones de pequeños campos magnéticos [3]-[5], estudios biológicos [6], almace-

namiento de información [7]-[9], y como segundo aspecto, por su gran complejidad matemática [10]-[14], ya que la forma funcional de dicho sistema de ecuaciones, al no presentar comportamiento lineal, implica soluciones numéricas complejas y de altos procesos computacionales [15]-[23]. Dado esto, en los años más recientes se ha iniciado el estudio del fenómeno superconductor con inclusión de corrientes, ya que este fenómeno implica, movimiento coordinado de cascadas de vórtices, que pueden

ser aprovechados como corrientes muy similares a las que hoy en día se estudian con electrones [24]-[33], con las ventajas usuales, que en el estado superconductor, no existen pérdidas Óhmicas y con los descubrimientos de superconductores cada vez con mayor temperatura crítica  $T_c$ , se espera que la aplicación directa de la fluxtrónica, que es el aprovechamiento de dichas corrientes de vórtices en diferentes tipos de dispositivos. En el presente trabajo presentamos el esquema de discretización de las ecuaciones Ginzburg-Landau dependientes del tiempo en presencia de campos y corrientes, para una película superconductora (vea Figura 1). La corriente se aplica por contactos metálicos modelados mediante el parámetro de deGennes  $b$  en las condiciones de contorno. Adicionalmente, estudiamos la dependencia de la magnetización  $M(H)$  y susceptibilidad magnética  $\chi_m$  con  $b$ . Esta contribución está organizada de la siguiente forma, en la sección Formalismo Teórico presentamos el análisis del método numérico usando para resolver las ecuaciones Ginzburg-Landau y sus generalidades. En la sección Resultado Numérico mostramos un ejemplo de aplicación a la solución a un problema particular y finalmente, mostramos las conclusiones en su respectiva sección.

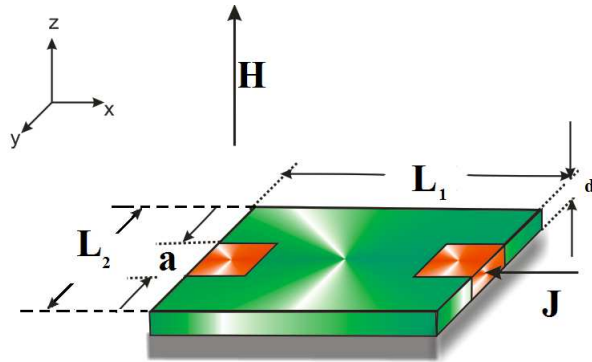


Figura 1: Esquema de la muestra estudiada: Película fina superconductora de lados  $L_1 = 12\xi$  y  $L_2 = 8\xi$ , en presencia de un campo magnético  $H$ , contacto donde se aplica la corriente  $J$  de tamaño  $a = 1/4L_1$ .

## 2. FORMALISMO TEÓRICO

La primera ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo para películas finas en presencia de campos y corrientes están dada por [18], [19], [20]:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + \Gamma^2|\psi|^2}} \left[ \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\Gamma^2\psi}{2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + i\Phi\psi \right] = (\vec{\nabla} - i\vec{A})^2\psi + \psi(1 - |\psi|^2) \quad (1)$$

En el límite de película delgada se toma el potencial vector  $\mathbf{A}$  igual al potencial vectorial asociado al campo magnético externo, por lo cual la ecuación Ginzburg-Landau que da cuenta de la variación temporal de  $\mathbf{A}$ , no se resuelve. En la ecuación 1,  $\psi$  representa el parámetro de orden,  $\mathbf{A}$  el potencial vectorial,  $\Phi$  el potencial eléctrico. Esta ecuación está adimensionalizada de la siguiente manera: el parámetro de orden  $\psi$  en unidades de  $\psi = \sqrt{-\alpha/\beta}$ , el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  en unidades de  $\xi H_{c2}$ , siendo  $H_{c2}$  el segundo campo crítico termodinámico, longitudes en unidades de la longitud de coherencia  $\xi$ , temperatura en unidades de la temperatura crítica  $T_c$ , tiempo en unidades del tiempo Ginzburg-Landau  $t_{GL} = \pi\hbar/8k_B T_c \eta$ , el potencial eléctrico en unidades de  $\Phi_0 = \hbar/2et_{GL}$ . Condiciones de contorno de Neumann son tomadas en todas las fronteras de la muestra, excepto en los contactos donde variamos  $b$ . Con  $J$  siendo la corriente aplicada en unidades de  $J_0 = c\sigma\hbar/2et_{GL}$ ;  $\sigma$  es la conductividad en el estado normal. Tomamos  $\Gamma = 10$  y  $\mu = 5,79$  que son obtenidos del formalismo microscópico [20]. Condición necesaria para películas finas  $d \ll \xi$ . El diagrama de fase de los superconductores mesoscópicos está fuertemente influenciado por las condiciones de contorno para el parámetro de orden. En general dado por las condiciones de contorno de deGennes (introducimos la nueva variable  $\gamma = 1 - \delta/b$ , para un mejor análisis de resultados):

$$\mathbf{n} \cdot (i\vec{\nabla} + \mathbf{A})\psi = (1 - \delta/b)\psi = \gamma\psi \quad (2)$$

En la ecuación 2,  $\mathbf{n}$  es el vector unitario perpendicular a la superficie del superconductor,  $b$  es el parámetro de Gennes y  $\delta = 0,1$  es el tamaño de la malla.  $\gamma > 1$  simula una interface superconductor-superconductor,  $\gamma = 1$  idealiza la interface superconductor-vacio, y  $\delta < \gamma < 1$  es propio de una interface superconductor-metal. La densidad de corriente  $J$  debe cumplir la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (3)$$

En la ecuación 3, se cumple en general que  $\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_n$ ,  $\vec{J} = \text{Re}[\tilde{\psi}(-(\vec{\nabla} - \vec{A})^2\psi)]$  y  $\vec{J}_n = \vec{\nabla}\Phi$ , que resulta de la invariancia de calibre usada. Asumiendo que  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$  obtenemos  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  de donde se obtiene  $\vec{\nabla}^2\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s$  que será la ecuación de Poisson usada para incluir el potencial eléctrico. Ahora, inicialmente necesitamos una expresión implícita para el parámetro de orden  $\psi$ , para ello analizaremos analíticamente de la ecuación 1 (mostrado desde la ecuación 4 hasta la ecuación 26):

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\Gamma^2\psi}{2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} = \sqrt{1 + \Gamma^2|\psi|^2} \frac{\Delta}{\mu} - i\Phi\psi \quad (4)$$

Donde  $\Delta = -(\vec{\nabla} - \vec{A})^2\psi + \psi(1 - |\psi|^2)$ , con  $|\psi|^2 = \psi^*\tilde{\psi}$  y tomando su complejo conjugado:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{\Gamma^2\tilde{\psi}}{2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} = \sqrt{1 + \Gamma^2|\psi|^2} \frac{\Delta}{\tilde{\mu}} + i\Phi\psi \quad (5)$$

Suponiendo que  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$  son independientes tenemos el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\Gamma^2|\psi|^2}{\Gamma^2\tilde{\psi}^2} & \frac{\Gamma^2|\psi|^2}{2} \\ \frac{\Gamma^2|\psi|^2}{2} & \frac{1+\Gamma^2|\psi|^2}{\Gamma^2\tilde{\psi}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\Gamma^2|\psi|^2}\frac{\Delta}{\mu} - i\Phi\psi & \sqrt{1+\Gamma^2|\psi|^2}\frac{\tilde{\Delta}}{\mu} + i\Phi\tilde{\psi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Calculando el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} \frac{1+\Gamma^2|\psi|^2}{\Gamma^2\tilde{\psi}^2} & \frac{\Gamma^2|\psi|^2}{2} \\ \frac{\Gamma^2|\psi|^2}{2} & \frac{1+\Gamma^2|\psi|^2}{\Gamma^2\tilde{\psi}^2} \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\Gamma^2|\psi|^2}{2}\right)^2 - \frac{\Gamma^4\psi^4}{4} = 1 + \Gamma^2|\psi|^2 \quad (7)$$

Con lo cual, la solución para  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  estaría dada por:

$$(1 + \Gamma^2|\psi|^2)\frac{\partial\psi}{\partial t} = \begin{vmatrix} \sqrt{1+\Gamma^2|\psi|^2}\frac{\Delta}{\mu} - i\Phi\psi & \frac{\Gamma^2\psi^2}{2} \\ \sqrt{1+\Gamma^2|\psi|^2}\frac{\tilde{\Delta}}{\mu} - i\Phi\tilde{\psi} & 1 + \frac{\Gamma^2}{2}|\psi|^2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Obteniéndose explícitamente:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{1+\Gamma^2|\psi|^2}\frac{\Delta}{\mu} - \frac{\Gamma^2\psi Re(\tilde{\psi}\frac{\Delta}{\mu})}{\sqrt{1+\Gamma^2|\psi|^2}} - i\Phi\psi \quad (9)$$

Dada que los esquemas usuales de diferencias finitas o elementos finitos, presentan una complejidad en términos de la cantidad de puntos en la malla matemática, entonces aplicaremos el método de variables de enlace [12], donde se define una nueva variable como:

$$U_x(x, y, t) = \exp(-i \int_{x_0}^x A_x(\xi, y, t) d\xi) \quad (10)$$

$$U_y(x, y, t) = \exp(-i \int_{y_0}^y A_y(y, \eta, t) d\eta) \quad (11)$$

con  $\partial_{x,y} U_{x,y} = -iA_{x,y} U_{x,y}$ . Dadas estas propiedades, se permite escribir los operadores de la siguiente forma:

$$-i\tilde{U}_x \frac{\partial(U_x\psi)}{\partial x} = -i\tilde{U}_x \left( -iA_x U_x \psi + U_x \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \quad (12)$$

y

$$\tilde{U}_x \frac{\partial^2(U_x\psi)}{\partial x^2} = iU_x \frac{\partial}{\partial x} \left( U_x \left[ -i\tilde{U}_x \frac{\partial(U_x\psi)}{\partial x} \right] \right) \quad (13)$$

Con lo cual, en la base de  $U_{x,y}$ ,  $\tilde{U}_{x,y}$ ,  $\Delta$  es escrito de la siguiente forma:

$$\Delta = \tilde{U}_x \frac{\partial^2(U_x\psi)}{\partial x^2} + \tilde{U}_y \frac{\partial^2(U_y\psi)}{\partial y^2} + \psi(1 - |\psi|^2) \quad (14)$$

En la Figura 2, presentamos la malla matemática usada para la solución de la ecuación 1, usaremos las siguientes definiciones con el tamaño total de la malla de

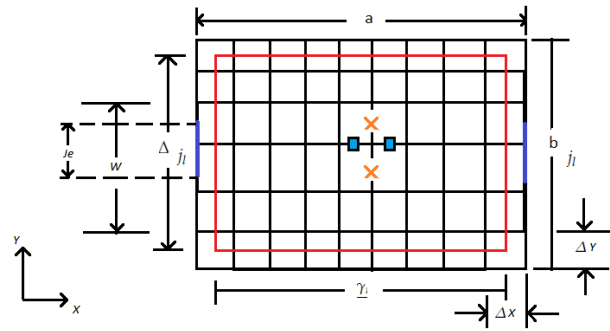


Figura 2: Esquema usado para la discretización de la muestra estudiada. En cuadrado azul, se muestran los puntos usados para la evaluación de  $\psi$  y en  $\times$  (color naranja) los usados para la evaluación de  $A$ .

$N_x + 1$  y  $N_y + 1$ ,  $\psi_{i,j} \equiv \psi(x_i, y_j)$ ,  $\Phi_{i,j} \equiv \Phi(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, \dots, N_x + 1$ ,  $j = 1, \dots, N_y + 1$ , y usando lo siguiente para la discretización de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} J_{sx}(i, j) &= J_{sx}(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_j) \quad i = 1, \dots, N_x \\ A_x(i, j) &= A_x(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_j) \quad j = 1, \dots, N_y + 1 \\ U_x(i, j) &= U_x(x_{i+1}, y_j) \tilde{U}_x(x_i, y_j) \\ &= \exp(-i(A_x(i, j)\Delta x)) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} J_{sy}(i, j) &= J_{sy}(x_i, y_j + \frac{\Delta y}{2}) \quad i = 1, \dots, N_x + 1 \\ A_y(i, j) &= A_y(x_i + y_j + \frac{\Delta y}{2}) \quad j = 1, \dots, N_y \\ U_y(i, j) &= U_y(x_i, y_{j+1}) \tilde{U}_y(x_i, y_j) \\ &= \exp(-i(A_y(i, j)\Delta y)) \end{aligned} \quad (16)$$

Dado esto, con ayuda de la derivada central, la discretización del factor  $\Delta$ , se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j} &= [U_x(i, j)\psi_{(i+1,j)} - 2\psi_{(i,j)} + \tilde{U}_x(i-1, j)\psi_{(i-1,j)}]/(\Delta x)^2 + \\ & [U_y(i, j)\psi_{(i,j+1)} - 2\psi_{(i,j)} + \tilde{U}_y(i, j-1)\psi_{(i,j-1)}]/(\Delta y)^2 + \\ & \psi_{(i,j)}(1 - |\psi_{(i,j)}|^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Con lo cual, se procede a la discretización de:

$$J_{sx} = Re(\tilde{\psi}(-i)\tilde{U}_x \frac{\partial(U_x\psi)}{\partial x}) = Im\left(\tilde{U}_x \tilde{\psi} \frac{\partial(U_x\psi)}{\partial x}\right) \quad (18)$$

obteniéndose como aproximación:

$$J_{sx, sy(i,j)} = \frac{1}{\Delta x} Im[\tilde{\psi}_{(i,j)} U_x(i,j) \psi_{(i+1,j)}] \quad (19)$$

El paso a seguir son las condiciones de contorno, para los contactos metálicos. Estos serán modelados mediante la imposición sobre la densidad de corriente, donde las

posiciones de los contactos son  $N_{wi}$  y  $N_{wf}$ :  $J_{sx(i,j)} = 0$ ,  $J_{sy(N_x,j)} = 0$ , para  $2 \leq j \leq N_{wi}$  y  $N_{wf} \leq j \leq N_{wy}$ . Ahora aplicando los métodos usuales de separación de variables, para la ecuación de Poisson para dar cuenta del potencial  $\vec{\nabla}^2 \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s$ , donde se soluciona  $\Phi_H$  más la homogénea  $\Phi_{NH}$ , con la cual, aplicando dichas condiciones de contorno, para encontrar los valores de las constantes representadas en la Figura 2:

$$\Phi_H(x, y) = -\frac{j_l(w - a_y)}{\Delta} x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \frac{\sinh(\beta_m x)}{\cosh(\frac{\beta_m y}{2})} \cos(\beta_m y) \quad (20)$$

$$\Phi_{NH}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x) \cos(B_m y) \quad (21)$$

Resolviendo estas ecuaciones numéricamente:

$$\phi_{m,i+1} - (2 + B_m^2 a_x^2) \phi_{m,i} + \phi_{m,i-1} = a_x^2 R_{m,i} \quad (22)$$

De acuerdo con las condiciones de frontera establecidas, tenemos que:

$$\phi_{m,1} = \phi_{m,2} \quad \phi_{m,N_x+1} = \phi_{m,N_x} \quad (23)$$

Usando el algoritmo de Thomas:

$$\begin{bmatrix} -(1 + \theta_m^2) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(1 + \theta_m^2) & 1 & 0 \\ \dots & 1 & -(1 + \theta_m^2) & 1 \\ \dots & 0 & \dots & -(1 + \theta_m^2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_{m,2} \\ \phi_{m,3} \\ \dots \\ \phi_{m,N_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{m,2} \\ S_{m,3} \\ \dots \\ S_{m,N_x} \end{bmatrix} = b_m \quad (24)$$

Con las siguientes condiciones:

$$S_{m,i} = a_x^2 R_{m,i}; \quad 2 \leq i \leq N_x \quad (25)$$

$$\theta_m = a_x^2 B_m^2; \quad m \neq 0 \quad (26)$$

### 3. RESULTADO NUMÉRICO: EJEMPLO DE APLICACIÓN

Dados los resultados de la sección anterior, aplicaremos dicha solución al problema considerado y presentaremos la dependencia que, sobre la magnetización y la susceptibilidad magnética, tiene la inclusión de corriente en la muestra. En la Figura 3(b), mostramos la magnetización  $-4\pi M$  en función del campo magnético  $H$  para diferentes condiciones de contorno o valores de  $\gamma$ . Se observa

que, en los casos que corresponde a  $\gamma = 0,8$  y  $\gamma = 0,9$ , para valores mayores de  $H = 0,75$ , la muestra permanece en estado Meissner. En la Figura 3(b), se presenta la magnetización para  $\gamma > 1$ , cada salto representa el ingreso de vórtices en la muestra. En ambas figuras se resaltan  $H = H_1$ , valor del campo para el cual ocurre el primer ingreso de vórtices. La Figura 5 muestra la susceptibili-

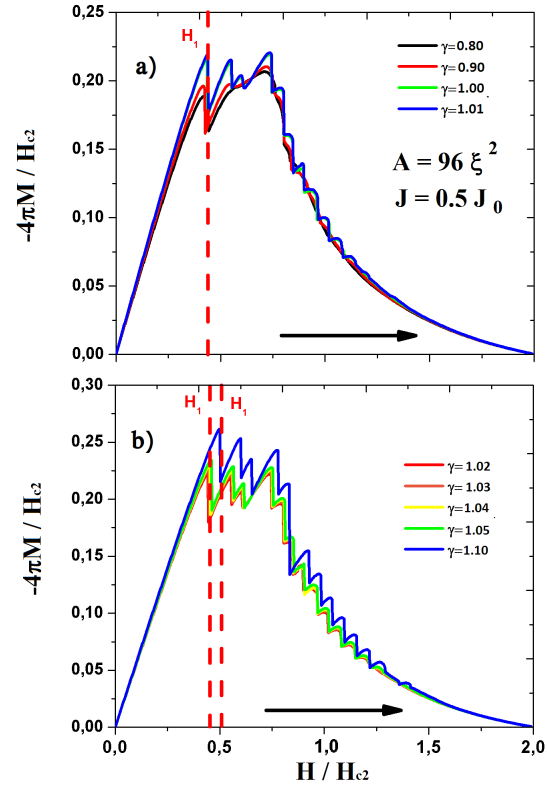


Figura 3: Magnetización  $-4\pi M$  en función del campo aplicado, para a)  $\gamma = 0,8; 0,9; 1,0; 1,01$  y b)  $\gamma = 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; 1,10$ .

dad magnética  $\chi_m = \partial_{\vec{H}} \vec{M}$  para  $J = 0,5$  y diferentes  $\gamma$ . Se observa que para todos los casos presentados y  $H > 1,48$  la susceptibilidad magnética es nula, además de presentar las oscilaciones típicas, conforme ingresan los vórtices en la muestra.

### 4. CONCLUSIONES

Presentamos un análisis numérico de discretización de las ecuaciones Ginzburg-Landau y el algoritmo necesario para garantizar su convergencia y estabilidad en la solución computacional. Mostramos la forma analítica de dichas ecuaciones, estableciendo condiciones de contorno para todas las cantidades físicas relevantes. Con lo

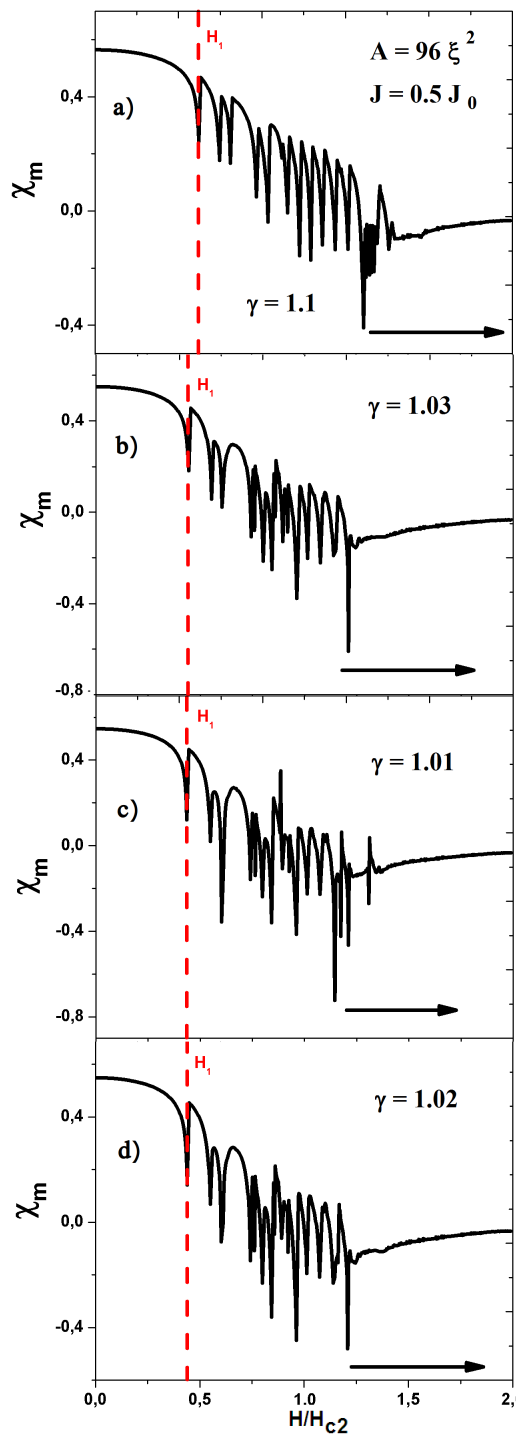


Figura 4: Susceptibilidad magnética  $\chi_m$  en función del campo aplicado, para a)  $\gamma = 1,10$ ; b)  $\gamma = 1,03$ ; c)  $\gamma = 1,01$ ; d)  $\gamma = 1,02$ .

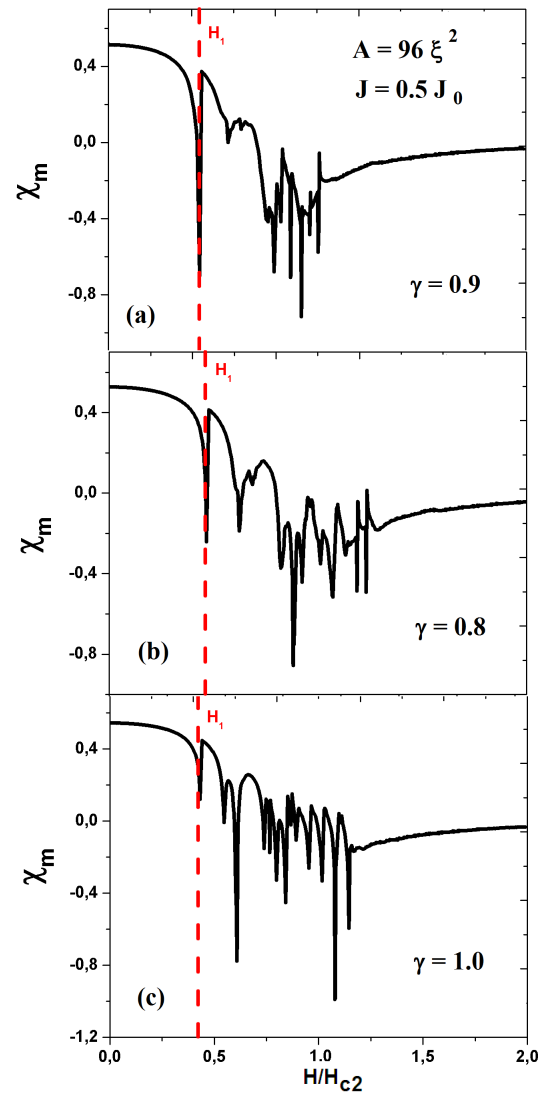


Figura 5: Susceptibilidad magnética  $\chi_m$  en función del campo aplicado, para a)  $\gamma = 0,9$ ; b)  $\gamma = 0,8$ ; c)  $\gamma = 1,0$ ;

cual, solucinamos el algoritmo computacional y aplicamos dicha solución a un problema específico. Calculamos curvas de magnetización y susceptibilidad magnética, y su dependencia con las condiciones de contorno, estos resultados están en completa concordancia con resultados teóricos y experimentales existentes en la literatura.

## 5. REFERENCIAS

- [1] J. Barba-Ortega, E. Sardella, J. Albino Aguiar, Superconducting boundary conditions for mesoscopic circular samples, *Supercond. Sci. Technol.* **24**, 015001 2011.
- [2] C. Aguirre, J. Barba-Ortega, Effect of Anti-dots on the Magnetic Susceptibility in a Superconducting Long Prism *J. Low Temp Phys* **186**, 250, 2017.
- [3] C. Aguirre, H. Blas, J. Barba-Ortega, Mesoscale vortex pinning landscapes in a two component superconductor, *Physica C*, **554**, 8 2018.
- [4] P. G. de Gennes and J. Matricon, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 45 1964.
- [5] L. Komendova, M. V. Milošević, A. A. Shanenko, and F. M. Peeters, Different length scales for order parameters in two-gap superconductors: Extended Ginzburg-Landau theory, *Phys. Rev. B*, **84**, 064522 2011.
- [6] Y. Imry *Introduction to Mesoscopic Physics*, edited by (Oxford Univ. Press, Oxford) 2002.
- [7] R. Fazio, V. F. Gantmakher and Y. Imry *New Directions in Mesoscopic Physics*, edited by (Springer-Verlag, Berlin) 2003.
- [8] P. Singha-Deo, J. P. Pekola and Manninen M. Heat capacity of mesoscopic superconducting disks, *Europhys. Lett.* **50**, 649 2000.
- [9] A. Bezryadin, A. Buzdin and B. Pannetier, Nucleation of vortices inside open and blind microholes, *Phys. Rev. B* **51**, 3718 1995.
- [10] O. Bourgeois, S. E. Skipetrov, F. Ong and J. Chaussy, Calorimetry of Mesoscopic Superconducting Loops *Phys. Rev. Lett.* **94**, 057007 2005.
- [11] F. R. Ong, O. Bourgeois, S. E. Skipetrov and J. Chaussy, Doping-dependent nonlinear Meissner effect and spontaneous currents in high-Tc superconductors *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140503 2006.
- [12] G. C. Buscaglia, C. Bolech and A. Lopez, *Connectivity and Superconductivity*, J. Berger, and J. Rubinstein (Eds.), Springer, 2000.
- [13] W. C. Fon, K. C. Schwab, J. M. Worlock, and M. L. Roukes, Nanoscale, Phonon-Coupled Calorimetry with Sub-Attojoule/Kelvin Resolution. *Nano Lett.* **5**, 1968 2005.
- [14] F. R. Ong and O. Bourgeois, Topology effects on the heat capacity of mesoscopic, *European Phys. Lett.* **79**, 67003 2007.
- [15] L. Cabral, J. Albino Aguiar, Vortex configurations in superconducting thin disks with finite  $\Lambda$ , *Physica C*, **460**, 1295 2007.
- [16] S. Okumaa, Y. Yamazakia, N. Kokubob, Novel vortex dynamics in Corbino-disk superconductors, *Physica C*, **470**, 776 2010.
- [17] M. Miguel, S. Zapperi, Tearing transition and plastic flow in superconducting thin films, *Nat. Mater.* **2**, 477 2003.
- [18] E. A. Andrushin, V. L. Ginzburg, and A. P. Silin, On the giant thermoelectric effect in a hollow superconducting cylinder, *Usp. Fiz. Nauk* **163**, 105 1997.
- [19] R. O. Zaitsev, Current-voltage characteristics of nanodimensional normal metal-superconductor point diffusion junctions, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **48**, 1759 1965.
- [20] J. Barba-Ortega, E. Sardella, J. Albino Aguiar, Superconducting properties of a parallelepiped mesoscopic superconductor: A comparative study between the 2D and 3D Ginzburg Landau models, *Phys. Lett. A* **379**, 732 2015.
- [21] J. Barba-Ortega, and M. Rincón Joya, Configuración de vórtices en películas finas: Teoría Ginzburg-Landau no lineal, *TecnoLogicas*, **27**, 89 2011.
- [22] J. Barba-Ortega, E. D. Valbuena-Niño, M. Rincón Joya, Transport phenomena in superconductors: kinematic vortex, *Iteckne*, **14**(1), 1 2017.
- [23] F. Duran - Flórez, M. Rincón-Joya, J. Barba-Ortega, Perfil de super-corrientes en una lámina de Al a campo magnético cero, *Respuestas*, **21**(2), 6 2016.
- [24] M. Tinkham *Introduction to Superconductivity* McGraw-Hill New York 1996.
- [25] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* Addison-Wesley, New York 1994.
- [26] A. D. Hernández and D. Domínguez, Surface barrier in mesoscopic type-I and type-II superconductors, *Phys. Rev. B* **65**, 144529 2002.

- [27] J. D. González, J. Barón-Jaimez and J. Barba-Ortega, Complex Vortex Configuration in a Disk with a Higher/Lower Critical Temperature Superconducting Geometrical Central Defect, *J. Low Temp. Phys.* **179**, 264 2015.
- [28] J. Barba-Ortega, J. D. González and E. Sardella, Tower as magnetic antipinning core in a small superconducting sample, *J. Low Temp. Phys.* **174**, 96 (2014).
- [29] A. L. Fetter and Hohenberg P. C. *Superconductivity* Marcel Dekker, New York 1969.
- [30] J. D. Patterson and B. C. Bailey *Solid-State Physics* Springer Berlin Heidelberg New York 2007.
- [31] B. Xu, M. V. Milosevic and F. M. Peeters, Calorimetric properties of mesoscopic superconducting disks, rings, and cylinders, *Phys. Rev. B* **81**, 064501 2010.
- [32] K. Watanabe, T. Kita and M. Arai, Magnetic-field dependence of thermodynamic quantities in the vortex state of type-II superconductors, *Phys. Rev. B* **71**, 144515 2005.
- [33] A. Shokri, M. Dehghan, A Meshless Method Using Radial Basis Functions for the Numerical Solution of Two Dimensional Complex Ginzburg Landau Equation, *CMES*, **84**, 333 2012